

УДК 511

ОСРЕДНЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ В МЕХАНИКЕ КОМПОЗИТОВ**С. В. Шешенин¹, М. И. Савенкова²**

Предлагается развитие метода осреднения для решения физически нелинейных задач о равновесии слоистых пластин или пластин из функционально-градиентных материалов. Согласно методу осреднения, решением задачи является суперпозиция решения глобальной задачи во всей области и решения локальной задачи для представительной области, например ячейки периодичности. Для нелинейной задачи суперпозиция неверна, что осложняет применение метода в случае нелинейности. Выходом может служить процедура объединения метода осреднения и метода линеаризации при решении краевой (или вариационной) задачи. Определяющие соотношения в механике деформируемого твердого тела можно рассматривать как уравнения относительно скоростей или дифференциалов напряжений и деформаций по времени или параметру нагружения. В том случае, если они линейны относительно скоростей, можно применить процедуру метода осреднения. В статье такой подход демонстрируется на примере симметричной слоистой пластины, изгибающейся под воздействием равномерно распределенной нагрузки, изменяющейся во времени.

Ключевые слова: метод осреднения, эффективные модули, пластичность, теория деформаций, изгиб, композит, слоистая пластина, линеаризация, метод Эйлера, нелинейность.

In this paper we consider the method of homogenization that helps to solve the nonlinear equilibrium problems for layered plates and FGM plates. The homogenization method uses the superposition idea to combine the solution on the global domain with the fluctuations obtained as the solutions to local problems on the representative volume element domain. Superposition is not correct in the case of any nonlinearity. Nevertheless, it is quite possible to use the linearization of a nonlinear problem by differentiating the variational equation with respect to time or with respect to a loading parameter and by considering the constitutive equations formulated in terms of strain and stress rates. These are equations of hypo-elastic materials. As an example, a symmetric laminated plate subjected to bending is studied when a load uniformly depends on time.

Key words: homogenization method, effective moduli, plasticity, deformation theory, bending, composite, laminated plate, linearization, Euler method, nonlinearity.

Метод осреднения [1, 2] является математически строгим подходом для решения задач деформирования элементов конструкций из композитов, например слоистых пластин или пластин из функционально-градиентных материалов [3]. Прежде всего это касается линейных задач. Комбинированием решений локальных задач с решением глобальной задачи для материала с осредненными свойствами метод осреднения позволяет вычислить не только эффективные свойства, но и все характеристики напряженно-деформированного состояния. Наибольшее развитие он получил для периодически неоднородных сред, так как в этом случае представительной областью является любая периодическая ячейка структуры. Эффективность решения линейной задачи основывается на том, что достаточно решать локальные задачи только на одной ячейке.

В случае нелинейности средние по представительным областям свойства зависят от медленных координат [4]. Поэтому для определения эффективных свойств как функций медленных координат требуется решать локальные задачи для каждой представительной области. Во избежание этого используется параллельное решение локальных задач на многопроцессорных системах. Ниже описывается реализация процедуры комбинирования метода осреднения и метода линеаризации при решении задачи о равновесии слоистой пластины. В случае, когда напряженно-деформированное состояние в глобальной задаче является однородным, локальные задачи не зависят от медленных координат, и, как в линейном случае, достаточно решить их для одной представительной области. При этом решение локальных задач

¹ Шешенин Сергей Владимирович — доктор физ.-мат. наук, проф. каф. механики композитов мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: sergey.sheshenin@mail.ru.

² Савенкова Маргарита Ивановна — асп. каф. механики композитов мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: madgista@gmail.com.

можно рассматривать как численный эксперимент, заменяющий реальный эксперимент по определению эффективных материальных функций осредненного нелинейного материала. Такой подход применялся, например, в [5, 6].

Используем определяющее соотношение, линейное относительно дифференциалов по параметру нагружения напряжений и деформаций в рамках геометрически линейной теории деформирования:

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}(\varepsilon)\dot{\varepsilon}_{kl}.$$

Здесь и далее точка обозначает дифференцирование по параметру нагружения. Уравнения равновесия с граничными условиями также формулируются в терминах скоростей перемещений

$$\begin{cases} (C_{ijkl}(\mathbf{u})\dot{u}_{k,l})_{,j} = 0, \\ \dot{u}_i|_{\Sigma_1} = \dot{u}_i^0, \quad C_{ijkl}(\mathbf{u})\dot{u}_{k,l}n_j|_{\Sigma_2} = S_i^0, \end{cases} \quad (1)$$

где Σ_1 — кинетическая поверхность, Σ_2 — статическая поверхность, \dot{u}_i^0 — граничные скорости перемещений, S_i^0 — поверхностные силы, n_j — компоненты вектора нормали к Σ_2 .

В качестве примера используем хорошо известную деформационную теорию изотропной пластичности [7], для которой краевая задача записывается в виде (1), причем при активном нагружении

$$\begin{aligned} C_{ijkl}(\varepsilon) &= \lambda(\varepsilon)\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\varepsilon)(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) - 2G \frac{d\omega}{d\varepsilon_u} \frac{e_{ij}e_{kl}}{\varepsilon_u}, \\ \mu(\varepsilon) &= G(1 - \omega(\varepsilon)), \quad \lambda(\varepsilon) = K - 2/3\mu(\varepsilon), \quad e_{ij} = 1/3\theta\delta_{ij}, \quad \varepsilon_u = \sqrt{\underline{e} : \underline{e}}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\theta = \varepsilon_{kk}$, $\omega(\varepsilon)$ — функция пластичности, K — модуль объемного упругого растяжения, G — касательный модуль сдвига в области упругости материала, λ — постоянная Ламе. При разгрузке

$$C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + G(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}), \quad \lambda = K - 2/3G. \quad (3)$$

Поскольку при пошаговом решении задачи для композиционного материала в момент t_m перемещение \mathbf{u} известно, то определяющее уравнение можно переписать в виде

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^m(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})\dot{\varepsilon}_{kl}, \quad C_{ijkl}^m(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) \equiv C_{ijkl}(\varepsilon(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, t_m)),$$

где \mathbf{x} — глобальные (медленные) координаты, заданные в материале в целом; $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{x}/\varepsilon$ — локальные (быстрые) координаты, заданные на ячейке периодичности.

Далее рассматривается применение метода осреднения для решения задачи (1)–(3) на примере задачи изгиба слоистой пластины толщиной h с постоянным прямоугольным поперечным сечением под воздействием равномерно распределенной нагрузки $p(t)$. Решение задачи (1) ищется, согласно методу осреднения, в первом приближении относительно скорости $\dot{\mathbf{u}}$ в момент t_m в виде $\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}}^e + \dot{\mathbf{u}}^b$ [6], где $\dot{\mathbf{u}}^e$ — скорость перемещения, возникающего вследствие растяжения-сжатия в плоскости пластины; $\dot{\mathbf{u}}^b$ — скорость перемещения вследствие изгиба:

$$\begin{aligned} \dot{u}_i^e(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, t_m) &= \dot{v}_i(\mathbf{x}, t_m) + \varepsilon N_{iPQ}^e(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, t_m)\dot{v}_{P,Q}(\mathbf{x}, t_m), \quad i = 1, 2, 3; \\ \dot{u}_I^b(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, t_m) &= -\varepsilon\xi\dot{w}_{,I}(\mathbf{x}, t_m) + \varepsilon^2 N_{IPQ}^b(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, t_m)\dot{w}_{,PQ}(\mathbf{x}, t_m), \quad I = 1, 2; \\ \dot{u}_3^b(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, t_m) &= \dot{w}(\mathbf{x}, t_m) + \varepsilon^2 N_{3PQ}^b(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}, t_m)\dot{w}_{,PQ}(\mathbf{x}, t_m), \end{aligned} \quad (4)$$

где $P = 1, 2$; $Q = 1, 2$; $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$; $\xi = \xi_3 = x_3/\varepsilon$; $\dot{v}_I(\mathbf{x}, t_m)$ ($I = 1, 2$, $\dot{v}_3 = 0$) — компоненты гладкой составляющей скорости в плоскости пластины; $\dot{w}(\mathbf{x}, t_m)$ — скорость прогиба; ε — малый параметр, являющийся отношением толщины h пластины к ее характерному размеру в плане; ξ — единственная быстрая координата.

Вообще говоря, метод осреднения позволяет удовлетворить уравнениям равновесия в первом приближении, а граничным условиям — в нулевом. Поэтому граничные условия приходится формулировать относительно средних скоростей перемещений \dot{v}_I и \dot{w} . При этом возможно рассматривать граничные условия разных типов, например жесткое закрепление ($w = 0$, $\frac{\partial w}{\partial n} = 0$) или шарнирное закрепление ($w = 0$, $\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} = 0$).

Будем считать, что проведено обезразмеривание всех соотношений, тогда характерный размер пластины в ее плоскости равен единице, а $\varepsilon = h$. Поэтому будем использовать символ h для обозначения толщины пластины и малого параметра.

Локальные функции $N_{iPQ}^e(\xi, \mathbf{x}, t_m)$, $N_{iPQ}^b(\xi, \mathbf{x}, t_m)$ находятся из решения локальных задач, получаемых путем подстановки соотношений (4) в (1). Для слоистой пластины, как и в линейном случае [8], локальные задачи в момент t_m имеют вид

$$\begin{aligned} P_{i3PQ}(\xi, \mathbf{x}, t_m)_{,\xi} &= 0, & Q_{i3PQ}(\xi, \mathbf{x}, t_m)_{,\xi} &= 0, & \xi &\in (-1/2, 1/2); \\ P_{i3PQ}(\xi, \mathbf{x}, t_m) &= 0, & Q_{i3PQ}(\xi, \mathbf{x}, t_m) &= 0, & \xi &= \pm 1/2, \end{aligned} \quad (5)$$

где использованы обозначения:

$$\begin{aligned} P_{ijPQ}(\xi, \mathbf{x}, t_m) &\equiv P_{ijPQ}^m = C_{ijPQ}^m + C_{ijk3}^m N_{kPQ,\xi}^{e,m}, \\ Q_{ijPQ}(\xi, \mathbf{x}, t_m) &\equiv Q_{ijPQ}^m = -C_{ijPQ}^m \xi + C_{ijk3}^m N_{kPQ,\xi}^{b,m}. \end{aligned}$$

Существенное отличие от линейного случая состоит в том, что эти задачи зависят от \mathbf{x} как от параметра. Для слоистой пластины или пластины из функционально-градиентных материалов локальные задачи (5) решаются аналитически и имеют нетривиальные решения для функций $N_{iPQ}^e(\xi, \mathbf{x}, t_m)$ и $N_{iPQ}^b(\xi, \mathbf{x}, t_m)$. При численной реализации локальные задачи решаются для каждого узла двумерной сетки в плоскости пластины.

В итоге эффективные жесткости [7, 8] как функции медленных координат определяются по формулам

$$\begin{aligned} A_{IJPQ}^m(\mathbf{x}) &= h \int_{-1/2}^{1/2} P_{IJPQ}^m(\xi, \mathbf{x}) d\xi, & B_{IJPQ}^m(\mathbf{x}) &= h^2 \int_{-1/2}^{1/2} -Q_{IJPQ}^m(\xi, \mathbf{x}) d\xi, \\ B_{IJPQ}^{Tm}(\mathbf{x}) &= h^2 \int_{-1/2}^{1/2} \xi P_{IJPQ}^m(\xi, \mathbf{x}) d\xi, & D_{IJPQ}^m(\mathbf{x}) &= h^3 \int_{-1/2}^{1/2} -\xi Q_{IJPQ}^m(\xi, \mathbf{x}) d\xi. \end{aligned} \quad (6)$$

Тогда осредненная система уравнений равновесия примет вид

$$\begin{aligned} (A_{IJKL}^m(\mathbf{x}) \dot{v}_K^m(\mathbf{x}),_{L}),_J - (B_{IJKL}^m(\mathbf{x}) \dot{w}^m(\mathbf{x}),_{KL}),_J &= 0, \\ (B_{IJKL}^{Tm}(\mathbf{x}) \dot{v}_K^m(\mathbf{x}),_{L}),_{IJ} + (D_{IJKL}^m(\mathbf{x}) \dot{w}^m(\mathbf{x}),_{KL}),_{IJ} &= \dot{p}^m. \end{aligned} \quad (7)$$

Процедура решения в приращениях типа явного метода Эйлера состоит в том, что на шаге m решение $\mathbf{u}^m = \mathbf{u}(\xi, \mathbf{x}, t_m)$ предполагается известным. Тогда с помощью формул (2), (3) определяются модули жесткости C_{ijPQ}^m , затем решаются локальные задачи (5) и вычисляются эффективные жесткости (6), после чего решаются глобальные уравнения (7) с соответствующими граничными условиями и получаются перемещения на шаге $m+1$: $v_I^{m+1} = v_I^m + \dot{v}_I^m \Delta t$, $w^{m+1} = w^m + \dot{w}^m \Delta t$, и затем алгоритм повторяется для следующего шага нагружения.

Неявный метод Эйлера заключается в том, что вычисленные с помощью явного метода Эйлера перемещения считаются только нулевым приближением: $v_I^{m+1,0} = v_I^{m+1}$, $w^{m+1,0} = w^{m+1}$, поэтому производится уточнение модулей. По формулам (2), (3) вычисляются $C_{ijPQ}^{m+1,0} = C_{ijPQ}(\mathbf{u}^{m+1,0})$, далее решаются локальные задачи (5) и с помощью (6) вычисляются эффективные жесткости $A_{IJKL}^{m+1,0}$, $B_{IJKL}^{m+1,0}$, $B_{IJKL}^{Tm+1,0}$, $D_{IJKL}^{m+1,0}$, после чего находятся уточненные перемещения на шаге $m+1$: $v_I^{m+1,1} = v_I^m + \dot{v}_I^{m+1,1} \Delta t$, $w^{m+1,1} = w^m + \dot{w}^{m+1,1} \Delta t$. Таким образом, для итерации с номером s имеем $v_I^{m+1,s+1} = v_I^m + \dot{v}_I^{m+1,s+1} \Delta t$, $w^{m+1,s+1} = w^m + \dot{w}^{m+1,s+1} \Delta t$. После некоторого числа итераций функции $v_I^{m+1,s+1}$, $w^{m+1,s+1}$ принимаются за окончательные значения перемещений v_I^{m+1} , w^{m+1} на шаге $m+1$.

Изложенные явный и неявный методы были реализованы в виде программ; осуществлено решение задачи цилиндрического изгиба шарнирно опертой, слоистой симметричной пластины бесконечной ширины $-\infty < x_2 < +\infty$ с постоянным прямоугольным поперечным сечением $0 \leq x_1 \leq l$, $-0,5 \leq \xi \leq 0,5$ под действием нагрузки $p(t)$, равномерно распределенной по верхней границе пластины $\xi = 0,5$ и линейно изменяющейся во времени. Отношение h/l было выбрано равным 0,1. Пластина пятислойная,

каждый из слоев имеет высоту 0,2 и является элементом одного из трех множеств по координате ξ : $A_1 = (0,5; -0,3) \cup (0,3; 0,5)$, $A_2 = (-0,3; -0,1) \cup (0,1; 0,3)$, $A_3 = (-0,1; 0,1)$. Численное решение задачи искалось для упругопластического материала с билинейной диаграммой $\sigma_s(\epsilon_s)$ (рис. 1). Параметры материалов приведены в таблице, где σ_s — безразмерный предел текучести, G — модуль сдвига упругой зоны деформации, G^{TAN} — касательный модуль сдвига в пластической зоне, ν — коэффициент Пуассона.

Вследствие того что приложенная к пластине сила не зависит от координаты x_2 , эффективные жесткости и прогиб также от нее не зависят, поэтому далее будем обозначать $x_1 = x$. Поскольку рассматриваемый изгиб пластины цилиндрический, в формулах (6), (7) имеем $P = Q = 1$.

Кроме того, рассматриваемая пластина симметрична, при ее изгибе функции Q_{IJPQ} являются антисимметричными по ξ , поэтому соотношения (6) для изгибных жесткостей принимают вид

$$D_{IJ11}^m(x) = h^3 \int_{-1/2}^{1/2} -\xi Q_{IJ11}^m(\xi, x) d\xi.$$

Уравнения равновесия и граничные условия следующие:

$$(D_{IJ11}^m(x) \dot{w}_{,11}^m(x))_{,IJ} = \dot{p}^m, \quad \dot{w}^m(0) = \dot{w}^m(l) = 0, \quad \dot{w}_{,11}^m(0) = \dot{w}_{,11}^m(l) = 0, \quad \dot{w}^0(x) = 0.$$

Тогда решения локальных задач в нулевом приближении дают

$$N_{311}^m(x, \xi) = \int_{-1/2}^{\xi} y \frac{C_{3311}^m(x, y)}{C_{3333}^m(x, y)} dy + \text{const}, \quad \int_{-1/2}^{1/2} \xi \frac{C_{3311}^m(x, \xi)}{C_{3333}^m(x, \xi)} d\xi = 0$$

и для каждого значения x деформации и напряжения имеют вид

$$\dot{\epsilon}_{IJ}^{(0)m} = -h\xi \dot{w}_{,IJ}^m, \quad \dot{\epsilon}_{I3}^{(0)m} = 0, \quad \dot{\epsilon}_{33}^{(0)m} = hN_{3PQ}^m \dot{w}_{,PQ}^m; \quad \dot{\sigma}_{IJ}^{(0)m} = Q_{IJPQ}^m \dot{w}_{,PQ}^m, \quad \dot{\sigma}_{i3}^{(0)m} = 0.$$

На рис. 2 представлена вычисленная зависимость напряжения σ_{11} от вертикальной координаты $\xi \in (-1/2, 1/2)$ в поперечном сечении $x = l/2$. По горизонтальной оси отложены значения координаты ξ с шагом 0,1, по вертикальной оси — значения напряжений в пластине. Для построения графиков было рассмотрено пять значений параметра нагружения, которым соответствуют кривые 1–5. Ввиду симметричности пластины график напряжений симметричен относительно начала координат, а наличие разрывов — прямое следствие неоднородности пластины. Каждый непрерывный отрезок графика представляет собой зависимость напряжения σ_{11} от вертикальной координаты ξ в соответствующем слое. Зона пластичности возникает между третьим и четвертым значением параметра нагружения, что хорошо заметно на рисунке: зависимость $\sigma(\xi)$, соответствующая четвертому значению, уже не является линейной на каждом отрезке. В момент возникновения пластичности отношение силы в рассматриваемый момент к общей силе, изгибающей пластину, составляет 0,637.

Таким образом, в работе показано, что метод осреднения может быть обобщен на нелинейные задачи с использованием метода линеаризации (или прослеживания по параметру нагружения). Основная возникающая при этом сложность — решение большого количества локальных задач — в настоящее время

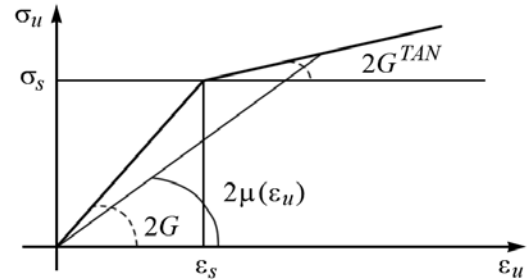


Рис. 1. Билинейная диаграмма упруго-пластического материала

Параметры материала	Слои, составляющие пластину		
	A_1	A_2	A_3
σ_s	1,2	0,7	1
G	0,5	0,32	0,56
G^{TAN}	0,05	0,032	0,056
ν	0,32	0,34	0,2

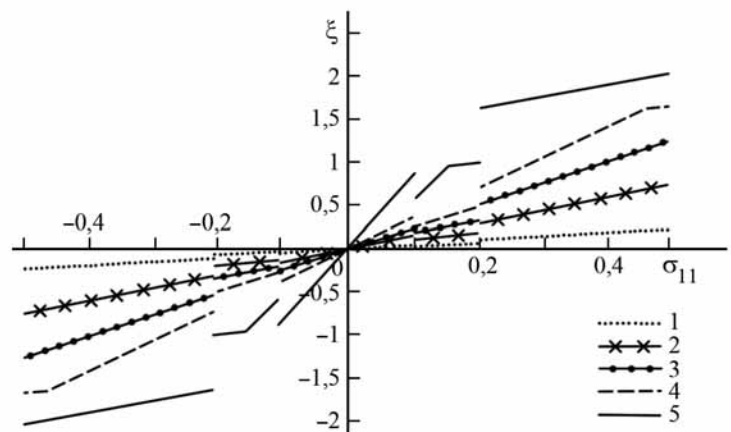


Рис. 2. График зависимости напряжения σ_{11} от вертикальной координаты ξ для центрального поперечного сечения пластины $x = l/2$

может быть сведена к минимуму благодаря возможности проведения вычислений на многопроцессорных компьютерных системах. Такой подход позволяет значительно сократить расчетное время вследствие высокой степени параллелизма при решении локальных задач. Кроме того, ввиду того что все рассмотренные в статье соотношения записывались в терминах скоростей напряжений и деформаций, возможно использование не только теории малых деформаций, выбранной в качестве примера, но и других теорий, например теории течения, не вносящих никаких изменений в предлагаемый алгоритм.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Победря Б.Е.* Механика композиционных материалов. М.: Изд-во МГУ, 1984.
2. *Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П.* Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984.
3. *Hui-Shen Shen.* Functionally graded materials: nonlinear analysis of plates and shells. Boca Raton: CRC Press, 2009.
4. *Шешенин С.В., Фи М., Ивлева Е.А.* Об осреднении периодических в плане пластин // Тр. Междунар. конф. "Теория и практика расчета зданий, сооружений и элементов конструкций. Аналитические и численные методы". М.: Изд-во МГСУ, 2008. 148–158.
5. *Муравлева Л.В., Шешенин С.В.* Эффективные свойства железобетонных плит при упругопластических деформациях // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2004. N 3. 62–65.
6. *Муравлева Л.В.* Эффективные свойства ортотропных композитов при упругопластических деформациях // Упругость и неупругость: Мат-лы Междунар. науч. симп. по проблемам механики деформируемых тел, посвященного 95-летию со дня рождения А. А. Ильюшина. М.: URSS, 2006. 371–378.
7. *Ильюшин А.А.* Пластичность. Ч. I. М.: ОГИЗ, 1948.
8. *Шешенин С.В.* Применение метода осреднения к пластинам, периодическим в плане // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2006. N 1. 47–51.

Поступила в редакцию
14.11.2011

УДК 532.528+539.374

СХЛОПЫВАНИЕ ОДИНОЧНОГО ПУЗЫРЬКА В ЖИДКОСТИ ШВЕДОВА–БИНГАМА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПУЛЬСИРУЮЩЕГО ВНЕШНЕГО ДАВЛЕНИЯ

А. А. Шевчук¹

Проведено численно-аналитическое исследование поведения сферического пузырька в идеальной жидкости, вязкой среде и несжимаемой вязкопластической среде с пределом текучести при действующем на достаточном удалении от поверхности пузырька давлении, изменяющемся со временем по периодическому закону. Исследованы и классифицированы различные режимы схлопывания. Найлены критические значения характеризующих поведение системы ключевых параметров, одним из которых является безразмерная частота внешнего давления.

Ключевые слова: сферическая полость, пузырек, динамика, задача Рэлея, задача Забабахина, сжатие, вязкопластическая среда, предел текучести.

Numerical and analytical study of the behavior of a spherical bubble in an ideal fluid, a viscous medium and an incompressible viscoplastic medium with a yield strength under time-varying periodic pressure at a sufficient distance from the surface of the bubble is carried out. Different modes of collapse are examined and classified. The critical values of the key parameters that characterize the behavior of the system (one of them is the dimensionless frequency of external pressure) are found.

Key words: spherical cavity, bubble, dynamics, Rayleigh problem, Zababakhin problem, compression, viscoplastic medium, yield limit.

1. Среда без предела текучести. Пусть все пространство заполнено идеальной несжимаемой жидкостью с плотностью ρ . На бесконечности действует пульсирующее давление $p_\infty = p_a \cos \omega_0 t$ [1, 2].

¹ Шевчук Александр Александрович — асп. каф. механики композитов мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: rockie@yandex.ru.