А. А. Ляпунов, О вполне аддитивных вектор-функциях, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, 1940, том 4, выпуск 6, 465–478

https://www.mathnet.ru/im3907

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 4 (1940), 465–478 Série mathématique

Посвящается памяти
В. И. Гливенко

А. А. ЛЯПУНОВ

О ВПОЛНЕ АДДИТИВНЫХ ВЕКТОР-ФУНКЦИЯХ

(*Представлено академиком* **А. Н. Колмогоровым**)

Изучается множество значений вполне аддитивной функции, принимающей значения из n-мерного векторного пространства. Доказано, что это множество замкнуто, а в случае, когда функция лишена скачков, то оно выпукло. Кроме того в этом последнем случае изучено поведение функции, когда ее значения принадлежат границе указанного множества.

Известно, что вполне аддитивная функция множеств, определенная для всех B-множеств отрезка и принимающая действительные значения, имеет в качестве множества значений замкнутое множество, а в случае, когда она лишена скачков, — замкнутый сегмент. Кроме того относительно такой функции естественным образом определяется понятие метрического типа множества; оказывается, что в случае функции, лишенной скачков, в концы сегмента отображается в точности по одному метрическому типу. Очевидно, наконец, что всякий замкнутый сегмент, содержащий начало координат, является множеством значений некоторой вполне аддитивной функции.

Настоящая работа посвящена выяснению вопроса о том, в каком смысле эти свойства сохраняются для вполне аддитивных функций, значения которых суть векторы n-мерного линейного пространства.

Пользуюсь случаем выразить глубокую благодарность А. Н. Колмогорову, давшему мне при редактировании этой работы ряд чрезвычайно ценных указаний, которыми я воспользовался, особенно при доказательстве теоремы II.

§ 1

Мы будем рассматривать некоторую систему подмножеств $\{E\}$ некоторого абстрактного множества X, инвариантную относительно сложений с конечным или счетным числом слагаемых и взятия дополнений, а также n-мерное эвклидово пространство R^n. Во всем дальнейшем буквами E, $\mathcal{E}$, H, B с различными индексами обозначаются множества системы $\{E\}$; буквой x с различными индексами—элементы множества X (мы будем называть их точками множества X), а буквами a, b, c — векторы (или точки) пространства R^n.

Определение 1. Ряд векторов назовем абсолютно сходящимся, если сходится ряд из их длин.

Очевидно, последовательность частных сумм такого ряда имеет предел, т. е. ряд сходится.

Определение 2. Функцию $\varphi(E)$, определенную на всех множествах системы $\{E\}$ и принимающую значения из R^n, назовем вполне аддитивной вектор-функцией, если, какова бы ни была система попарно непересекающихся множеств $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$, ряд

$$\varphi(E_1)+\varphi(E_2)+\ldots+\varphi(E_n)+\ldots$$

абсолютно сходится и

$$\varphi\left(\sum E_n\right)=\sum \varphi(E_n).$$

Определение 3. Мы будем говорить, что функция $\varphi(E)$ тождественно обращается в нуль, $\varphi(E)\equiv 0$, на множестве E, если она равна нулю на всех его подмножествах, входящих в $\{E\}$.

Определение 4. Метрическим типом множества E мы будем называть совокупность всех множеств E', таких, что

$$\varphi(E'-E)\equiv\varphi(E-E')\equiv 0.$$

Метрический тип множества E будем обозначать E^*. Наряду с функцией $\varphi(E)$ мы будем рассматривать функцию $\varphi(E^*)$, определенную так:

$$\varphi(E^*)=\varphi(E).$$

Определение 5. Если множество E таково, что $\varphi(E)\neq 0$, и для всякого $E_1\subset E$ имеет место одно из двух:

$$\text{либо } \varphi(E_1)=0, \quad \text{либо } \varphi(E_1)=\varphi(E),$$

то мы будем говорить, что на множестве E функция $\varphi(E)$ имеет скачок.

Определение 6. Если существует система попарно непересекающихся множеств $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ такая, что $\sum E_n = X$, и на каждом из них функция $\varphi(E)$ имеет скачок, то мы будем говорить, что $\varphi(E)$ есть функция скачков.

ЛЕММА I. *Какова бы ни была вполне аддитивная вектор-функция $\varphi(E)$, существуют два взаимно дополнительных множества E' и E'' таких, что $\varphi(E'\cdot E)$ лишена скачков, а $\varphi(E''\cdot E)$ является функцией скачков.*

Доказательство. Пусть $\{\overline{E^*}\}$ есть совокупность всех метрических типов множеств, на которых $\varphi(E)$ имеет скачок. Покажем, что их не больше, чем счетное число.

Пусть $\varphi(E)$ имеет скачки на E_1 и на E_2 и $E_1^*\neq E_2^*$. Тогда $\varphi(E_1\cdot E_2)=0$. Так как $\varphi(E)$ имеет скачок на E_1, то есть только две возможности: либо $\varphi(E_1\cdot E_2)=\varphi(E_1)$, либо $\varphi(E_1\cdot E_2)=0$. В первом случае также $\varphi(E_1\cdot E_2)=\varphi(E_2)$. Но тогда

$$\varphi(E_1-E_1\cdot E_2)\equiv\varphi(E_2-E_1\cdot E_2)\equiv 0,$$

т. е. $E_1^*=E_2^*$, что неверно. Таким образом $\varphi(E_1\cdot E_2)=0$, и следовательно $\varphi(E_1-E_1\cdot E_2)=\varphi(E_1)$, т. е. метрические типы E_1^* и E_2^* имеют непересекающиеся представители ($E_1-E_1\cdot E_2$ и E_2).

Допустим теперь, что скачков несчетно много. Опираясь на то, что пересечение счетного числа представителей некоторого метрического типа есть представитель того же метрического типа, можно построить трансфинитную последовательность попарно непересекающихся представителей различных метрических типов, мощности $\aleph_1$, на каждом из которых $\varphi(E)$ имеет скачок. Однако это противоречит полной аддитивности. Тем самым счетность семейства $\{\overline{E}\}$ доказана. Выберем для каждого из них по представителю. Сумму их обозначим через E', а дополнение к ней через E''. Легко видеть, что эти множества удовлетворяют всем требованиям леммы.

Определение 7. Если вполне аддитивные вектор-функции $\varphi_1(E)$ и $\varphi_2(E)$ определены на одном и том же семействе множеств $\{E\}$ и соотношение $\varphi_1(E)=0$ влечет за собой $\varphi_2(E)=0$, то функция $\varphi_2(E)$ абсолютно непрерывна относительно $\varphi_1(E)$.

Замечание 1. Если функции $\varphi_1(E)$ и $\varphi_2(E)$ определены на одном и том же семействе множеств $\{E\}$, то существуют два взаимно дополнительных множества E_1 и E_2 таких, что $\varphi_1(E_1)\equiv 0$ и $\varphi_2(E\cdot E_2)$ абсолютно непрерывны относительно $\varphi_1(E\cdot E_2)$.

Замечание 2. Точно так же, если вполне аддитивные вектор-функции $\varphi_1(E), \ldots, \varphi_n(E)$ определены на одном и том же семействе множеств $\{E\}$ и лишены скачков, то существует конечная система попарно непересекающихся множеств

$$E_1, E_2, \ldots, E_k, \quad \sum_{i=1}^{k} E_i = X$$

такая, что для всякого $i \leqslant k$ можно подобрать такое расположение функций

$$\varphi_{j_1(i)}(E), \ \varphi_{j_2(i)}(E), \ \ldots, \ \varphi_{j_n(i)}(E),$$

при котором $\varphi_{j_{m+1}(i)}(E)$ абсолютно непрерывна относительно $\varphi_{j_m(i)}(E)$, каково бы ни было $m<k$.

ЛЕММА II. *Пусть* $\mu(\lambda)$ — *действительная абсолютно непрерывная функция, определенная на сегменте* $[0, 1]$ *и* $\mu(0)=0$. *Тогда существует измеримая B-функция* $\tau(\lambda)$, *имеющая следующие свойства:*

1° $0\leqslant\tau(\lambda)\leqslant 1$,

2° $\operatorname{mes}[\tau(\lambda)<\tau]=\tau \quad (0\leqslant\tau\leqslant 1)$, *

3° $\displaystyle\int\limits_{[\tau(\lambda)<\tau]} \mu'\,d\lambda = \tau\cdot\mu(1)$.

Доказательство. Функция $\tau(\lambda)$ вполне определяется множествами

$$\mathscr{E}_{nk} = \left[\frac{k}{2^n} < \tau(\lambda) < \frac{k+1}{2^n}\right],$$

где $k=0, 1, 2, \ldots, 2^n-1$.

* Символ [ ] обозначает множество всех точек x, в которых выполнено условие, стоящее в скобках.

Множества $\mathscr{E}_{nk}$ мы будем строить по индукции

$$\mathscr{E}_{00}=[0\leqslant\tau(\lambda)\leqslant 1]=[0,1].$$

Очевидно

$$\operatorname{mes}\mathscr{E}_{00}=1,\quad \int\limits_{\mathscr{E}_{00}}\mu'\,d\lambda=\mu(1).$$

Допустим, что множество $\mathscr{E}_{nk}$ построено так, что

$$\left.\begin{aligned}&\operatorname{mes}\mathscr{E}_{nk}=\frac{1}{2^n},\\ &\int\limits_{\mathscr{E}_{nk}}\mu'\,d\lambda=\frac{\mu(1)}{2^n}.\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

Покажем, как строить множества $\mathscr{E}_{n+1,\,2k}$ и $\mathscr{E}_{n+1,\,2k+1}$. Обозначим через $(H)_{x_1}^{x_2}$ часть множества H, попавшую в интервал $[x_1\,x_2]$. Пусть $\xi(x)$ есть наименьшее из чисел, имеющих свойство

$$\operatorname{mes}(\mathscr{E}_{nk})_x^{\xi(x)}=\frac{1}{2^{n+1}}.$$

Мы будем считать, что $\xi(x)$ определена, лишь если $x\leqslant x_1$, где x_1 таково, что

$$\operatorname{mes}(\mathscr{E}_{nk})_0^{x_1}=\frac{1}{2^{n+1}}.$$

Очевидно, для всех таких x, $\xi(x)$ определена. Рассмотрим функцию

$$\omega(x)=\int\limits_{(\mathscr{E}_{nk})_x^{\xi(x)}}\mu'\,d\lambda.$$

Очевидно $\omega(x)$ непрерывна и

$$\omega(0)+\omega(x_1)=\int\limits_{\mathscr{E}_{nk}}\mu'\,d\lambda=\frac{\mu(1)}{2^n}.$$

Тогда существует такое число x_2, что

$$\omega(x_2)=\frac{\mu(1)}{2^{n+1}}.$$

В самом деле, если $\omega(0)=\frac{\mu(1)}{2^{n+1}}$, то мы положим $x_2=0$; в противном случае одно из чисел $\omega(0)$ и $\omega(1)$ больше, а другое меньше, чем $\frac{\mu(1)}{2^{n+1}}$. Тогда в силу непрерывности функции $\omega(x)$ найдется требуемое число x_2 такое, что $0<x_2<x_1$. Положим

$$\mathscr{E}_{n+1,\,2k}=(\mathscr{E}_{nk})_{x_2}^{\xi(x_2)},$$

$$\mathscr{E}_{n+1,\,2k+1}=\mathscr{E}_{nk}-\mathscr{E}_{n+1,\,2k}.$$

Тогда

$$\operatorname{mes}\mathscr{E}_{n+1,\,2k}=\operatorname{mes}(\mathscr{E}_{nk})_{x_2}^{\xi(x_2)}=\frac{1}{2^{n+1}},$$

$$\int\limits_{\mathscr{E}_{n+1,\,2k}}\mu'\,d\lambda=\omega(x_2)=\frac{\mu(1)}{2^{n+1}},$$

$$\operatorname{mes}\mathscr{E}_{n+1,\,2k+1}=\operatorname{mes}\mathscr{E}_{nk}-\operatorname{mes}\mathscr{E}_{n+1,\,2k}=\frac{1}{2^{n+1}},$$

$$\int\limits_{\mathscr{E}_{n+1,\,2k+1}}\mu'\,d\lambda=\int\limits_{\mathscr{E}_{nk}}\mu'\,d\lambda-\int\limits_{\mathscr{E}_{n+1,\,2k}}\mu'\,d\lambda=\frac{\mu(1)}{2^{n+1}}.$$

Легко усмотреть, что множества $\mathcal{E}_{nk}$, построенные таким процессом, состоят из конечного числа интервалов и отдельных точек, являющихся концами некоторых из этих интервалов.

Отсюда следует, что функция $\tau(\lambda)$ измерима B, так как всякое множество $[\tau(\lambda) < \tau]$ есть сумма счетного числа попарно непересекающихся множеств $\mathcal{E}_{nk}$. Из этого и из (1) следует для всякого τ $(0 \leqslant \tau \leqslant 1)$:

$$\mathrm{mes}\,[\tau(\lambda) < \tau] = \tau,$$

$$\int\limits_{[\tau(\lambda)<\tau]} \mu'\, d\lambda = \tau\,\mu(1),$$

что и требовалось доказать.

Определение 8. Функция $\Phi(x)$, определенная на элементах некоторого множества B, является спрямляющей функцией для $F(E)$ на B, если выполнены следующие условия:

1° $0 \leqslant \Phi(x) \leqslant 1$, когда $x \in B$,

2° $[\Phi(x) < \lambda] \in \{E\}$,

3° $F([\Phi(x) < \lambda]) = \lambda\ F(B)$, если $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.

Замечание 3. Справедливы следующие соотношения:

1°° $F([\lambda_1 \leqslant \Phi(x) < \lambda_2]) = (\lambda_2 - \lambda_1) \cdot F(B)$, когда $0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant 1$;

2°° $F([\lambda_1 \leqslant \Phi(x) \leqslant \lambda_2]) = F([\lambda_1 < \Phi(x) < \lambda_2]) =$
$= F([\lambda_1 \leqslant \Phi(x) < \lambda_2]) = F([\lambda_1 < \Phi(x) \leqslant \lambda_2])$.

Замечание 4. Если $F(E)$ есть вполне аддитивная действительная функция множеств, лишенная скачков, то каково бы ни было множество B, существует функция $\Phi(x)$, являющаяся спрямляющей функцией для $F(E)$ на B.

Замечание 5. Если E_1 и E_2 не пересекаются и $\Phi_1(x)$ и $\Phi_2(x)$ суть соответственно спрямляющие функции для $F(E)$ на E_1 и E_2, то $\Phi(x) = \begin{cases} \Phi_1(x), & x \subset E_1 \\ \Phi_2(x), & x \subset E_2 \end{cases}$ есть спрямляющая для $F(E)$ на $E_1 + E_2$.

ЛЕММА III. *Если $\Phi(x)$ есть спрямляющая функция для $F(E)$ на $H \subset \{E\}$ и $A \subset [0, 1]$ есть B-множество, то*

$$F([\Phi(x) \in A]) = F(H) \cdot \mathrm{mes}\, A. \tag{2}$$

Доказательство. Если A — интервал, то утверждение очевидно. Оно верно в случае, когда A есть сумма интервалов, вследствие того что $F(E)$ вполне аддитивна. Далее, оно верно для замкнутых множеств в силу соотношения $F(E) + F(CE) = F(X)$.

Повторяя это рассуждение трансфинитно, легко видеть, что формула (2) верна, если A есть произвольное B-множество.

ЛЕММА IV. *Пусть*

$$F_1(E), F_2(E), \ldots, F_n(E) \tag{3}$$

— конечная система вполне аддитивных действительных функций таких, что $F_{i+1}(E)$ абсолютно непрерывна относительно $F_i(E)$ $(i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, n-1)$ и существует спрямляющая функция $\Phi(x)$ для $F_1(E)$ на H.

Тогда существует функция $\Phi^*(x)$, *одновременно являющаяся спрямляющей функцией для всех функций системы* (3) *на* H.

Доказательство. Проведем индукцию по n. Для $n=1$ лемма верна, так как $\Phi(x)$ есть спрямляющая функция для $F_1(E)$ на H.

Пусть лемма верна для числа $n-1$. Покажем, что она верна для числа n. Пусть $\overline{\Phi}(x)$ есть спрямляющая функция для всех функций $F_1(E)$, $F_2(E), \ldots, F_{n-1}(E)$ на H. Тогда функция

$$\mu(\lambda)=F_n([\overline{\Phi}(x)<\lambda]) \tag{4}$$

абсолютно непрерывна, так как $F_n(E)$ абсолютно непрерывна относительно $F_{n-1}(E)$.

Формула (4) определяет $\mu(\lambda)$ для всех $\lambda \leqslant 1$. Очевидно $\mu(0)=0$.

Для функции $\mu(\lambda)$ построим функцию $\tau(\lambda)$, удовлетворяющую условиям леммы I. Покажем, что

$$\tau(\overline{\Phi}(x))=\Phi^*(x) \tag{5}$$

является спрямляющей функцией для всех функций системы (3).

В самом деле, $[\tau(\lambda)<\tau]$ измеримо B. Согласно лемме I

$$\operatorname{mes}[\tau(\lambda)<\tau]=\tau \quad (0 \leqslant \tau \leqslant 1).$$

Согласно лемме II, так как $\overline{\Phi}(x)$ есть спрямляющая функция для функций $F_1(E), \ldots, F_{n-1}(E)$ на H, то

$$\begin{aligned} F_i([\overline{\Phi}(x)\in[\tau(\lambda)<\tau]]) &= \operatorname{mes}[\tau(\lambda)<\tau]\cdot F_i(H)= \\ &=\tau\cdot F_i(H) \quad (i=1, 2, \ldots, n-1). \end{aligned} \tag{6}$$

Однако

$$[\overline{\Phi}(x)\in[\tau(\lambda)<\tau]]\equiv[\tau(\overline{\Phi}(x))<\tau]. \tag{7}$$

Из (5), (6) и (7) следует

$$F_i([\Phi^*(x)<\tau])=\tau\cdot F_i(H) \quad (i=1, 2, \ldots, n-1).$$

Это доказывает, что $\Phi^*(x)$ есть спрямляющая функция для $F_i(E)$ $(i=1, 2, \ldots, n-1)$ на H.

Покажем теперь, что $\Phi^*(x)$ есть также спрямляющая функция для $F_n(E)$ на H. Очевидно

$$F_n([a<\overline{\Phi}(x)<b])=\mu(b)-\mu(a).$$

Далее, если множество A есть сумма счетного числа интервалов, то

$$F_n([\overline{\Phi}(x)\in A])=\int\limits_A \mu'\,d\lambda. \tag{8}$$

Так же, как в лемме II, на основании того, что $F_n(E)$ вполне аддитивна, можно показать, что формула (8) верна, если A есть B-множество. Вследствие того что $\tau(\lambda)$ измерима B,

$$F_n([\overline{\Phi}(x)\in[\tau(\lambda)<\tau]])=\int\limits_{[\tau(\lambda)<\tau]}\mu'\,d\lambda=\operatorname{mes}[\tau(\lambda)<\tau]\cdot\mu(1)=\tau\cdot F_n(H). \tag{9}$$

Из (5), (7) и (9) получаем

$$F_n([\Phi^*(x) < \tau]) = \tau F_n(H),$$

т. е. $\Phi^*(x)$ есть спрямляющая функция для $F_n(E)$ на H.

Следствие 1. Из замечаний 2, 4 и 5 и доказанной леммы вытекает, что *если функции $F_1(E), \ldots, F_n(E)$ действительны и лишены скачков, то каково бы ни было множество B, существует функция $\Phi(x)$, одновременно являющаяся спрямляющей функцией для всех функций $F_1(E), \ldots, F_n(E)$.*

В таком случае, если мы положим

$$\varphi(E) = \sum j_i F_i(E),$$

где j_i — единичные векторы из R^n, то очевидно получим

$$\varphi([\Phi(x) < \lambda]) = \lambda \Phi(B).$$

Мы будем говорить, что $\Phi(x)$ есть спрямляющая функция для $\varphi(E)$ на B.

Так как из того, что вектор-функция вполне аддитивна и лишена скачков, следует, что ее компоненты также вполне аддитивны и лишены скачков, то доказанное положение можно сформулировать так:

Если $\varphi(E)$ вполне аддитивна и лишена скачков, то на любом множестве B существует спрямляющая функция для $\varphi(E)$ на B.

ТЕОРЕМА I. *Множество значений вполне аддитивной вектор-функции, лишенной скачков, всегда выпукло* *.

Доказательство. Обозначим множество значений функции $\varphi(E)$, когда E пробегает семейство $\{E\}$, через Ξ. Пусть

$$u \in \Xi,$$

тогда найдется множество $H \in \{E\}$ такое, что

$$\varphi(H) = u.$$

Пусть $\Phi(x)$ есть спрямляющая функция для $\varphi(E)$ на H. Существование ее обеспечено. Тогда

$$\varphi([\Phi(x) < \lambda]) = \lambda u \qquad (0 \leqslant \lambda \leqslant 1).$$

Следовательно все точки, лежащие на луче, соединяющем u с началом координат, входят в Ξ.

Пусть теперь $u_1 \in \Xi$ и $u_2 \in \Xi$. Тогда найдутся множества H_1 и H_2 такие, что

$$\varphi(H_1) = u_1, \quad \varphi(H_2) = u_2.$$

Обозначим

$$H = H_1 \cdot H_2.$$

Пусть

$$v = \varphi(H), \; w_1 = \varphi(H_1 - H_2), \; w_2 = \varphi(H_2 - H_1).$$

Все эти векторы определены в силу свойств семейства $\{E\}$. Очевидно множества $H_1 - H_2$ и $H_2 - H_1$ между собой не пересекаются.

---

* Это предложение перестает быть верным для вектор-функций, принимающих значения из бесконечно-мерных пространств. Пример печатается в Трудах педагогического института им. Либкнехта (Москва).

Пусть $\Phi_1(x)$ есть спрямляющая функция для $\varphi(E)$ на $H_1 - H_2$, а $\Phi_2(x)$ — спрямляющая функция для $\varphi(E)$ на $H_2 - H_1$. Покажем, что

$$\lambda\varphi(H_1) + (1-\lambda)\varphi(H_2) \in \Xi, \quad \text{если} \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1.$$

В самом деле,

$$\varphi([\Phi_1(x) < \lambda]) = \lambda\varphi(H_1 - H_2) = \lambda w_1,$$
$$\varphi([\Phi_2(x) < 1-\lambda]) = (1-\lambda)\varphi(H_2 - H_1) = (1-\lambda)w_2.$$

Следовательно

$$\varphi([\Phi_1(x) < \lambda] + [\Phi_2(x) < 1-\lambda] + H) = \lambda w_1 + (1-\lambda)w_2 + v,$$

так как все множества, стоящие в скобках, попарно не пересекаются. Однако

$$\lambda w_1 + (1-\lambda)w_2 + v = \lambda(w_1+v) + (1-\lambda)(w_2+v) = \lambda\varphi(H_1) + (1-\lambda)\varphi(H_2),$$

откуда следует сделанное утверждение.

Следствие 2. *Если $F_1(E), \ldots, F_n(E)$ суть вполне аддитивные функции множеств, лишенные скачков и такие, что*

$$F_n(E) = \Omega(F_1(E), F_2(E), \ldots, F_{n-1}(E)), \tag{10}$$

где $\Omega(t_1, \ldots, t_{n-1})$ есть какая угодно функция от $n-1$ переменных, то существуют такие числа $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{n-1}$, что

$$F_n(E) = \nu_1 F_1(E) + \ldots + \nu_{n-1}F_{n-1}(E). \tag{11}$$

Доказательство. Согласно теореме I множество Ξ выпукло. В силу соотношения (10), всякая параллель к оси OY_n пересекает Ξ не более, чем в одной точке. Это означает, что Ξ лежит в некотором линейном многообразии размерности $n-1$, не параллельном OY_n. Из этого следует справедливость формулы (11).

Следующий пример показывает, что отсутствие скачков здесь существенно. Построим две вполне аддитивных функции множеств $F_1(E)$ и $F_2(E)$ такие, что каждая из них абсолютно непрерывна относительно другой, и что

$$F_2(E) = \varphi(F_1(E)), \tag{12}$$

однако зависимость (12) не линейна.

Пусть X есть множество всех целых положительных чисел, $\{E\}$ — система всех его подмножеств. Рассмотрим два ряда

$$u_n = \frac{1}{n!}, \quad v_n = \frac{1}{(n!)^2}.$$

Очевидно не существует такого μ, что

$$u_n = \mu \cdot v_n.$$

Пусть

$$F_1(E) = \sum_{n\in E} u_n, \quad F_2(E) = \sum_{n\in E} v_n.$$

Легко проверить, что так определяемые функции абсолютно непрерывны одна относительно другой. Очевидно

$$u_n > \sum_{n'>n} u_{n'}, \quad v_n > \sum_{n'>n} v_{n'}.$$

Из этого следует, что

$$F_1(E_1) \neq F_1(E_2) \quad \text{и} \quad F_2(E_1) \neq F_2(E_2), \tag{13}$$

если $E_1 \neq E_2$.

Пусть Q есть множество всех значений функции $F_1(E)$. Образуем функцию $\varphi(z)$, определенную на элементах множества Q следующим образом: если $z=F_1(E)$, то $\varphi(z)=F_2(E)$. Из соотношений (13) следует, что функция $\varphi(z)$ определена единственным образом. Однако эта зависимость не может быть линейной, так как она не линейна уже для множеств, состоящих из одного целого числа.

Следствие 3. *Пусть $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ — система суммируемых функций, определенных на измеримом множестве X. Положим*

$$F_i(E)=\int\limits_E f_i(x)\,dx,$$

где интеграл понимается в смысле Лебега. Тогда множество всех точек n-мерного пространства $M(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, где $y_i=F_i(E)$, выпукло.

§ 2

ТЕОРЕМА II. *Множество значений любой вполне аддитивной вектор-функции всегда замкнуто.*

Прежде чем излагать доказательство теоремы, мы должны ввести некоторые определения и доказать некоторые вспомогательные леммы.

Если $\Xi_1, \Xi_2, \ldots, \Xi_n$ суть множества, лежащие в R^n, то множество Ξ всех точек a, представимых в виде $a=\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$, где сумма понимается в векторном смысле и $a_i \in \Xi$, носит название суммы в смысле Шнирельмана множеств $\Xi_1, \ldots, \Xi_n$.

Введем обозначение

$$\Xi=\Xi_1 \overset{0}{+} \Xi_2 \overset{0}{+} \ldots \overset{0}{+} \Xi_n .$$

Замечание 6. Если все слагаемые замкнуты, выпуклы или центрально симметричны, то сумма их в смысле Шнирельмана также замкнута, выпукла или центрально симметрична.

Замечание 7. Если $\varphi(E)$ — аддитивная вектор-функция, $E_1, E_2, \ldots, E_m$ — система попарно непересекающихся множеств, $\Xi_1, \Xi_2, \ldots \ldots, \Xi_n$ — соответственно множества значений функции $\varphi(E)$ на всех подмножествах каждого из этих множеств, а Ξ — то же для E, то

$$\Xi=\Xi_1 \overset{0}{+} \Xi_2 \overset{0}{+} \ldots \overset{0}{+} \Xi_n .$$

Замечание 8. Если Ξ есть множество значений вполне аддитивной функции, то Ξ центрально симметрично и центр симметрии есть $\frac{1}{2}\varphi(X)$.

В самом деле

$$\varphi(E)+\varphi(X-E)=\varphi(X),$$

следовательно

$$\varphi(E)-\frac{1}{2}\varphi(X)=\frac{1}{2}\varphi(X)-\varphi(X-E).$$

Но это означает, что $\varphi(E)$ и $\varphi(X-E)$ симметричны относительно $\frac{1}{2}\varphi(X)$.

ЛЕММА V. *Пусть* $\varphi(E)$ *определена на системе множеств* $\{E\}$, *вполне аддитивна и лишена скачков и* Ξ *есть множество значений* $\varphi(E)$. *Тогда существует система множеств* $\{E\}' \subset \{E\}$, *являющаяся борелевым телом над некоторой счетной системой множеств и такая, что функция* $\varphi(E)$, *рассмотренная на системе* $\{E\}'$, *вполне аддитивна и лишена скачков, а множество ее значений всюду плотно на* Ξ.

Доказательство. Систему множеств $\{E\}'$ мы будем строить следующим образом. Пусть L есть счетное множество, всюду плотное на Ξ, и

$$E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots \tag{14}$$

есть счетное семейство множеств системы $\{E\}$ таких, что множество всех векторов $\varphi(E_n)$ есть L.

Пусть $\{E\}^*$ есть наименьшая система множеств, содержащих все множества системы (14) и инвариантная относительно конечных сумм и взятия дополнений. Для каждого из множеств $H \subset \{E\}^*$ построим спрямляющую функцию для $\varphi(E)$ на H и рассмотрим совокупность всех множеств вида

$$[\Phi(x) < r],$$

где $\Phi(x)$ — некоторая из этих спрямляющих функций, а r — некоторое рациональное число $0 \leqslant r \leqslant 1$. Очевидно всех таких множеств счетное число. Пусть это будет

$$E_1^*, E_2^*, \ldots, E_n^*, \ldots$$

Множество значений функции $\varphi(E)$ на всех этих множествах всюду плотно на Ξ, так как оно содержит L.

За $\{E\}'$ можно выбрать совокупность всех множеств, получаемых из множеств E_n^* при помощи борелевых операций. Тогда для всякого множества $H \in \{E\}'$ значение $\varphi(H)$ можно вычислить, отправляясь от значений $\varphi(E_i^*)$. Очевидно $\varphi(E)$ на семействе $\{E\}'$ лишена скачков, и множество ее значений всюду плотно на Ξ, что и требовалось доказать.

Замечание 9. Из доказанной леммы следует, что для вполне аддитивных функций, лишенных скачков, определение абсолютной непрерывности эквивалентно обычному: для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что неравенство $|F_1(E)| < \delta$ влечет за собой $|F_2(E)| < \varepsilon$, потому что для случая, когда $\{E\}$ есть борелево тело на счетной системе множеств, эти определения эквивалентны.

ЛЕММА VI. *Во всякой опорной плоскости* $\sum \lambda_i x_i = c$ *множества* Ξ *значений вполне аддитивной функции* $\varphi(x) = \sum j_i F_i(x)$, *лишенной скачков, лежит по крайней мере одна точка этого множества.*

Доказательство. Рассмотрим вполне аддитивную функцию

$$F(E) = \sum \lambda_i F_i(E).$$

Либо максимум, либо минимум этой функции есть c. Но тогда существует такое E, что $F(E) = c$. Следовательно точка $\varphi(E)$ лежит в плоскости $\sum \lambda_i x_i = c$.

ЛЕММА VII. *Если в опорной плоскости*

$$\sum \lambda_i x_i = c \tag{15}$$

находится более чем одна точка множества Ξ, *то существуют такие два взаимно дополнительных множества* E' *и* E'', *что множество значений функции* $\varphi(E \cdot E'')$ *лежит в плоскости* $\sum \lambda_i x_i = 0$, *а множество значений функции* $\varphi(E \cdot E')$ *имеет в точности одну точку в опорной плоскости, параллельной* (15).

Доказательство. Рассмотрим функцию $F(E) = \sum \lambda_i F_i(E)$ и образуем множество E_i такое, что $F_i(E \cdot E_i)$ абсолютно непрерывна относительно $F(E \cdot E_i)$ и $F(E - E_i) \equiv 0$. Рассмотрим множества

$$E' = \prod_{i=1}^{n} E_i \quad \text{и} \quad E'' = X - E'.$$

Очевидно $\sum \lambda_i F_i(E \cdot E'') \equiv F(E \cdot E'') \equiv 0$, но это означает, что множество значений функции $\varphi(E \cdot E'')$ лежит в плоскости $\sum \lambda_i x_i = 0$. В то же время в опорной плоскости $\sum \lambda_i x_i = c$ к множеству значений функции $\varphi(E \cdot E')$ не могут лежать две различных точки этого множества, так как если бы для двух множеств различных метрических типов $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ и заключенных в E' это имело место, то

$$F(\mathcal{E}_1) = F(\mathcal{E}_2) = c_1,$$

т. е.

$$F(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2) = F(\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1) = 0.$$

Кроме того $\varphi(\mathcal{E}_1) \neq \varphi(\mathcal{E}_2)$ и следовательно либо $\varphi(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2) \not\equiv 0$, либо $\varphi(\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1) \not\equiv 0$, но это противоречит тому, что все $F_i(E)$ абсолютно непрерывны относительно $F(E)$.

ЛЕММА VIII. *Пусть* Ξ *есть множество значений вполне аддитивной вектор-функции,* $\sum \lambda_i x_i = c$ *его опорная гиперплоскость и* a — *единственная точка множества* Ξ, *лежащая в этой плоскости и входящая в* Ξ. *Тогда ни одна точка указанной плоскости, кроме точки* a, *не может быть предельной для множества* Ξ.

Доказательство. Справедливость этой леммы немедленно вытекает из того, что в условиях леммы все функции $F_i(E)$ абсолютно непрерывны относительно $\sum \lambda_i F_i(E)$, и из эквивалентности принятого здесь определения абсолютной непрерывности обычному (замечание 9).

Доказательство теоремы II. Рассмотрим сперва случай функций, лишенных скачков. Мы проведем индукцию по числу измерений. При $n = 1$ теорема верна. Предположим, что она верна для всех чисел $< n$, и допустим, что Ξ есть множество значений n-мерной вполне аддитивной вектор-функции $\varphi(E)$, лишенной скачков, однако Ξ не замкнуто. Пусть a есть предельная точка множества Ξ, не входящая в Ξ, и $\sum \lambda_i x_i = c$ — уравнение опорной гиперплоскости, проходящей через a. Согласно лемме VII существуют два взаимно дополнительных множества E_1 и E_2 таких, что на подмножествах множества E_1 функция $\varphi(E)$ принимает значения, лежащие в $(n-1)$-мерном пространстве, следовательно по предположению множество Ξ_2 значений $\varphi(E_2 - E)$ замкнуто, в то время как множество Ξ' значений функции $\varphi(E_1 \cdot E)\cdot$

имеет в плоскости $\sum \lambda_i x_i = c$ в точности одну точку. Согласно лемме VIII, в этой плоскости Ξ' не имеет других предельных точек. Однако

$$\Xi = \Xi_1 \overset{0}{+} \Xi_2 .$$

Таким образом в плоскости $\sum \lambda_i x_i = c$, Ξ не может иметь предельных точек, не входящих в него.

Рассмотрим теперь случай функции скачков. Пусть θ есть множество ее значений и $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ суть множества, на которых она имеет скачки. Функцию обозначим $\psi(E)$.

Ясно, что θ состоит из всех точек, являющихся суммами подпоследовательностей ряда

$$\psi(A_1), \psi(A_2), \ldots, \psi(A_n), \ldots$$

Длины всех этих векторов отличны от нуля. Рассмотрим ряд

$$2 \cdot \frac{1}{3}, \ 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2, \ldots, 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n, \ldots$$

Множество всевозможных сумм его подпоследовательностей есть канторово совершенное множество C. Поставим число $2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$ в соответствие вектору $\psi(A_n)$ и распространим это соответствие на суммы подпоследовательностей аддитивно. Тогда мы получим непрерывное отображение множества C на θ. Таким образом θ замкнуто.

Множество значений произвольной вполне аддитивной вектор-функции есть сумма в смысле Шнирельмана множеств значений функции скачков и функции, лишенной скачков. Таким образом оно замкнуто.

Перечислим условия, необходимые для того, чтобы некоторое n-мерное множество явилось множеством значений вполне аддитивной вектор-функции, лишенной скачков:

1) оно выпукло (теорема I),

2) замкнуто (теорема II),

3) центрально симметрично (замечание 8),

4) содержит начало координат (очевидно),

5) все его грани $< n$ измерений также центрально симметричны (лемма VII).

Можно показать, что при $n = 2$ условий $1-4$ уже достаточно, однако в случае $n = 3$ даже условий $1-5$ недостаточно.

§ 3

Определение 9. Точка u множества Ξ — обыкновенная, если она лежит внутри прямолинейного отрезка, входящего в Ξ. В противном случае u — точка необыкновенная.

Определение 10. Если в системе $\{E^*\}$ найдется лишь один метрический тип E^* такой, что $\varphi(E^*) = u$, то точка u есть точка единственности. Если таких типов континуум, то точка u является точкой континуальности.

ТЕОРЕМА III. *Если функция $\varphi(E)$ лишена скачков, то обыкновенные точки являются точками континуальности, а необыкновенные — точками единственности.*

Доказательство. Пусть $[a, b]$ есть отрезок, заключенный в Ξ, и серединой его является u. Пусть $\varphi(E_1)=a$, $\varphi(E_2)=b$ и $\Phi_1(x)$ — спрямляющая функция для $\varphi(E)$ на E_1-E_2, а $\Phi_2(x)$ — спрямляющая функция для $\varphi(E)$ на E_2-E_1. Тогда

$$u=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b.$$

Составим множества

$$H=E_1\cdot E_2,$$

$$H_1=\left[\Phi_1(x)<\frac{1}{2}\right]+\left[\Phi_2(x)<\frac{1}{2}\right],$$

$$H_2=\left[\Phi_1(x)>\frac{1}{2}\right]+\left[\Phi_2(x)>\frac{1}{2}\right].$$

Очевидно $H_1\cdot H_2=H\cdot H_1=H\cdot H_2=0$. Тогда

$$\left.\begin{aligned}
&\varphi(H_1)=\frac{1}{2}\varphi(E_1-E_2)+\frac{1}{2}\varphi(E_2-E_1),\\
&\varphi(H_2)=\frac{1}{2}\varphi(E_1-E_2)+\frac{1}{2}\varphi(E_2-E_1),\\
&\varphi(H_1+H)=\varphi(H_2+H)=\varphi(H)+\frac{1}{2}\varphi(E_1-E_2)+\frac{1}{2}\varphi(E_2-E_1)=\\
&\quad=\frac{1}{2}[\varphi(E_1\cdot E_2)+\varphi(E_1-E_2)]+\frac{1}{2}[\varphi(E_1\cdot E_2)+\\
&\quad+\varphi(E_2-E_1)]=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b=u.
\end{aligned}\right\}\tag{16}$$

Таким образом найдутся два множества, принадлежащих различным метрическим типам $H+H_1$ и $H+H_2$ и удовлетворяющих равенству (16). Пусть $\Phi'(x)$ и $\Phi''(x)$ спрямляющие функции для $\varphi(E)$ на H_1 и на H_2, каково бы ни было число μ, $0\leqslant\mu\leqslant 1$. Имеем

$$\begin{aligned}
&\varphi([\Phi'(x)<\mu]+[\Phi''(x)<1-\mu]+H)=\\
&=\varphi([\Phi'(x)<\mu])+\varphi([\Phi''(x)<1-\mu])+\varphi(H)=\\
&=\mu\varphi(H_1)+(1-\mu)\varphi(H_2)+\varphi(H)=\\
&=\mu(\varphi(H_1)+\varphi(H))+(1-\mu)(\varphi(H_2)+\varphi(H))=\\
&=\mu\varphi(H_1+H)+(1-\mu)\varphi(H_2+H)=\mu u+(1-\mu)u=u.
\end{aligned}$$

Следовательно различных метрических типов E^* таких, что $\varphi(E^*)=u$, будет континуум, так как разным числам μ соответствуют разные метрические типы множеств $[\Phi'(x)<\mu]+[\Phi''(x)<1-\mu]+H$.

Этим доказана первая часть теоремы: точки обыкновенные суть точки континуальности.

Пусть теперь

$$\varphi(U_1^*)=\varphi(U_2^*)=u,\quad U_1^*\neq U_2^*.$$

Покажем, что в таком случае точка u — обыкновенная. Очевидно

$$\varphi(U_1-U_2)=\varphi(U_2-U_1),\tag{17}$$

потому что каждый из этих векторов, прибавленный к $\varphi(U_1\cdot U_2)$, дает u. Возможны два случая:

1) $\varphi(U_1-U_2)=0$. Тогда либо $\varphi(U_1-U_2)\neq 0$, либо $\varphi(U_2-U_1)\neq 0$, так как иначе было бы $U_1^*=U_2^*$, что неверно.

Пусть, например,

$$\varphi(U_1-U_2)\neq 0,\quad E\subset U_1-U_2 \text{ и } \varphi(E)\neq 0.$$

Тогда

$$\varphi((U_1-U_2)-E)=-\varphi(E),\quad \varphi(U_1\cdot U_2)=u.$$

Однако

$$\varphi(U_1 \cdot U_2 + E) = u + \varphi(E),$$

$$\varphi(U_1 \cdot U_2 + [(U_1 - U_2) - E]) = u + \varphi((U_1 - U_2) - E) = u - \varphi(E).$$

Таким образом точки $u + \varphi(E)$ и $u - \varphi(E)$ входят в Ξ, но u есть середина отрезка, их соединяющего, т. е. u есть точка обыкновенная.

2) $\varphi(U_1 - U_2) \neq 0$. Тогда

$$\varphi(U_1 + [U_2 - U_1]) = \varphi(U_1) + \varphi(U_2 - U_1) = u + \varphi(U_2 - U_1),$$

$$\varphi(U_1 - [U_1 - U_2]) = \varphi(U_1) - \varphi(U_1 - U_2) = u - \varphi(U_1 - U_2) = u - \varphi(U_2 - U_1).$$

Следовательно точки $u - \varphi(U_2 - U_1)$ и $u + \varphi(U_2 - U_1)$ входят в Ξ. Однако u есть середина отрезка, их соединяющего, т. е. u есть обыкновенная точка. Следовательно, если u есть точка необыкновенная, то в нее может отображаться не больше, чем один метрический тип E^*. Однако в силу замкнутости множества Ξ по крайней мере один метрический тип в нее отображается, т. е. u есть точка единственности.

Математический институт им. В. А. Стеклова Академии Наук СССР

Поступило 8. III. 1940

A. LIAPOUNOFF. SUR LES FONCTIONS-VECTEURS COMPLÈTEMENT ADDITIVES

RÉSUMÉ

Nous étudions les fonctions-vecteurs $\varphi(E)$ définies sur des systèmes $\{E\}$ d'ensembles abstraits, invariants par rapport aux opérations boreliennes $(\sum, C)$ dont les valeurs appartiennent à l'espace euclidient à n-dimensions.

Une fonction-vecteur $\varphi(E)$ est dite complètement additive si quel que soit le système d'ensembles disjoints $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ appartenant à $\{E\}$, les longueurs des vecteurs $\varphi(E_n)$ forment une série convergente et

$$\varphi\left(\sum E_n\right) = \sum \varphi(E_n).$$

$\varphi(E)$ subit un saut sur E, si quel que soit l'ensemble $E' \subset E$ appartenant à $\{E\}$ on a $\varphi(E') = 0$ ou bien $\varphi(E') = \varphi(E) \neq 0$. On dit que $\varphi(E)$ est identiquement nulle $\varphi(E') \equiv 0$ sur E' si $\varphi(E' \cdot E'') = 0$ quel que soit l'ensemble E'' appartenant à $\{E\}$.

Le type métrique de E_1 relativement à $\varphi(E)$ est la réunion de tous les ensembles E_2 tels que $\varphi(E_1 - E_2) \equiv \varphi(E_2 - E_1) \equiv 0$. Nous désignons le type métrique de E par E^* et nous considérons la fonction $\varphi(E^*) = \varphi(E)$.

Nous démontrons les théorèmes suivants.

THÉORÈME I. *L'ensemble des valeurs d'une fonction-vecteur complètement additive et dépourvue de sauts, est toujours convexe.*

THÉORÈME II. *L'ensemble des valeurs de toute fonction-vecteur complètement additive est toujours fermé.*

THÉORÈME III. *Soit $\varphi(E)$ une fonction-vecteur complètement additive et dépourvue de sauts et a — un vecteur fixe appartenant à l'ensemble Ξ des valeurs de $\varphi(E)$. Alors l'équation $\varphi(E^*) = a$ admet un ensemble ayant la puissance du continu de solutions diverses dans le cas où a est intérieur à un segment rectiligne contenu dans Ξ. Elle admet une solution unique dans le cas contraire.*