A. M. Nakhushev, Inverse problems for degenerate equations, and Volterra integral equations of the third kind, *Differ. Uravn.*, 1974, Volume 10, Number 1, 100–111

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ЯНВАРЬ 1974 г., ТОМ X, № 1

УДК 517.946

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ УРАВНЕНИЙ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА ТРЕТЬЕГО РОДА

А. М. НАХУШЕВ

§ 1. ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА — ДАРБУ — ПУАССОНА

В теории вырождающихся дифференциальных уравнений при отыскании решений краевых, начальных или смешанных задач, принадлежащих наперед заданным функциональным пространствам, естественным образом возникают (особенно в случае, когда часть границы области задания уравнения освобождена от граничных условий) следующие две взаимно обратные задачи. Пусть $L = \{L^s\}$ — семейство (в частности, однопараметрическое) линейных дифференциальных операторов L^s с одной и той же областью определения $D(L)$; $f = \{f_s\}$ — пространство достаточно гладких в некоторой заданной n-мерной области Ω функций $f_s(x)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$; B — принадлежащее $D(L)$ пространство функций $u(x)$, $x \in \Omega$, удовлетворяющих наперед заданным краевым условиям на границе $\partial\Omega$ или на ее части.

Задача I. По заданному оператору $L^\beta \in L$ найти функции $u \in B$ и $f_s \in f$, удовлетворяющие уравнению $L^\beta u = f_s$.

Задача II. По заданной правой части $f_\beta \in f$ найти функцию $u \in B$ и оператор $L^\beta \in L$, если известно, что $L^\beta u = f_\beta$.

Основная цель этого параграфа — продемонстрировать сказанное на примере уравнения Эйлера — Дарбу — Пуассона

$$E(\beta', \beta) u \equiv u_{xy} + \frac{\beta'}{y-x} u_x - \frac{\beta}{y-x} u_y = \frac{f_s(x, y)}{(y-x)^\mu}, \tag{1}$$

где $\mu = \mathrm{const} < 2$, к которому сводятся многие вырождающиеся гиперболические уравнения, например, уравнение

$$y^{2m} u_{xx} + y u_{yy} + \alpha u_y = f(x, y), \quad m, \ \alpha = \mathrm{const}, \tag{2}$$

предложенное и исследованное А. В. Бицадзе [1, 2], как модель уравнений смешанного типа, порядок которого вырождается вдоль линии изменения типа.

Задачи I и II являются обратными в смысле терминологии монографии [3]. Обратным задачам для строго гиперболических уравнений в несколько иной постановке посвящены работы [3—10].

Предварительно докажем ряд вспомогательных утверждений, характеризующих свойства всех решений уравнения (1).

Обозначим через Ω область $0 < x < y < 1$ евклидовой плоскости переменных x и y, через $D(\beta', \beta)$ — множество действительных функций $u = u(x, y)$ с непрерывной в Ω смешанной производной, принадлежащих классу $C(0 \leqslant x < y \leqslant 1) \cap C^1(\Omega)$ и таких, что

$$u_0(y) = u(0, y) \in C^1(0 < y \leqslant 1), \quad u_1(x) = u(x, 1) \in C^1(0 \leqslant x < 1).$$

Из свойств функции Римана [11, 12]

$$R(\xi, \eta; x, y) = (\eta - \xi)^{\beta+\beta'} (\eta - x)^{-\beta} (y - \xi)^{-\beta'} F(\beta, \beta', 1; \sigma_{\xi\eta}),$$

где $\sigma_{\xi,\eta} = [(x-\xi)(\eta - y)]/[(\eta - x)(y - \xi)]$, оператора $E(\beta', \beta)$ следует, что для функций $u \in D(\beta', \beta)$ и $f_s(x, y) \in C(0 \leqslant x < y \leqslant 1)$ уравнение (1) эквивалентно соотношению

$$u = (1-x)^{-\beta} y^{-\beta'} F(\beta, \beta', 1; \sigma_{01}) u_1(0) -$$

$$- y^{-\beta'} \int_y^1 [\eta u_0'(\eta) + \beta' u_0(\eta)] \eta^{\beta+\beta'-1} (\eta - x)^{-\beta} F(\beta, \beta', 1; \sigma_{0\eta}) d\eta +$$

$$+ (1-x)^{-\beta} \int_0^x [(1-\xi) u_1'(\xi) - \beta u_1(\xi)] (1-\xi)^{\beta+\beta'-1} (y-\xi)^{-\beta'} \times$$

$$\times F(\beta, \beta', 1; \sigma_{\xi 1}) d\xi -$$

$$- \int_0^x (y-\xi)^{-\beta'} d\xi \int_y^1 (\eta - \xi)^{\beta+\beta'-\mu} (\eta - x)^{-\beta} F(\beta, \beta', 1; \sigma_{\xi\eta}) f_s(\xi, \eta) d\eta. \qquad (3)$$

Теорема 1. *Пусть $\beta + \beta' < 1$, $\beta \leqslant 1$, $\beta' \leqslant 1$. Тогда любое решение $u(x, y)$ уравнения (1) из $D(\beta', \beta)$ непрерывно всюду в $\overline{\Omega}$ за исключением быть может точек $(0, 0)$ и $(1, 1)$, причем если $\beta < 1$ и $\beta' < 1$, то*

$$\frac{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1-\beta')}{\Gamma(1-\beta-\beta')} \lim_{(x,y)\to(x,x)} u(x, y) = (1-x)^{-\beta} x^{-\beta'} u_1(0) -$$

$$- x^{-\beta'} \int_x^1 \Phi_{\beta'}(\eta) \eta^{\beta+\beta'-1} (\eta - x)^{-\beta} d\eta + (1-x)^{-\beta} \times$$

$$\times \int_0^x \Psi_\beta(\xi) (1-\xi)^{\beta+\beta'-1} (x-\xi)^{-\beta'} d\xi -$$

$$- \int_0^x (x-\xi)^{-\beta'} d\xi \int_x^1 (\eta - \xi)^{\beta+\beta'-\mu} (\eta - x)^{-\beta} f_s(\xi, \eta) d\eta, \quad 0 < x < 1, \qquad (4)$$

где

$$\Phi_{\beta'}(\eta) = \eta u_0'(\eta) + \beta' u_0(\eta), \quad \Psi_\beta(\xi) = (1-\xi) u_1'(\xi) - \beta u_1(\xi),$$

если же один из параметров β или β' равен 1, например $\beta' = 1$, то

$$\beta \lim_{(x,y)\to(x,x)} u(x, y) = \int_x^1 (\eta - x)^{1-\mu} f_s(x, \eta) d\eta - \Psi_\beta(x). \qquad (5)$$

Равенство (4) вытекает из представления (3), если принять во внимание, что

$$\lim_{z\to 1-0} F(\beta, \beta', 1; z) = \frac{\Gamma(1-\beta-\beta')}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1-\beta')}.$$

При $\beta' = 1$ из (3) с учетом равенства

$$F(\beta, 1, 1; z) = (1-z)^{-\beta}$$

после элементарных преобразований будем иметь

$$u(x, y)=(y-x)^{-\beta} y^{\beta} u_0(y)+$$

$$+(y-x)^{-\beta} \int_0^x (y-\xi)^{\beta-1}\left[\Psi_\beta(\xi)-\int_y^1 (\eta-\xi)^{1-\mu} f_s(\xi, \eta)\, d\eta\right] d\xi=$$

$$=(y-x)^{-\beta} y^{\beta} u_0(y)+\int_0^{x/y}(1-t)^{-\beta-1}\left[\Psi_\beta\left(\frac{x-yt}{1-t}\right)-\right.$$

$$\left.-\int_y^1\left(\eta-\frac{x-yt}{1-t}\right)^{1-\mu} f_s\left(\frac{x-yt}{1-t}, \eta\right) d\eta\right] dt.$$

Отсюда предельным переходом получим (5). Из (5) следует, что если

$$\int_x^1 (\eta-x)^{1-\mu} f_s(x, \eta)\, d\eta=\Psi_\beta(x), \quad 0<x<1,$$

то любое решение $u \in D(1, \beta)$ уравнения

$$E(1, \beta) u=(y-x)^{-\mu} f_s(x, y)$$

обращается в нуль при $y \to x$.

Теорема 2*). *Пусть* $\beta'=n+1$, $\beta<-n$, $n=0, 1, \ldots$, $f_s(x, y)\equiv 0$, $\Psi_\beta(x)\equiv 0$. *Тогда все решения уравнения* $E(\beta', \beta) u=0$ *из класса* $D(\beta', \beta)$ *обращаются в нуль при* $y \to x$.

Действительно, общее решение в указанном классе на основании (3) имеет вид

$$u(x, y)=(1-x)^{-\beta} y^{-n-1} F(\beta, n+1, 1; \sigma_{01}) u_1(0)-$$

$$-y^{-n-1} \int_y^1 \Phi_{n+1}(\eta)\, \eta^{\beta+n}(\eta-x)^{-\beta} F(\beta, n+1, 1; \sigma_{0\eta})\, d\eta.$$

Хорошо известно, что

$$F(\beta, n+1, 1; z)=(1-z)^{-\beta-n} P_n^{(0,-\beta-n)}(1-2z),$$

где $P_n^{(\alpha,\beta)}(z)=(-1)^n P_n^{(\beta,\alpha)}(z)$ — многочлен Якоби [12]. Стало быть

$$u(x, y)=y^{\beta-1}(y-x)^{-\beta-n}\left[(1-x)^n u_1(0) P_n^{(0,-\beta-n)}(1-2\sigma_{01})-\right.$$

$$\left.-\int_y^1 \Phi_{n+1}(\eta-x)^n P_n^{(0,-\beta-n)}(1-2\sigma_{0\eta})\, d\eta\right].$$

Следовательно, функция $u(x, y)$ при $y \to x$, $0<x<1$, обращается в нуль порядка не ниже $-\beta-n$.

Изложенный в теореме 2 факт неединственности решения первой задачи Дарбу впервые был замечен Кальменовым Т. Ш. [13] в случае, когда $\beta+\beta'=1/2$.

*) Результаты теоремы 1 при $f_s \equiv 0$ и теоремы 2 в основном были получены Т. Ш. Кальменовым в его кандидатской диссертации «О влиянии коэффициентов при младших производных на корректность задач Дарбу и Гурса ...». Ташкент, 1973.

Теорема 3. *Пусть* $\beta+\beta'>1$, $\beta\beta'>0$ *и* $u(x, y)$ — *любое решение уравнения* (*1*) *из класса* $D(\beta', \beta)$. *Равенство*

$$\lim_{(x,y)\to(x,x)} (y-x)^{\beta+\beta'-1} u(x, y) = 0$$

имеет место тогда и только тогда, когда

$$\int_0^x (x-\xi)^{\beta-1} d\xi \int_x^1 (\eta-\xi)^{1-\mu} (\eta-x)^{\beta'-1} f_s(\xi, \eta)\, d\eta - (1-x)^{\beta'-1} x^{\beta-1} u_1(0) =$$
$$= (1-x)^{\beta'-1} \int_0^x \Psi_\beta(\xi)(x-\xi)^{\beta-1}\, d\xi - x^{\beta-1} \int_x^1 \Phi_{\beta'}(\eta)(\eta-x)^{\beta'-1}\, d\eta. \qquad (6)$$

Пользуясь тождеством

$$E(\beta', \beta) u = (y-x)^{1-\beta-\beta'} E(1-\beta, 1-\beta')(y-x)^{\beta+\beta'-1} u,$$

соотношение (3) можно представить в форме

$$(y-x)^{\beta+\beta'-1} u = (1-x)^{\beta'-1} y^{\beta-1} F(1-\beta', 1-\beta, 1; \sigma_{01}) u_1(0) -$$
$$- y^{\beta-1} \int_y^1 \Phi_{\beta'}(\eta)(\eta-x)^{\beta'-1} F(1-\beta', 1-\beta, 1; \sigma_{0\eta})\, d\eta +$$
$$+ (1-x)^{\beta'-1} \int_0^x \Psi_\beta(\xi)(y-\xi)^{\beta-1} F(1-\beta', 1-\beta, 1, \sigma_{\xi 1})\, d\xi +$$
$$+ \int_0^x (y-\xi)^{\beta-1} d\xi \int_1^y (\eta-\xi)^{1-\mu} (\eta-x)^{\beta'-1} \times$$
$$\times F(1-\beta', 1-\beta, 1; \sigma_{\xi\eta}) f_s(\xi, \eta)\, d\eta. \qquad (7)$$

Поскольку

$$\lim_{\sigma\to 1-0} F(1-\beta', 1-\beta, 1, \sigma) = \frac{\Gamma(\beta+\beta'-1)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta')},$$

то справедливость теоремы 3 вытекает из (7).

Теоремы 1, 2 и 3 прямо приводят нас к необходимости исследования обратных задач типа I и II. *Из* этих *теорем видно* также *как правильно надо ставить прямые и обратные задачи.* Например, в случае, когда оператор $E(\beta', \beta)$ задан, уравнение (6) содержит три произвольные функции $f_s(x, y)$, $u_0(y)$ и $u_1(x)$. Если задать две из них, то для третьей получается интегральное уравнение первого рода. Когда известны функции $u_0(y)$ и $u_1(x)$, т. е. данные Гурса, интегральное уравнение для $f_s(x, y)$ в соответствии с (6) имеет вид

$$\int_0^x (x-\xi)^{\beta-1} d\xi \int_x^1 (\eta-x)^{\beta'-1} (\eta-\xi)^{1-\mu} f_s(\xi, \eta)\, d\eta = \Psi(x).$$

Задачи типа I даже в их простейшей постановке приводят к интегральным уравнениям Вольтерра третьего рода.

Рассмотрим задачу I в предположении, что

1) $L^\beta \equiv E(0, \beta)$, $\beta>1$, $D(L) = D(0, \beta)$;

2) B — пространство функций $u(x, y)$ из $D(L)\cap C(\overline{\Omega})$, удовлетворяющих краевым условиям Гурса

$$u(0, x) = \varphi_0(x), \quad u(x, 1) = \psi_\beta(x), \quad 0<x<1, \qquad (8)$$

где $\varphi_0(x)$ и $\psi_\beta(x)$ — заданные функции;

3) $f=\{f_s\}$ — пространство функций $f_s(x, y)$, представимых в виде

$$f_s(x, y) = -(\beta-\mu+1)\varphi(y)+\lambda\varphi(x),\ \lambda=\mathrm{const}, \tag{9}$$

где $\varphi(x)\in C(0\leqslant x\leqslant 1)$.

В силу (3) искомые функции $u\in B$ и $f_s\in f$ должны быть связаны уравнением

$$u(x, y)=\psi_\beta(x)-\int_y^1\left[\eta^\beta\varphi_0'(\eta)+\int_0^x(\eta-\xi)^{\beta-\mu}f_s(\xi, \eta)\,d\xi\right](\eta-x)^{-\beta}d\eta=$$

$$=\psi_\beta(x)-(y-x)^{1-\beta}\int_0^{(1-y)/(1-x)}\left[\eta^\beta\varphi_0'(\eta)+\right.$$

$$\left.+\int_0^x(\eta-\xi)^{\beta-\mu}f_s(\xi, \eta)\,d\xi\right](1-t)^{\beta-2}\,dt, \tag{10}$$

где $\eta=(y-xt)/(1-t)$. Из этого уравнения легко видеть, что $u\in B$ тогда и только тогда, когда

$$x^\beta\varphi_0'(x)+\int_0^x(x-\xi)^{\beta-\mu}f_s(\xi, x)\,d\xi=0. \tag{11}$$

Если соблюдено (8), то

$$u(x, y)=\psi_\beta(x)+\int_y^1(\eta-x)^{-\beta}d\eta\int_x^\eta(\eta-\xi)^{\beta-\mu}f_s(\xi, \eta)\,d\xi=$$

$$=\psi_\beta(x)+\int_y^1(\eta-x)^{1-\mu}\,d\eta\int_0^1 t^{\beta-\mu}f_s(\eta-\eta t+xt, \eta)\,dt.$$

Из (9), согласно (8), заключаем, что задача I эквивалентна интегральному уравнению Вольтерра третьего рода

$$x^\alpha\varphi(x)-\lambda\int_0^x\frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}=x^\beta\varphi_0'(x), \tag{12}$$

где $\alpha=1+\beta-\mu$.

Рассмотрим теперь задачу II в предположении, что

1) $L=\{L^\beta\}$, $L^\beta\equiv E(0, \beta)$, $\beta>1$, $D(L)=D(0, \beta)$;

2) f_β — заданная функция из $f\in C(\bar\Omega)$;

3) B — пространство функций $u(x, y)$ из $D(L)$, удовлетворяющих условиям

$$u(x, 1)=\psi_\beta(x),\quad \lim_{y\to x}(y-x)^\varepsilon u(x, y)=\tau(x),\quad 0<x<1,$$

где ε — заданное положительное число, а $\psi_\beta(x)$ и $\tau(x)$ — заданные функции из классов $C(0\leqslant x<1)$ и $C(0\leqslant x\leqslant 1)$ соответственно, причем $\tau(x)\neq 0$ при $0<x<1$.

Очевидно, задача II в такой постановке всегда разрешима и притом единственным образом.

Действительно, из формулы (10) заключаем, что

$$\lim_{y\to x}(y-x)^\varepsilon u(x, y)=-\lim_{y\to x}(y-x)^{\varepsilon+1-\beta}\times$$

$$\times \int\limits_0^{(1-y)/(1-x)} \left[\eta^\beta \varphi_0'(\eta) + \int\limits_0^x (\eta-\xi)^{\beta-\mu} f_\beta(\xi, \eta)\, d\xi\right] (1-t)^{\beta-2}\, dt.$$

Стало быть $\beta = 1+\varepsilon$, а

$$x^\beta \varphi_0'(x) = -\varepsilon\tau(x) - \int\limits_0^x (x-\xi)^{\beta-\mu} f_\beta(\xi, x)\, d\xi.$$

Следовательно,

$$u(x, y) = \psi_\beta(x) + \varepsilon \int\limits_y^1 \tau(\eta)(\eta - x)^{-1-\varepsilon}\, d\eta +$$

$$+ \int\limits_y^1 (\eta - x)^{-1-\varepsilon}\, d\eta \int\limits_0^\eta (\eta-\xi)^{1+\varepsilon-\mu} f_\beta(\xi, \eta)\, d\xi -$$

$$- \int\limits_y^1 (\eta - x)^{-1-\varepsilon}\, d\eta \int\limits_0^x (\eta-\xi)^{1+\varepsilon-\mu} f_\beta(\xi, \eta)\, d\xi.$$

Исследуем еще один из возможных вариантов задачи I, а именно случай, когда

1) $L^\beta \equiv E(1, 1)$, $D(L) = D(1, 1)$;

2) B — пространство функций $u(x, y)$ из $D(L) \cap C(\overline{\Omega})$, удовлетворяющих краевым условиям

$$u(0, x) = \varphi_1(x), \quad u(x, x) = \tau(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

где $\varphi_1(x)$ и $\tau(x)$ — заданные функции из класса $C^1(0 \leqslant x \leqslant 1)$;

3) f — пространство функций f_s, представимых в виде (9).

Покажем, что в рассматриваемом случае задача I эквивалентна уравнению Вольтерра третьего рода

$$x^{2-\mu}\varphi(x) - \lambda \int\limits_0^x (x-\xi)^{1-\mu}\varphi(\xi)\, d\xi = [x\varphi_1(x)]' - \tau(x). \tag{13}$$

Действительно, при $\beta = \beta' = 1$ из (7) имеем

$$(y-x)u = y\varphi_1(y) + (1-x)u_1(x) - u_1(0) - \int\limits_0^x d\xi \int\limits_y^1 (\eta-\xi)^{1-\mu} f_s(\xi, \eta)\, d\eta.$$

Очевидно, $u \in C(\overline{\Omega})$ тогда и только тогда, когда

$$(1-x)u_1(x) - u_1(0) = \int\limits_0^x d\xi \int\limits_x^1 (\eta-\xi)^{1-\mu} f_s(\xi, \eta)\, d\eta - x\varphi_1(x).$$

Поэтому

$$(y-x)u = y\varphi_1(y) - x\varphi_1(x) + \int\limits_0^x d\xi \int\limits_x^y (\eta-\xi)^{1-\mu} f_s(\xi, \eta)\, d\eta =$$

$$= (y-x)\int\limits_0^1 \left\{[\eta\varphi_1(\eta)]' + \int\limits_0^x (\eta-\xi)^{1-\mu} f_s(\xi, \eta)\, d\xi\right\} dt,$$

где $\eta = x + (y-x)t$. Следовательно,

$$\int\limits_0^x (x-\xi)^{1-\mu} f_s(\xi, x)\, d\xi = \tau(x) - [x\varphi_1(x)]'. \tag{14}$$

Из (14) с учетом (9), где $\beta = 1$, получаем (13).

В заключение этого параграфа отметим, что задачи типа I и II возникают и при исследовании принадлежности решения задачи E [14] (по терминологии М. В. Келдыша) наперед заданным функциональным пространствам, например, пространствам С. Л. Соболева [15] $W_2^k(\Omega)$, $k=0, 1, \ldots$, для уравнения

$$y^m u_{yy} + u_{xx} + a(x, y) u_x + b(x, y) u_y + c(x, y) u = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega.$$

Обратные задачи типа I и II возникают также и при исследовании задачи Трикоми в ее классической постановке [16] для уравнения смешанного типа с непрерывными коэффициентами, когда многообразие изменения типа является характеристическим, или для уравнения вида (2) особенно тогда, когда нарушено условие $1/2-m \leqslant \alpha < 1$ А. В. Бицадзе [1].

§ 2. К ТЕОРИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА ТРЕТЬЕГО РОДА И СВЯЗАННЫХ С НИМИ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

В этом параграфе в основном будет исследован вопрос о спектре и разрешимости уравнения (12), ограничиваясь наиболее интересным случаем, когда $0<\alpha<1$.

Примем следующие обозначения:

$$D_{ax}^l f \equiv \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(-l)} \displaystyle\int_a^x \dfrac{f(t)\,dt}{(x-t)^{1+l}}, & l<0 \\ \dfrac{d}{dx} D_{ax}^{l-1} f, & l>0 \end{cases} \qquad (a<x);$$

$$D_{xb}^l f \equiv \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(-l)} \displaystyle\int_x^b \dfrac{f(t)\,dt}{(t-x)^{1+l}}, & l<0 \\ -\dfrac{d}{dx} D_{xb}^{l-1} f, & l>0 \end{cases} \qquad (x<b).$$

Операторы D_{ax}^l и D_{xb}^l являются операторами дробного интегрирования порядка $-l$ при $l<0$ и дробного дифференцирования порядка l при $l>0$. Хорошо известно, что

$$D_{ax}^{-l} D_{ax}^l \varphi = \varphi, \quad (\varphi, D_{ax}^l \psi)_0 = (\psi, D_{xb}^l \varphi)_0,$$

где $(\cdot, \cdot)$ означает скалярное произведение в пространстве $L_2[a, b]$.

Ниже понадобится следующий весьма простой *принцип экстремума для оператора D_{ax}^l дробного дифференцирования.*

Пусть неубывающая, неотрицательная функция $\omega(t) \neq 0$ и функция $f(t)$ принадлежат классу $C(a \leqslant t \leqslant x)$ и в сколь угодно малой окрестности $a<\delta \leqslant t \leqslant x$ точки $t=x$ произведение $\omega(t) f(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $h>l$. Тогда *если на сегменте $a \leqslant t \leqslant x$ функция $f(t)$ достигает положительного максимума (отрицательного минимума)* *в точке* $t = x$, *то* $D^l_{ax}\omega f > 0$ (< 0) *для любого* $l > 0$. Это утверждение является тривиальным следствием легко проверяемого тождества

$$\Gamma(1-l)\, D^l_{ax}\omega f = \frac{\omega(x) f(x)}{(x-a)^l} + l \int\limits_a^\delta \frac{\omega(x) f(x) - \omega(t) f(t)}{(x-t)^{1+l}}\, dt +$$

$$+ l \int\limits_\delta^x \frac{\omega(x) f(x) - \omega(t) f(t)}{(x-t)^{1+l}}\, dt.$$

Принцип экстремума для оператора D^l_{ax} (и D^l_{xb} с соответствующими изменениями) широко. используется при доказательстве хорошо известного принципа экстремума А. В. Бицадзе [17, 18,1] для уравнений смешанного типа.

Рассмотрим *интегро-дифференциальное уравнение с дробными производными порядка* α, $0 < \alpha < 1$

$$D_\alpha \varphi \equiv D^\alpha_{0x} x^\beta \varphi + a_j(x) D^{\alpha_j}_{0x} \varphi + b(x)\varphi = c(x), \quad 0 < x < 1, \tag{15}$$

где $\beta \geqslant 0$, $0 \neq \alpha_j < \alpha$ и по повторяющемуся индексу j подразумевается суммирование от 1 до m.

Относительно коэффициентов и правой части уравнения (15) будем предполагать, что $a_j(x) \in C^1(\bar{J})$ при $\alpha_j > 0$, $a_j(x) \in C(\bar{J})$ при $\alpha_j < 0$, а $b(x)$ и $c(x)$ принадлежат $C(\bar{J})$, где J — интервал $0 < x < 1$.

Через $C_\gamma(J)$ обозначим банахово пространство функций $\varphi(x) \in C(0 < < x \leqslant 1)$ с конечной нормой

$$\|\varphi\|_\gamma = \max_{\bar{J}} |x^\gamma \varphi(x)|, \quad \gamma \equiv \text{const},$$

а через $a_i(x)$ — первый отличный от тождественного нуля коэффициент уравнения (15). Уравнение

$$D^*_\alpha \psi \equiv x^\beta D^\alpha_{x1} \psi + D^{\alpha_j}_{x1} a_j \psi + b(x)\psi = c^*(x) \tag{15*}$$

сопряжено с уравнением (15) в том смысле, что

$$(\psi,\ D_\alpha \varphi)_{L_2(J)} = (\varphi,\ D^*_\alpha \psi)_{L_2(J)}, \quad \forall\, \varphi,\ \psi \in L_2(J).$$

Легко видеть, что *уравнение (15*) в классе* $C(0 < x \leqslant 1)$ *имеет не более одного решения.*

В силу принципа экстремума для дробной производной имеет место следующее утверждение.

Пусть

$$a_j(x) \geqslant 0,\ \forall j,\ b(x) \geqslant 0,\ 0 < x < 1,\ \alpha_m > 0$$

и $\varphi(x)$ — *решение уравнения* $D_\alpha \varphi = 0$ *из пространства* $C_0(J)$, *удовлетворяющее условию Гёльдера порядка* $h > \alpha$ *в интервале* J. *Тогда положительный максимум и отрицательный минимум функции* $\varphi(x)$ *в* $\bar{J}$ *достигается лишь в точке* $x = 0$.

Следовательно, если $\alpha > \beta$, то в классе функций $\varphi(x)$, для которых $D^\alpha_{0x} x^\beta \varphi \in C_0(J) \equiv C(\bar{J})$, уравнение (15) не может иметь более одного решения.

Нетрудно показать, что *если*

$$\beta < \alpha - \alpha_i H(\alpha_i), \tag{16}$$

где $H(x)$ — функция Хевисайда, *то для любой правой части* $c(x) \in C_0(J)$ *существует и притом единственное решение уравнения* (*15*) из пространства $C_\beta(J)$.

Действительно, непосредственным вычислением можно убедиться, что выражение $D_{0x}^{-\alpha} a_j D_{0t}^{\alpha_j} \varphi$ при $\alpha_j < 0$ равно

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(-\alpha_j)} \int\limits_0^x \frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha+\alpha_j}} \int\limits_0^1 \frac{a_j[t+(x-t)\xi]\,d\xi}{\xi^{1+\alpha_j}(1-\xi)^{1-\alpha}},$$

а при $\alpha_j > 0$ равно

$$\frac{-1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha_j)} \int\limits_0^x \varphi(t)\,dt \frac{d}{dt}(x-t)^{\alpha-\alpha_j} \int\limits_0^1 \frac{a_j[t+(x-t)\xi]\,d\xi}{\xi^{\alpha_j}(1-\xi)^{1-\alpha}}.$$

Принимая это во внимание, убеждаемся в эквивалентности уравнения (15) интегральному уравнению Вольтерра третьего рода

$$x^\beta \varphi(x) - \int\limits_0^x \frac{k_i(x,t)}{(x-t)^{\beta_i}} \varphi(t)\,dt = D_{0x}^{-\alpha} c,$$

где $\beta_i = 1 - \alpha + \alpha_i H(\alpha_i)$, а $k_i(x, t)$ зависит лишь от $a_j(x)$, $b(x)$ и принадлежит $C(\bar{J} \times \bar{J})$.

По стандартной схеме (см., например, [19], стр. 81 и 26) можно показать существование такого натурального числа n, что n-я степень оператора

$$A_i \psi \equiv \int\limits_0^x \frac{k_i(x,t)}{t^\beta (x-t)^{\beta_i}} \psi(t)\,dt,$$

отображающего пространство $C_0(J)$ в себя, является сжатым. Это и доказывает справедливость сделанного выше утверждения.

При *нарушении условия* (*16*) *на однозначную разрешимость уравнения* (*15*) *существенную роль оказывают коэффициенты этого уравнения.*

Остановимся более подробно на уравнении

$$D_{0x}^\alpha x^\alpha \varphi - \lambda \Gamma(\alpha) \varphi = c(x), \tag{17}$$

которое является простой моделью уравнений с дробными производными, когда порядок вырождения β совпадает с порядком α самого уравнения.

Уравнение (17) редуцируется к уравнению такого же рода, что и (11), (13). А именно к уравнению вида

$$x^\alpha \varphi(x) - \lambda \int\limits_0^x \frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}} = f(x). \tag{18}$$

Уравнение (18) было объектом исследования многих авторов [20—25].

Если $\lambda \leqslant 0$, то из установленного выше принципа экстремума следует, что однородное уравнение

$$V_\alpha \varphi \equiv x^\alpha \varphi(x) - \lambda \int_0^x \frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}} = 0 \tag{19}$$

в классе функций $\varphi(x)$, принадлежащих $C_0(J)$ и удовлетворяющих при $0 < x \leqslant 1$ условию Гёльдера с показателем $h > \alpha$, имеет лишь тривиальное решение.

Для любой непрерывной функции $\varphi(x)$, интегрируемой в интервале J, справедливо неравенство

$$(\varphi,\ D_{0x}^{-\alpha}\varphi)_0 = \int_0^1 \varphi(x)\, D_{0x}^{-\alpha}\varphi dx \geqslant 0, \tag{20}$$

которое доказывается буквально также, как и в [12] (см. стр. 385), где рассмотрен случай $\alpha = 2/3$ и которое показывает положительную определенность оператора дробного интегрирования $D_{0x}^{-\alpha}$.

Из (20) следует, что при $\lambda < 0$

$$\|x^{\alpha/2}\varphi\|_{L_2(J)} \leqslant c\, \|x^{-\alpha/2} V_\alpha \varphi\|_{L_2(J)},$$

где c, не зависящая от φ, положительная постоянная.

Следовательно, *в пространстве функций* $\varphi(x)$ *с конечной нормой, равной* $\|x^{\alpha/2}\varphi\|_{L_2(J)}$, *уравнение (19) не имеет решений, отличных от тривиального.*

Очевидно, для любого λ уравнение

$$V_\alpha^* \psi \equiv x^\alpha \psi(x) - \lambda \int_x^1 \frac{\psi(t)\,dt}{(t-x)^{1-\alpha}} = f^*(x), \tag{21}$$

сопряженное с уравнением (18) в классе $C\,(0 < x \leqslant 1)$, имеет не более одного решения.

Обозначим через Λ множество положительных чисел λ, а через Σ множество чисел $\sigma > -1$. Легко видеть, что уравнение

$$\lambda B(\sigma + 1,\ \alpha) = 1, \tag{22}$$

где $B(\sigma+1,\ \alpha) = \int_0^1 t^\sigma (1-t)^{\alpha-1} dt$ — бета функция, устанавливает взаимнооднозначное соответствие между Λ и Σ. Это очевидно, поскольку

$$\frac{d}{d\sigma} \mathrm{B}(\sigma+1,\ \alpha) = \int_0^1 t^\sigma (1-t)^{\alpha-1} \log t dt \leqslant 0,$$

$$\lim_{\sigma\to-1} \mathrm{B}(\sigma+1,\ \alpha) = +\infty, \quad \lim_{\sigma\to+\infty} \mathrm{B}(\sigma+1,\ \alpha) = 0, \quad \mathrm{B}(1,\ \alpha) = 1/\alpha.$$

Имеет место следующая

Теорема 4. *Для любого $\lambda \in \Lambda$ существует число $\sigma \in \Sigma$ такое, что функции $\varphi(x) = cx^\sigma$, где c — произвольная постоянная, в пространстве $C_{-\sigma}(J)$ образуют собственные функции уравнения (19) или, что одно и то же, оператора $1/\Gamma(\alpha)\, D_{0x}^\alpha x^\alpha$. В пространстве $C_{-\sigma}(J)$ все собственные значения уравнения (19) являются простыми.*

Эта теорема была доказана в работах [23—25] в основном в случае, когда $-1 < \sigma < 0$, т. е. $0 < \lambda < \alpha$. Дадим очень простое доказательство теоремы 4 в общем случае. Первая часть является тривиальной; число σ находится как решение трансцендентного уравнения (22).

Допустим, что собственному значению $\lambda = 1/\mathrm{B}(\sigma+1, \alpha)$ в пространстве $C_{-\sigma}(J)$ помимо функций $\varphi_\sigma = x^\sigma$ соответствует еще одна собственная функция $\varphi_1(x) \in C_{-\sigma}(J)$, линейно независимая с φ_σ. Тогда очевидно $\varphi_1(x) = x^\sigma \omega_1(x)$, где $\omega_1(x) \in C_0(J)$ и функция

$$\varphi(x) = x^\sigma \omega(x), \quad \omega(x) = \left(\|\omega_1\|_0 - \omega_1(x) + 1\right) / \left(\|1 + \|\omega_1\|_0 - \omega_1(x)\|_0\right)$$

также будет собственной функцией, соответствующей собственному значению λ. Так как

$$x^{\alpha+\sigma}\left[1-\omega(x)\right] = \lambda \int_0^x \frac{t^\sigma\left[1-\omega(t)\right]dt}{(x-t)^{1-\alpha}} = \lambda x^{\alpha+\sigma} \int_0^1 \frac{t^\sigma\left[1-\omega(tx)\right]}{(1-t)^{1-\alpha}}dt \geqslant$$

$$\geqslant \lambda\mu x^{\alpha+\sigma}, \quad \mu = \min_{J} \int_0^1 \frac{t^\sigma\left[1-\omega(tx)\right]}{(1-t)^{1-\alpha}}dt > 0,$$

то $\omega(x) \leqslant 1 - \lambda\mu$. А это противоречит равенству $\|\omega\|_0 = 1$.

Остается теперь показать, что уравнение $A^n\varphi = 0$, $A \equiv x^{-\alpha}V_\alpha$ при любом $n = 2, 3, \ldots$ в пространстве $C_{-\sigma}(J)$ не имеет собственных функций, отличных от собственных функций уравнения $A\varphi = 0$, соответствующих собственному значению $\lambda = 1/\mathrm{B}(\sigma+1, \alpha)$.

Пусть существует такое n, что $A^n\varphi = 0$ и $A\varphi \neq 0$. Тогда найдется такое $m \geqslant 2$, что $A^m\varphi = 0$, $A^{m-1}\varphi \neq 0$. Так как $AA^{m-1}\varphi = 0$, то $AA^{m-2}\varphi = cx^\sigma$, где $c = \mathrm{const} \neq 0$. Функция $\psi(x) = A^{m-2}\varphi$—решение уравнения $A\psi = cx^\sigma$ из пространства $C_{-\sigma}(J)$. Отсюда, принимая во внимание, что $\psi(x)$ представима в виде $\psi(x) = x^\sigma\omega(x)$, где $\omega(x) \in C_0(J)$ для $\omega(x)$, получаем уравнение

$$cx^\sigma = x^\sigma\omega(x) - \frac{\lambda}{x^\alpha}\int_0^x \frac{t^\sigma\omega(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}$$

или

$$c = \omega(x) - \lambda\int_0^1 \omega(xt)\,t^\sigma(1-t)^{\alpha-1}\,dt. \tag{23}$$

Следовательно, $c = \omega(0)\left[1 - \lambda\mathrm{B}(\sigma+1, \alpha)\right] = 0$, что противоречит нашему допущению.

Таким образом, в указанных выше пространствах спектр оператора $1/\Gamma(\alpha)\,D_{0x}^\alpha\, x^\alpha$ (уравнения (19)) совпадает с Λ.

Из спектральной теории в силу единственности решения сопряженного уравнения (21) следует безусловная разрешимость (в соответствующих пространствах) уравнения (18) для всех $\lambda \bar{\in} \Lambda$.

Предположив, что $\lambda = 1/\mathrm{B}(\sigma+1, \alpha)$ является собственным значением оператора $\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}D_{0x}^\alpha\, x^\alpha$, рассмотрим *одноточечную видоизмененную задачу*

$$\lim_{x\to 0} x^{-\sigma}\varphi(x) = 0 \tag{24}$$

для уравнения

$$\varphi(x) - V\varphi = f(x), \tag{25}$$

где

$$V\varphi \equiv \frac{\lambda}{x^\alpha} \int_0^x \frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}.$$

Поскольку $\|V\varphi\|_{-\gamma} \leqslant q \|\varphi\|_{-\gamma}$, где $q = \dfrac{\mathrm{B}(\gamma+1,\ \alpha)}{\mathrm{B}(\sigma+1,\ \alpha)} < 1$, $\forall \gamma > \sigma$, то для любой правой части $f(x) \in C_{-\gamma}(J)$ существует и притом единственное решение задачи (24), (25) из пространства $C_{-\gamma}(J)$, где $\gamma > \sigma$.

Литература

1. Бицадзе А. В. К теории одного класса уравнения смешанного типа. Некоторые проблемы математики и механики. Л., «Наука», 1970, стр. 112—119.
2. Бицадзе А. В. К теории уравнений смешанного типа, порядок которых вырождается вдоль изменения типа. М., 1972, стр. 48—52.
3. Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Васильев В. Г. Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений. «Наука», 1969.
4. Прилепко А. И. О некоторых интегральных уравнениях первого рода обратных задач. Применение функциональных методов к краевым задачам математической физики. Новосибирск, 1972, стр. 199—205.
5. Прилепко А. И. ДАН СССР, **139**, 6, 1961.
6. Исаков В. М. Дифференц. уравнения, **9**, № 1, 1973.
7. Jones B. G. J. of Math. and Mech., 11, 907—918, 1962.
8. Jones B. G. Com. on Pure and Applied Math., 16, 1, 1963.
9. Connon J. R. Duke Math. J., 30, 2, 313—323, 1963.
10. Connon J. R. J. of Math. analysis and Applications, 8, 2, 188—201, 1964.
11. Darboux G. Lecons sur la theorie generale des surfaces et les applications geometriques du calcul infinitesimal, Paris, 1889.
12. Трикоми Ф. Лекции по уравнениям в частных производных. М., ИЛ, 1957.
13. Кальменов Т. Ш. Дифференц. уравнения, **9**, № 1, 1973.
14. Келдыш М. В. ДАН СССР, **77**, 2, 1951.
15. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Изд. СО АН СССР, Новосибирск, 1962.
16. Трикоми Ф. О линейных уравнениях смешанного типа. М.—Л., Гостехиздат, 1947.
17. Бицадзе А. В. Уравнения смешанного типа. М., Изд-во АН СССР, 1959.
18. Смирнов М. М. Уравнения смешаного типа. М., «Наука», 1970.
19. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., «Наука», 1968.
20. Holmgren E. Arkif för mat., astz. och. fysik, 16, 5, 1—20.
21. Brawne P. I. Comptes Rendues, Ac. Sc., Paris, 158, 1562—1565, 1914.
22. Титчмарш Е. Ввведение в теорию интегралов Фурье. Гостехиздат, М.—Л., 1948.
23. Михайлов Л. Г. Новый класс особых интегральных уравнений и его применения к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами. Душанбе, Изд-во АН ТаджССР, 1963.
24. Михайлов М. Г. Интегральное уравнение с ядром однородным степени-1. Душанбе, «Донии», 1966.
25. Стеценко В. Я. О простоте максимального собственного значения одного интегрального оператора. Исследования по краевым задачам теории функций и дифференциальных уравнений. Душанбе, 1964, стр. 133.
26. Гурса Э. Курс математического анализа, **3**. М.—Л., 1939.

Поступила в редакцию
3 июля 1973 г.

Институт математики
СО АН СССР