Б. В. Федосов, М. А. Шубин, Об индексе случайных эллиптических операторов и их семейств, *Докл. АН СССР*, 1977, том 236, номер 4, 812–815

Доклады Академии наук СССР
1977. Том 236, № 4

УДК 517.43 МАТЕМАТИКА

Б. В. ФЕДОСОВ, М. А. ШУБИН

ОБ ИНДЕКСЕ СЛУЧАЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ И ИХ СЕМЕЙСТВ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 18 VI 1977)

Эллиптические операторы со случайными коэффициентами, образующими однородное случайное поле на $\mathbf{R}^n$, возникли в физике так называемых разупорядоченных систем и в последнее время изучались в ряде математических работ (см., например, ([1-3])). С другой стороны, в работах ([4, 5]) построены различные варианты нестандартной теории индекса эллиптических операторов на некомпактных многообразиях. В настоящей работе строится теория индекса случайных эллиптических операторов и их семейств. Эта теория, в частности, обобщает результаты работы ([4]), посвященной почти-периодическим операторам. Отметим, что техника алгебр фон Неймана, использованная в ([4]), в нашем случае не работает.

1. Пусть Ω — вероятностное пространство, т. е. множество с выделенной σ-алгеброй $\mathscr{F}$ его подмножеств и вероятностной мерой μ на $\mathscr{F}$. Предположим, что на Ω задана динамическая система с n-мерным временем, т. е. представление $x\mapsto T_x$ аддитивной группы $\mathbf{R}^n$ в группу биективных и сохраняющих меру μ преобразований пространства Ω, измеримое в том смысле, что отображение $\mathbf{R}^n\times\Omega\to\Omega$, переводящее (x, ω) в $T_x\omega$, измеримо, если на $\mathbf{R}^n$ рассматривать σ-алгебру борелевских множеств. На протяжении всей работы мы считаем пространство Ω и динамическую систему T фиксированными.

Измеримая функция g: $\Omega\to\mathbf{C}^n$ называется инвариантной, если $g(T_x\omega)\underset{\text{п.в.}}{=}g(\omega)$, где x — любая фиксированная точка $\mathbf{R}^n$, а п.в. означает «почти везде по мере μ». Динамическая система T называется эргодической, если всякая измеримая инвариантная функция п.в. совпадает с некоторой постоянной. Однородной случайной функцией называется измеримая функция f: $\Omega\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{C}^N$, что

$$\text{п.в. } f(T_z\omega, x)=f(\omega, x+z) \text{ для любых } x,\ z\in\mathbf{R}^n.$$

Рассмотрим дифференциальный оператор

$$A=\sum_{|\alpha|\leqslant m}a_\alpha(\omega, x)D^\alpha,$$

где α — мультииндекс, т. е. $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_j\geqslant0$, α_j — целые числа; $|\alpha|=\alpha_1+\ldots+\alpha_n$; $D^\alpha=D_1^{\alpha_1}\ldots D_n^{\alpha_n}$; $D_j=i^{-1}\dfrac{\partial}{\partial x_j}$; $a_\alpha(\omega,\ x)$ — однородные случайные $(N\times N)$-матричные функции, причем $|\partial_x^\beta a_\alpha(\omega,\ x)|\leqslant C_{\alpha\beta}$, где $C_{\alpha\beta}$ — неслучайные постоянные. Введем главный символ оператора A — матричную функцию

$$a_m(\omega, x, \xi)=\sum_{|\alpha|=m}\xi^\alpha a_\alpha(\omega, x),$$

где $\xi \in \mathbf{R}^n$, $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n}$. Оператор A описанного вида называется случайным эллиптическим оператором, если

$$|\det a_m(\omega, x, \xi)| \geqslant \varepsilon > 0 \quad \text{при} \quad |\xi| = 1,$$

где ε — неслучайная постоянная. Обозначим через A^+ формально сопряженный оператор (определяемый условием $(Au, v) = (u, A^+v)$, $u, v \in (C_0^\infty(\mathbf{R}^n))^N$, где $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в $(L^2(\mathbf{R}^n))^N$), также являющийся случайным эллиптическим оператором.

Пусть $K = K(\omega)$ — интегральный оператор с п.в. непрерывным (по x, y) и ограниченным $(N \times N)$-матричным ядром $K(\omega, x, y)$ в пространстве $(L^2(\mathbf{R}^n))^N$. Будем говорить, что оператор K однороден, если п.в. $K(T_z\omega, x, y) = K(\omega, x+z, y+z)$ при всех x, y, $z \in \mathbf{R}^n$. В частности, в этом случае $K(\omega, x, x)$ является ограниченной однородной случайной функцией. По эргодической теореме Биркгофа п.в. существует предел

$$\mathrm{Sp}_R K = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T^n} \int_{Q_T} \operatorname{tr} K(\omega, x, x)\, dx,$$

где $Q_T = \{x = (x_1, \dots, x_n) \colon |x_j| \leqslant T/2\}$, dx — мера Лебега на $\mathbf{R}^n$, tr означает след матрицы. Этот предел называется случайным следом (или просто следом) однородного интегрального оператора K и является инвариантной функцией на Ω (в эргодическом случае постоянной).

Пусть теперь $\operatorname{Ker} A$ — ядро случайного эллиптического оператора A в $(L^2(\mathbf{R}^n))^N$, N_A — ортогональный проектор на $\operatorname{Ker} A$. Оказывается, что N_A является однородным интегральным оператором описанного типа, что позволяет ввести случайный индекс (или просто индекс) оператора A формулой

$$\mathrm{ind}_R A = \mathrm{Sp}_R N_A - \mathrm{Sp}_R N_{A^+}.$$

Таким образом, индекс — инвариантная случайная функция на Ω. В эргодическом случае индекс можно считать вещественным числом.

2. Сформулируем ряд свойств случайного индекса. Для краткости всюду опускаем слова «почти везде».

Предложение 1. а) *Пусть A_1, A_2 — два случайных эллиптических оператора.*

Тогда $\mathrm{ind}_R(A_1 \circ A_2) = \mathrm{ind}_R A_1 + \mathrm{ind}_R A_2$.

б) $\mathrm{ind}_R A$ *зависит лишь от главного символа* $a_m(\omega, x, \xi)$ *оператора A. Более того, существует такое $\varepsilon > 0$, что если оператор A' таков, что* $|a_m'(\omega, x, \xi) - a_m(\omega, x, \xi)| \leqslant \varepsilon |\xi|^m$, *где a_m' — главный символ A', то* $\mathrm{ind}_R A' = \mathrm{ind}_R A$.

Можно показать, что если K — неотрицательный однородный интегральный оператор, причем $\mathrm{Sp}_R K = 0$, то $K = 0$. Отсюда следует, что если $\mathrm{ind}_R A = 0$ и $\operatorname{Ker} A = 0$, то $\operatorname{Ker} A^+ = 0$. Однако отсюда не следует, что $\operatorname{Im} A = (L^2(\mathbf{R}^n))^N$, поскольку образ $\operatorname{Im} A$ в описанной ситуации может быть незамкнут (пример: оператор Лапласа). Обычное следствие теории индекса здесь имеет поэтому следующий вид:

Предложение 2. *Пусть дано инвариантное множество Ω_0 и существует такое неслучайное $\varepsilon > 0$, что п.в. на Ω_0*

$$\|Au\| \geqslant \varepsilon \|u\|, \qquad u \in (C_0^\infty(\mathbf{R}_n))^N,$$

где $\|\cdot\|$ означает норму в $(L^2(\mathbf{R}^n))^N$.

Тогда, если $(\mathrm{ind}_R A)|_{\Omega_0} = 0$, то п.в. на Ω_0 оператор A обратим как оператор A: $(H^s(\mathbf{R}^n))^N \to (H^{s-m}(\mathbf{R}^n))^N$, где $s \in \mathbf{R}$, $H^s(\mathbf{R}^n)$ — обычное соболевское пространство на $\mathbf{R}^n$.

Интересно отметить, что и в случае незамкнутости образа он все же «почти замкнут» в следующем смысле.

Предложение 3. *Для любого* $\varepsilon>0$ *существует такой однородный интегральный оператор* L_ε *в* $(L^2(\mathbf{R}^n))^N$, *являющийся ортогональным проектором, что*:

а) $\mathrm{Sp}_R L_\varepsilon<\varepsilon$;

б) $(1-N_{A^+})L_\varepsilon=L_\varepsilon$, *т. е.* $\mathrm{Im}\,L_\varepsilon\subset\mathrm{Im}(1-N_{A^+})$ (*в частности,* $1-N_{A^+}-L_\varepsilon$ *снова является ортогональным проектором*);

в) $\mathrm{Im}(1-N_{A^+}-L_\varepsilon)\subset\mathrm{Im}\,A\subset\mathrm{Im}(1-N_{A^+})$ (*здесь* A *рассматривается как оператор из* $(H^m(\mathbf{R}^n))^N$ *в* $(L^2(\mathbf{R}^n))^N$).

Заметим, теперь, что если K — неотрицательный однородный интегральный оператор и $\mathrm{Sp}_R K(\omega)>0$, то $\mathrm{Sp}\,K(\omega)=+\infty$ (здесь Sp означает обычный след). В частности, если K — проектор, то $\dim\mathrm{Im}\,K=+\infty$. Отсюда вытекает

Предложение 4. *Положим*

$$\Omega_\pm=\{\omega:\ \pm\mathrm{ind}_R A(\omega)>0\},\quad \Omega_0=\{\omega:\ \mathrm{ind}_R A(\omega)=0\}.$$

Тогда п.в. на Ω_+ (Ω_-) *оператор* A: $(H^s(\mathbf{R}^n))^N\to(H^{s-m}(\mathbf{R}^n))^N$ *для каждого* $s\in\mathbf{R}$ *имеет бесконечномерное ядро* (*коядро*). *В то же время на* Ω_0 *п.в. из условия* $\mathrm{Ker}\,A=0$ *вытекает, что* $\mathrm{Im}\,A$ *плотен.*

Укажем формулу индекса.

Теорема 1. *Имеет место формула*

$$\mathrm{ind}_R A=-\frac{1}{(2\pi i)^n}\frac{(n-1)!}{(2n-1)!}\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T^n}\int\limits_{Q_T\times S^{n-1}}\mathrm{tr}(a_m^{-1}\,da_m)^{2n-1},$$

где $S^{n-1}=\{\xi:\ |\xi|=1\}$, d *означает дифференциал де Рама,* $(a_m^{-1}\,da_m)^{2n-1}$ *понимается как внешнее произведение матриц дифференциальных форм,* tr *означает след матрицы, а ориентация* $Q_T\times S^{n-1}$ *согласуется с ориентацией* $\mathbf{R}_x^n\times\mathbf{R}_\xi^n$, *задаваемой формой* $d\xi_1\,dx_1\ldots d\xi_n\,dx_n$, *как в формуле Стокса.*

3. Опишем кратко теорию индекса семейств случайных эллиптических операторов. Нам понадобятся также случайные псевдодифференциальные операторы (п.д.о.) $a(\omega,\ x,\ D_x)$, определяемые как п.д.о., символы которых $a(\omega,\ x,\ \xi)$ измеримы на $\Omega\times\mathbf{R}^{2n}$, удовлетворяют обычным оценкам

$$|\partial_\xi^\alpha\partial_x^\beta a(\omega,\ x,\ \xi)|\leqslant C_{\alpha\beta}(1+|\xi|)^{m-|\alpha|}$$

и условию однородности

$$a(T_z\omega,\ x,\ \xi)=a(\omega,\ x+z,\ \xi).$$

Класс таких операторов обозначим RL^m. Положим $RL^{-\infty}=\bigcap\limits_m RL^m$. Описанные выше факты переносятся на случайные эллиптические п.д.о.

Пусть теперь M — компактное многообразие без края, $\{A(y)\}_{y\in M}$ семейство случайных эллиптических операторов, гладко зависящих от параметра y. Построим гладко зависящее от параметра семейство регуляризаторов $\{B(y)\}_{y\in M}$, так что операторы $1-A(y)\circ B(y)$, $1-B(y)\circ A(y)$ являются гладко зависящими от y операторами класса $RL^{-\infty}$. Построим проекторные функции

$$P_1=\begin{pmatrix}1-B\circ A & B\\ A\circ(1-B\circ A) & A\circ B\end{pmatrix},\quad P_2=\begin{pmatrix}0 & B\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

и по ним формы кривизны $\Omega_j=P_j\,dP_j\,dP_j$, $j=1,\ 2$, где произведение понимается как внешнее произведение дифференциальных форм. Положим также

$$\omega_j=\frac{i}{2\pi}\Omega_j,\qquad j=1,2.$$

Индекс $\mathrm{ind}_R\{A(y)\}$ семейства $\{A(y)\}$ определяется как класс когомологий де Рама следующей числовой формы на M, называемой характером Чженя:

$$\mathrm{ch}\, A(y) = \mathrm{Sp}_R(e^{\omega_1}-e^{\omega_2}) = \mathrm{Sp}_R(P_1(y)-P_2(y)) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{Sp}_R(\omega_1^k-\omega_2^k)}{k!}.$$

Можно показать, что определенный таким образом индекс семейства обладает обычными алгебраическими свойствами и является гомотопическим инвариантом семейства $\{A(y)\}_{y\in M}$. Если M — точка, то мы получаем индекс случайного оператора, определенный в п. 1.

Теорема 2. *Имеет место формула*

$$\mathrm{ind}_R\{A(y)\} \sim -\sum_{k=n}^{\infty} \frac{(k-1)!}{(2k-1)!(2\pi i)^k} \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T^n} \int_{Q_T\times S^{n-1}} \mathrm{tr}(a_m^{-1}\, da_m)^{2k-1},$$

где ориентация $Q_T\times S^{n-1}$ выбрана как в теореме 1, a_m — главный символ оператора $A(y)$, а интеграл по $Q_T\times S^{n-1}$ понимается как частичный интеграл формы по переменным dx_j, $d\xi_j$ (дифференциалы dy_l ставятся на последнее место и не участвуют в интегрировании), так что результат интегрирования — числовая дифференциальная форма на M; знак $\sim$ означает когомологичность форм на M по де Раму.

Московский физико-технический институт
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
16 VI 1977

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Л. А. Пастур*, УМН, т. 28, в. 1, 3 (1973). [2] *M. D. Donsker, S. R. S. Varadhan*, Comm. Pure and Appl. Math., v. 28, № 4, 525 (1975). [3] *А. И. Гусев*, Функц. анализ и его прилож., т. 11, в. 3 (1977). [4] *L. A. Coburn, R. D. Moyer, I. M. Singer*, Acta Math., v 130, № 3—4, 279 (1973). [5] *M. F. Atiyah*, Astérisque, № 32—33, 43 (1976).