Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

М. Г. Григорян, О сходимости рядов Лапласа и Фурье, *Докл. АН СССР*, 1990, том 315, номер 2, 265–266

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
http://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 44.220.255.141
5 ноября 2024 г., 03:18:20

Доклады Академии наук СССР
1990. Том 315, № 2

УДК 517.5 МАТЕМАТИКА

© М.Г. ГРИГОРЯН

О СХОДИМОСТИ РЯДОВ ЛАПЛАСА И ФУРЬЕ

(Представлено академиком С.М. Никольским 12 II 1990)

Пусть $\{Y_n(\theta, \varphi)\}$ – сферические функции на S (S – единичная сфера на R_3). Напомним, что сферической гармоникой степени n называется сужение на единичную сферу S однородного гармонического многочлена степени n. Более подробно о сферических многочленах см. [1–3].

Пусть $f(\theta, \varphi) \in L(S)$ (S – пространство суммируемых функций на S). Рядом Лапласа (Фурье–Лапласа) функции $f(\theta, \varphi)$ называется ряд по сферическим функциям вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\theta,\varphi,f), \quad Y_n(\theta,\varphi,f) = \frac{2n+1}{4\pi} \iint_S f(\theta',\varphi') P_n(\cos\gamma)\, ds,$$

где $P_n(x)$ – полиномы Лежандра, γ – угол между радиусами, проведенными из центра шаровой поверхности к точкам (θ, φ) и (θ', φ'). Справедлива следующая

Теорема 1. *Для любого $\epsilon > 0$ существует измеримое множество $E \subset S$ с мерой $|E| > 4\pi - \epsilon$ такое, что для каждой функции $f(\theta, \varphi) \in L(S)$ и для любого $N > 1$ можно найти функцию $g(\theta, \varphi) \in L(S)$, $g(\theta, \varphi) = f(\theta, \varphi)$ на E такую, что ее ряд Лапласа по системе $\{Y_n(\theta, \varphi)\}_{n=N}$ сходится к ней в метрике $L(S)$, т.е.*

$$\lim_{m\to\infty} \iint_S \sum_{k=N}^{m} Y_n(\theta,\varphi,g) - g(\theta,\varphi)|\, ds = 0.$$

Отметим, что идея об исправлении функции с целью улучшения ее свойств принадлежит Лузину [4] (широко известно его классическое C-свойство, согласно которому каждая измеримая функция может быть превращена в непрерывную исправлением на множестве сколь угодно малой меры) и получила в дальнейшем большое развитие (см. [5–9]). В этом направлении фундаментальные результаты получены Д.Е. Меньшовым.

Для тригонометрической системы верна следующая

Теорема 2. *Для любого $\epsilon > 0$ существует измеримое множество $E \subset [0, 2\pi]$ с $|E| > 2\pi - \epsilon$ такое, что для каждой $f(x) \in L[0, 2\pi]$ можно найти функцию $g(x) \in L[0, 2\pi]$, $g(x) = f(x)$ на E, такую, что ее ряд Фурье по тригонометрической системе сходится в метрике L и почти всюду и последовательность коэффициентов Фурье*

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k(g)|^p + |b_k(g)|^p < \infty \text{ для всех } p > 2.$$

Отметим, что теорема 2 верна и для системы Уолша.

Для ограниченной полной ортонормированной системы имеет место

Теорема 3. *Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ – полная в $L^2[0, 1]$ ортонормированная система ограниченных функций. Тогда члены системы $\{\varphi_n(x)\}$ можно переставить так, чтобы вновь полученная система $\{\varphi_{\sigma(k)}(x)\}$ обладала следующим свойством: для любого $\epsilon > 0$ существует измеримое множество $E \subset [0, 1]$ с $|E| > 1 - \epsilon$ такое, что* *для каждой $f(x) \in L\,[0, 1]$ можно найти функцию $g(x) \in L\,[0, 1]$, $g(x) = f(x)$ на E, такую, что ее ряд Фурье по системе $\{\varphi_{\sigma(k)}(x)\}$ сходится почти всюду на $[0, 1]$ и последовательность коэффициентов Фурье $\{c_k(g)\} \in l_p$ для всех $p > 2$,*

$$c_k(g) = \int_0^1 g(t)\,\varphi_k(t)\,dt.$$

Отметим, что в 1977 г. доказана (см. [10])

Теорема (А.М. Олевский). *Существует непрерывная периодическая функция $f(x)$ на $[0, 2\pi]$ такая, что для любой функции $g(x) \in L\,(0, 2\pi)$ с мерой $|\{x \in [0, 2\pi];\ g(x) = f(x)\}| > 0$ и для любого $p < 2$ выполняется условие*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(g)|^p = +\infty, \quad c_n(g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t)\,e^{int}dt.$$

Следует отметить также, что этой теоремой дается положительный ответ на вопрос П.Л. Ульянова (см. [11]).

Ереванский государственный университет

Поступило
23 II 1990

ЛИТЕРАТУРА

1. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974. 2. *Никольский С.М., Лизоркин П.И.* – Тр. МИАН, 1984, т. 166, с. 186–200. 3. *Nikolskii S.M., Lizorkin P.I.* – Acta Sci. Math., 1985, vol. 48, p. 401–416. 4. *Лузин Н.Н.* – Мат. сб., 1912, т. 28, № 2, с. 266–294. 5. *Меньшов Д.Е.* – Тр. ММО, 1952, № 1, с. 5–38. 6. *Талалян А.А.* – Изв. АН СССР. Сер. мат., 1964, т. 28, № 3, с. 713–720. 7. *Оскольков К.И.* – ДАН, 1976, т. 229, № 2, с. 304–306. 8. *Grigorian M.G.* – Anal. Math., 1985, vol. 11, № 3, p. 201–216. 9. *Григорян М.Г.* – Мат. заметки, 1983, т. 33, с. 517–528. 10. *Олевский А.М.* – ДАН, 1978, т. 238, № 4, с. 796–799. 11. *Ульянов П.Л.* – УМН, 1964, т. 19, вып. 1, с. 3–58.

УДК 517.95 МАТЕМАТИКА

© В.Н. ДЕНИСОВ

О СТАБИЛИЗАЦИИ СРЕДНИХ ОТ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В СИММЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

(Представлено академиком А.Н. Тихоновым 1 VII 1988)

Настоящая работа посвящена выяснению необходимых и достаточных условий стабилизации средних от решения задачи Коши для гиперболических уравнений (волнового уравнения и уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу (ЭПД)), рассматриваемых в однородных симметрических пространствах.

Теорема о среднем значении Асгейрссона [1] дает метод для решения классической задачи Коши для волнового уравнения в евклидовом пространстве E^N (см. [2, с. 478]).

Классическая теория [3] разрешимости сингулярной задачи Коши для урав-