

# СТРУЙНОЕ ОБТЕКАНИЕ СИСТЕМЫ ДВУХ ПРЕПЯТСТВИЙ

А. Г. ТЕРЕНТЬЕВ

## Введение

Существуют различные методы для решения задач отрывного обтекания тел потенциальным потоком идеальной жидкости. Эти методы достаточно хорошо изложены в монографии М. И. Гуревича [1]: Идея основных методов заключается в нахождении параметрической зависимости функции комплексного потенциала  $W = \varphi + i\psi$  и функции комплексной скорости  $\frac{dW}{dz} = V \cdot e^{-i\theta}$ . Простота решения задач зависит в основном от того, как удачно выбрана вспомогательная область, в которой изменяется параметрическая переменная  $u$ . Причем за вспомогательную область можно брать в зависимости от конкретных задач различные области, как-то: верхняя полуплоскость, полуокружность, прямоугольник и др.

Таким образом, каждая задача имеет, по существу, свой метод решения, заключающийся в выборе параметрической области и в нахождении в этой области вышеуказанных функций.

В 1890 г. Н. Е. Жуковским [2] было впервые дано общее решение большого класса задач струйного обтекания препятствий, состоящих из прямолинейных участков. За параметрическую область он избрал верхнюю полуплоскость.

Метод Н. Е. Жуковского теоретически позволяет решить любую задачу о струйном обтекании препятствий, состоящих из прямолинейных участков. Однако практическое применение его метода приводит часто к очень сложным вычислениям и к решению системы большого количества уравнений.

В настоящей работе предлагается общее решение задач струйного обтекания системы двух препятствий, состоящих из прямолинейных участков и двух свободных поверхностей. Решение заключается в отыскании производной комплексного потенциала  $\frac{dW}{du}$  и безразмерной комплексной скорости  $\frac{dW}{V_1 dz}$  в прямоугольнике со сторонами  $\omega$  и  $\omega'/i$ . Искомые функции записываются в простом виде через известные тэта-функции. При помощи формул для функций  $\frac{dW}{du}$  и  $\frac{dW}{V_1 dz}$ , решаются две задачи струйного обтекания препятствий.

## I. Общее решение задачи

§ 1. Рассмотрим струйное обтекание потенциальным потоком несжимаемой и невесомой жидкости системы двух препятствий, состоящих из прямолинейных участков. Пусть область течения в физической плоскости  $z = x + iy$  ограничена двумя твердыми и двумя свободными поверхностями: причем, бесконечно удаленная точка

находится на границе области. На участках границы, соответствующих твердым поверхностям, будет известен аргумент комплексной скорости  $\frac{dW}{dz}$ , а на остальных участках границы, соответствующих свободным поверхностям, известен ее модуль. Кроме того, будем считать, что на одной из свободных поверхностей скорость равна  $V_1$ , а на другой —  $V_2$ .

Пусть  $u = \xi + i\eta$  — параметрическая переменная, изменяющаяся внутри прямоугольника  $ABCD$  со сторонами  $\omega$  и  $\omega'/i$  (рис. 1). Точки  $M_1, M_2, M_3, M_4$ , лежащие соответственно на сторонах  $AB, BC, CD$  и  $DA$  будут иметь координаты  $M_1(\xi, 0), M_2(\omega, \eta), M_3(\xi, \omega'/i)$  и  $M_4(0, \eta)$ .

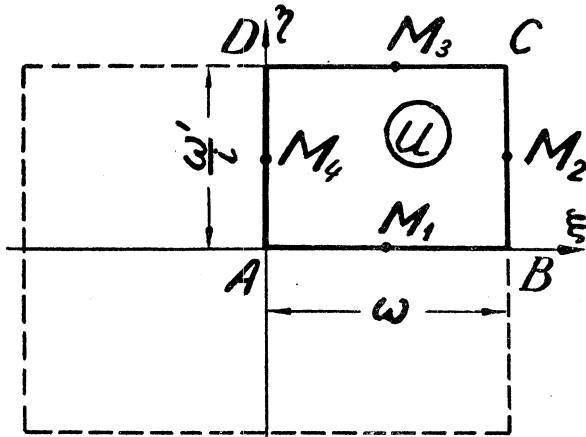


Рис. 1.

Отобразим область течения в физической плоскости на внутренность прямоугольника  $ABCD$  плоскости  $u$  так, чтобы твердым поверхностям физической плоскости соответствовали горизонтальные стороны прямоугольника, а границам струй — вертикальные стороны.

Рассмотрим комплексный потенциал  $W = \varphi + i\psi$  и безразмерную комплексную скорость  $\chi = \frac{dW}{V_1 dz} = \frac{V}{V_1} e^{-bi}$ . Будем искать эти функции внутри прямоугольника  $ABCD$ . Относительно функции  $W$  и  $\chi$  считаем, что они внутри прямоугольника  $ABCD$  конечны, однозначны и могут обращаться в бесконечность и изменяться скачком только при обходе по бесконечно малым полуокружностям некоторых точек, лежащих на сторонах прямоугольника, или при обходе по бесконечно малым четверть-окружностям некоторых его угловых точек. Кроме того, на функцию  $W(u)$  налагаем условие, чтобы на сторонах прямоугольника ее мнимая часть  $\psi$  была кусочно постоянная, а на функцию  $\chi(u)$  — то условие, чтобы на боковых сторонах прямоугольника был постоянен ее модуль (на стороне  $AD$   $|\chi| = 1$ , и на  $BC$   $|\chi| = \frac{V_2}{V_1}$ ), а на горизонтальных — кусочно постоянен ее аргумент  $\theta$ .

Нетрудно видеть, что функция  $W(u)$  и  $\chi(u)$  будут давать параметрическое решение поставленной задачи.

§ 2. Функцию  $W(u)$  будем считать комплексным потенциалом течения в области параметрического переменного с источниками-стоками и диполями, расположенными на границах прямоугольника. Легко заметить, что источники и стоки соответствуют струям конечного расхода в физической плоскости. Если имеется струя с бесконечным расходом жидкости, то в соответствующей точке  $u = u_\infty$

параметрической области будем иметь или полюс 1-го порядка, если поток ограничен одной линией тока, проходящей на конечном расстоянии от начала координат, или полюс 2-го порядка, если набегающий поток заполняет все пространство сверху донизу (см. [1]).

Так как границам прямоугольника соответствуют линии тока, вдоль которых  $\text{Im } dW = 0$ , то отсюда следует, что на горизонтальных сторонах прямоугольника функция  $\frac{dW}{du}$  действительна, а на вертикальных сторонах — чисто мнимая.

Продолжая функцию  $\frac{dW}{du}$  по принципу симметрии на всю плоскость, легко установить, что функция  $\frac{dW}{du}$  является двояко-периодической функцией с периодами  $2\omega$  и  $2\omega'$ . Причем, в параллелограмме периодов простыми нулями этой функции будут точки, соответствующие критическим точкам (точкам разветвления) и угловые точки прямоугольника, а простыми полюсами будут точки, соответствующие струям конечного расхода. В точке  $u = u_\infty$  будет полюс 2-го или 3-го порядка. Кроме того, соответствующие особенности будут в симметричных точках относительно осей параметрической плоскости.

Рассмотрим функцию

$$F(u) = \frac{\vartheta_1\left(\frac{u}{\omega}\right) \prod_i^P \vartheta_1\left(\frac{u-u_i}{2\omega}\right) \vartheta_1\left(\frac{u+u_i}{2\omega}\right)}{\vartheta_1^k\left(\frac{u-u_\infty}{2\omega}\right) \vartheta_1^k\left(\frac{u+u_\infty}{2\omega}\right) \prod_j^Q \vartheta_1\left(\frac{u-u_j}{2\omega}\right) \vartheta_1\left(\frac{u+u_j}{2\omega}\right)}, \quad (1.1)$$

где  $u_i$ ,  $u_j$  и  $u_\infty$  — точки, лежащие на сторонах прямоугольника  $ABCD$ , а буквы  $P$  и  $Q$  показывают количество всех сомножителей, входящих под знак произведения.

Нетрудно видеть, что функция  $F(u)$  имеет простые нули в точках  $n\omega + n'\omega'$ ;  $\pm u_i + 2\omega n + 2\omega'n'$ , полюсы  $k$ -го порядка в точках  $\pm u_\infty + 2\omega n + 2\omega'n'$  и простые полюса в точках  $\pm u_j + 2\omega n + 2\omega'n'$ , где  $n$  и  $n'$  — любые целые числа.

Простой подстановкой можно получить

$$F(u + 2\omega) = F(u),$$

$$F(u + 2\omega') = h^{-4-P+2k+Q} e^{-\frac{\pi}{\omega} i(4+P-2k-Q)} F(u).$$

Отсюда  $F(u + 2\omega') = F(u)$ , если осуществляется равенство  $4 + P - 2k - Q = 0$ , что соответствует равенству числа нулей числу полюсов в параллелограмме периодов. Легко также убедиться, что функция  $F(u)$  на горизонтальных сторонах прямоугольника принимает действительные значения, а на вертикальных сторонах — чисто мнимые.

Пусть искомая функция  $\frac{dW}{du}$  будет иметь в параллелограмме периодов нули и полюсы той же кратности, что и функция  $F(u)$ . Тогда функции  $\frac{dW}{du}$  и  $F(u)$  будут отличаться лишь постоянным множителем [6], т. е.

$$\frac{dW}{du} = N \cdot F(u). \quad (1.2)$$

§ 3. Вместо функции  $\chi(u)$ , рассмотрим производную логарифма этой функции  $\Omega' = \frac{d}{du} \ln \chi(u)$ . Нетрудно заметить, что функция  $\Omega'(u)$  принимает на сторонах прямоугольника  $ABCD$  действительное значение. Продолжая по принципу симметрии на всю плоскость, можно установить, что функция  $\Omega'(u)$  является двояко-периодической функцией с периодами  $2\omega$  и  $2\omega'$ . Установим особенности функции  $\Omega'(u)$ . Так как скорость может обращаться в нуль или в бесконечность в критических и угловых точках твердой поверхности, то функция  $\Omega'(u)$  будет иметь особенности только на горизонтальных сторонах прямоугольника  $ABCD$ . Пусть точке  $u = u_i$  соответствует на физической плоскости точка  $z = z_i$ , при обходе которой величина  $\theta$  изменяется на  $\pi x_i$ . Тогда разложение функции  $\Omega'(u)$  вблизи точки  $u = u_i$  будет иметь вид

$$\Omega'(u) = \frac{\frac{d}{du} \left( \frac{dW}{V_1 dz} \right)}{\frac{dW}{V_1 dz}} = \frac{x_i}{u - u_i} + \dots \quad (1.3)$$

Заметим, что  $x_i > 0$  соответствует угловой точке, в которой скорость обращается в нуль, а  $x_i < 0$  соответствует угловой точке, в которой скорость обращается в бесконечность [2].

На основании принципа симметрии, разложение  $\Omega'(u)$  в окрестности точки  $u = -u_i$ , симметричной относительно вертикальной оси  $\eta$ , должно иметь вид

$$\Omega'(u) = \frac{-x_i}{u + u_i} + \dots \quad (1.4)$$

Так как в окрестности точки  $u = 0$  разложение функции Вейерштрасса  $\zeta(u)$  имеет вид  $\zeta(u) = \frac{1}{u} + \dots$ , то учитывая (1.3) и (1.4) можно записать

$$\Omega' = A_1 + \sum_i x_i [\zeta(u - u_i) - \zeta(u + \bar{u}_i)], \quad (1.5)$$

где  $A_1$  — постоянная.

Интегрируя это равенство, найдем

$$\ln \frac{dW}{V_1 dz} = A_1 u + B_1 + \sum_i x_i [\ln \sigma(u - u_i) - \ln \sigma(u + \bar{u}_i)],$$

откуда

$$\frac{dW}{V_1 dz} = e^{A_1 u + B_1} \prod_i \frac{\sigma^{x_i}(u - u_i)}{\sigma^{x_i}(u + \bar{u}_i)}. \quad (1.6)$$

Постоянные  $A_1$  и  $B_1$  определяются из известных значений функции  $\frac{dW}{V_1 dz}$  в угловых точках  $B$  и  $C$ . Обозначая значение комплексной скорости в точках  $B$  и  $C$  соответственно через  $\frac{V_2}{V_1} e^{-\theta_B}$  и  $\frac{V_2}{V_1} e^{-\theta_C}$ , получим при помощи формулы (1.6) следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \ln \frac{V_2}{V_1} e^{-\theta_B} &= A_1 \omega - 2\eta_1 \left[ \sum_k \xi_k x_k + \sum_j \bar{\xi}_j x_j \right], \\ -\theta_{B'} &= B_1 + 2\eta_3 \sum_j \bar{\xi}_j x_j \end{aligned} \quad (1.7)$$

и

$$\ln \frac{V_2}{V_1} = A_1 \omega - 2\eta_1 \left[ \sum_k \xi_k x_k + \sum_j \bar{\xi}_j \bar{x}_j \right], \quad (1.8)$$

$$-\theta_{C^i} = A_1 \omega' + B_1 - 2\eta_3 \sum_k \xi_k x_k,$$

где

$$\eta_1 = \zeta(\omega) \text{ и } \eta_3 = \zeta(\omega').$$

Здесь  $\xi_k$  и  $\bar{\xi}_j$  — действительные положительные числа, выражающие расстояния соответствующих точек от стороны  $AD$ . Черта показывает, что точка  $u_j$ , при обходе которой аргумент  $\theta$  изменяется на  $\pi x_j$ , находится на стороне  $CD$ .

Исключая из (1.7) и (1.8) постоянные  $A_1$  и  $B_1$ , получим соотношение, связывающее параметры  $\xi_k$  и  $\bar{\xi}_j$ .

$$\frac{\pi}{\omega} \left( \sum_k \xi_k x_k + \sum_j \bar{\xi}_j \bar{x}_j \right) = \theta_B - \theta_C + i \frac{\omega'}{\omega} \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (1.9)$$

Перейдем в выражении (1.6) к тэта-функциям. Используя соотношение Лежандра  $\eta_1 \omega' - \eta_3 \omega = \frac{\pi}{2} i$  и уравнения (1.7) и (1.8), после

несложного преобразования, функцию  $\frac{dW}{V_1 dz}$  можно привести к виду

$$\frac{dW}{V_1 dz} = \left( \frac{V_2}{V_1} \right)^{\frac{u}{\omega}} e^{-\theta_B i} \prod_k \frac{\vartheta_1^{x_k} \left( \frac{u - \xi_k}{2\omega} \right)}{\vartheta_1^{x_k} \left( \frac{u + \xi_k}{2\omega} \right)} \prod_j \frac{\vartheta_4^{\bar{x}_j} \left( \frac{u - \bar{\xi}_j}{2\omega} \right)}{\vartheta_4^{\bar{x}_j} \left( \frac{u + \bar{\xi}_j}{2\omega} \right)}. \quad (1.10)$$

Формулы (1.2) и (1.10) решают в общем виде задачу о струйном обтекании системы двух препятствий, состоящих из прямолинейных участков. Линейные величины можно определить путем интегрирования уравнения

$$dz = \frac{1}{V_1} \cdot \frac{dW}{\frac{dW}{V_1 dz}} du. \quad (1.11)$$

§ 4. Определим вектор силы, действующей на элемент твердой поверхности, обтекаемой с отрывом струй.

Пусть  $ds = |dz|$  — дифференциал дуги вдоль твердой поверхности. Пусть далее  $p'$  — давление в каверне, граничащей с данной твердой поверхностью. Тогда разность давлений, действующих на обе стороны бесконечно малого элемента контура  $ds$  будет равна  $(p - p') ds$ . Сила эта направлена по нормали к контуру. Так как вектор  $dz$  касателен к контуру, то вектор  $-idz$  будет направлен по указанной нормали. Вектор силы, действующий на элемент  $ds$ , будет равен

$$dX + idY = -idz(p - p'). \quad (1.12)$$

Отсюда, пользуясь интегралом Бернулли, получим

$$dX + idY = -idz \frac{\rho}{2} (V'^2 - V^2).$$

Используя соотношение  $V^2 = \frac{dW}{dz} \cdot \overline{\frac{dW}{dz}}$  и учитывая, что на твердой поверхности  $dW = \overline{dW}$ , можно записать [1]

$$dX + idY = -i \frac{\rho}{2} \left( V^2 dz - \overline{\frac{dW}{dz} dW} \right). \quad (1.13)$$

Вектор силы, действующий на какой-либо участок твердой поверхности, легко находится интегрированием выражения (1.13) вдоль этой поверхности.

## II. Задача о струйном обтекании системы двух пластин

§ 1. Рассмотрим задачу об обтекании с отрывом струй системы двух пластин (рис. 2). Примем, что одна пластина расположена перпендикулярно к потоку и обтекается с отрывом струй, вторая — составляет угол  $\alpha$  с направлением скорости набегающего потока и глассирует по одной из свободных поверхностей. Вперед по глассирующей поверхности уходит струйка, которая попадает на второй

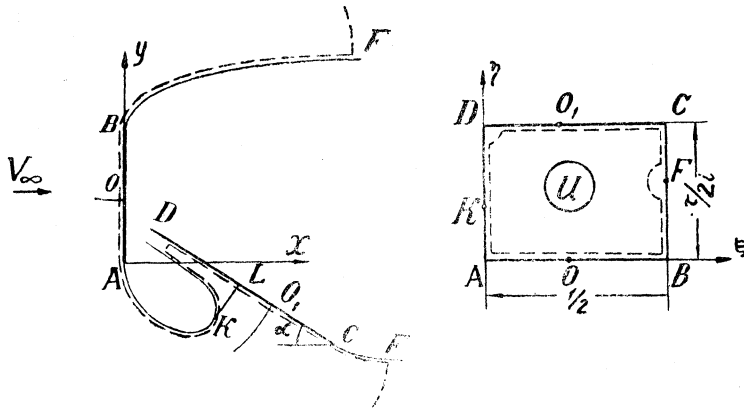


Рис. 2.

лист римановой поверхности. Скорость потока на бесконечности и на свободных поверхностях будем считать известной и равной  $V_\infty$ . Через  $l$  и  $z_c = x_c + iy_c$  обозначим, соответственно, ширину пластинки  $AB$  и координаты точки  $C$ . Система координат выбрана таким образом, чтобы ось  $x$  была параллельна направлению скорости невозмущенного потока.

Рассмотрим параметрическую переменную, изменяющуюся в прямоугольнике  $ABCD$  со сторонами  $1/2$  и  $\tau/2i$ . Соответствующие точки в физической и параметрической области обозначены на рис. 2 одинаковыми буквами. Нетрудно видеть, что функция  $\frac{dW}{du}$  будет иметь в точке  $F(u = \frac{1}{2} + \bar{\eta}_\infty i)$  полюс 3-го порядка, в точке  $D(u = \frac{\tau}{2})$  полюс 1-го порядка и в точках  $O(u = \xi_1)$  и  $O_1(u = \frac{\tau}{2} + \bar{\xi}_1)$  нули 1-го порядка. Кроме того аргумент  $\theta$  при обходе точек  $O$  и  $O_1$  изменяется на  $\pi$ , т. е.  $z_1 = -\bar{z}_1 = 1$ .

Полагая в формулах (1.2) и (1.10)  $2\omega = 1$ ,  $k = 3$  и  $x_1 = \bar{x}_1 = 1$  и учитывая вышеуказанные особенности, легко можно представить функции  $\frac{dW}{du}$  и  $\frac{dW}{V_\infty dz}$  в виде:

$$\frac{dW}{du} = N \frac{\vartheta_1(2u) \vartheta_1(u - \xi_1) \vartheta_1(u + \xi_1) \vartheta_4(u - \bar{\xi}_1) \vartheta_4(u + \bar{\xi}_1)}{\vartheta_4^2(u) \vartheta_2^3(u - \bar{\eta}_\infty i) \vartheta_2^3(u + \bar{\eta}_\infty i)} \quad (2.1)$$

и

$$\frac{dW}{V_\infty dz} = e^{-\frac{\pi}{2}i} \frac{\vartheta_1(u - \xi_1) \vartheta_4(u - \bar{\xi}_1)}{\vartheta_1(u + \xi_1) \vartheta_4(u + \bar{\xi}_1)} \quad (2.2)$$

Общее решение кинематической части задачи, определяемое в параметрической форме формулами (2.1) и (2.2) содержит пять постоянных  $N$ ,  $\tau$ ,  $\xi_1$ ,  $\bar{\xi}_1$  и  $\bar{\eta}_\infty$ . Для их определения необходимо иметь систему пяти уравнений. Соотношение (1.9) дает нам одно уравнение, связывающее  $\xi_1$  и  $\bar{\xi}_1$

$$\xi_1 + \bar{\xi}_1 = \frac{1}{4} + \frac{\alpha}{2\pi}. \quad (2.3)$$

Дополнительные уравнения можно получить, используя следующие условия:

1) Условие для направления скорости жидкости на бесконечности в точке  $F(u = \frac{1}{2} + \bar{\eta}_\infty i)$

$$\frac{\vartheta_2(\xi_1 - \bar{\eta}_\infty i) \vartheta_3(\bar{\xi}_1 - \bar{\eta}_\infty i)}{\vartheta_2(\xi_1 + \bar{\eta}_\infty i) \vartheta_3(\bar{\xi}_1 + \bar{\eta}_\infty i)} = e^{\frac{\pi}{2}i}. \quad (2.4)$$

2) Условие, определяющее длину первой пластинки,

$$\frac{N}{V_\infty} \int_0^{1/2} \frac{\vartheta_1(2\xi) \vartheta_1^2(\xi + \xi_1) \vartheta_4^2(\xi + \bar{\xi}_1) d\xi}{\vartheta_4^2(\xi) \vartheta_2^3(\xi - \bar{\eta}_\infty i) \vartheta_2^3(\xi + \bar{\eta}_\infty i)} = l. \quad (2.5)$$

3) Условие, определяющее положение точки  $C$ ,

$$V \cdot p \cdot \frac{N}{V_\infty} i \int_{AD+DC} \frac{\vartheta_1(2u) \vartheta_1^2(u + \xi_1) \vartheta_4^2(u + \bar{\xi}_1) du}{\vartheta_4^2(u) \vartheta_2^3(u - \bar{\eta}_\infty i) \vartheta_2^3(u + \bar{\eta}_\infty i)} = x_c + iy_c, \quad (2.6)$$

где  $AD + DC$  показывает путь интегрирования. Причем от интеграла, входящего в (2.6), берется главное значение по Коши, на что указывает знак  $V \cdot p$ . Нетрудно видеть, что действительная и мнимая части выражения (2.6) дают два уравнения.

Таким образом, мы получили систему пяти уравнений (2.3), (2.4), (2.5) и (2.6) для определения пяти неизвестных постоянных.

Определим смоченную длину  $l_c$  глассирующей пластинки. По Вагнеру [1] за смоченную длину глассирующей пластинки принимается условно расстояние от задней кромки  $C$  глассирующей пластинки  $CD$  до точки  $L$  пересечения пластинки  $CD$  с перпендикулярной к ней касательной  $KL$  к свободной поверхности  $AD$  (рис. 2). Пусть точке касания соответствует в параметрической области точки  $u = \eta_1 i$ . Для определения неизвестного параметра  $\eta_1$  можно использовать условие для направления скорости жидкости в точке  $K$

$$\frac{\vartheta_1(\xi_1 - \eta_1 i) \vartheta_4(\bar{\xi}_1 - \eta_1 i)}{\vartheta_1(\xi_1 + \eta_1 i) \vartheta_4(\bar{\xi}_1 + \eta_1 i)} = - e^{\pi i}. \quad (2.7)$$

Тогда длину смоченной части глассирующей пластинки можно определить по формуле

$$l_c = \operatorname{Re} \{ (z_c - z_k) e^{-i\alpha} \}, \quad (2.8)$$

где

$$z_k = -\frac{N}{V_\infty} \int_0^{\eta_1} \frac{\vartheta_1(2\eta i) \vartheta_1^2(\xi_1 + \eta i) \vartheta_4^2(\bar{\xi}_1 + \eta i) d\eta}{\vartheta_4^2(\eta i) \vartheta_3^2[(\eta - \bar{\eta}_\infty) i] \vartheta_2^3[(\eta + \bar{\eta}_\infty) i]}. \quad (2.9)$$

Используя формулу (2.1), нетрудно найти расход  $-q$  жидкости в струйке:

$$q = N \frac{\pi}{\vartheta_1'(0)} \frac{\vartheta_4^2(\xi_1) \vartheta_1^2(\bar{\xi}_1)}{\vartheta_3^6(\bar{\eta}_\infty i)}. \quad (2.10)$$

§ 2. Определим давление, оказываемое потоком на систему пластин. Из (1.13) следует, что суммарная сила, действующая на систему пластин, определяется интегралом

$$R = X + iY = -\frac{i\rho V_\infty}{2} \left[ \int_{AB+CD} \frac{V_\infty dz}{dW} \cdot dW - \int_{AB+CD} \frac{1}{V_\infty} \cdot \frac{dW}{dz} \cdot \overline{\frac{dW}{du}} du \right].$$

Рассмотрим замкнутый контур в физической плоскости, показанной на рис. 2 пунктиром. Так как внутри замкнутого контура стоящие под знаком интеграла функции аналитические, то очевидно

$$\oint_{ABCD} \frac{V_\infty dz}{dW} dW = 0 \quad \text{и} \quad \oint_{ABCD} \frac{1}{V_\infty} \cdot \frac{dW}{dz} \cdot \overline{\frac{dW}{du}} du = 0.$$

Замкнутому контуру в параметрической области будет соответствовать прямоугольник  $ABCD$  с выброшенными четверть-окружностью с центром в точке  $D$  и полуокружностью с центром в точке  $F$ . В силу этого будем иметь

$$R = \frac{i\rho V_\infty}{2} \left[ \int_D \frac{V_\infty dz}{dW} dW - \int_D \frac{1}{V_\infty} \cdot \frac{dW}{dz} \cdot \overline{\frac{dW}{du}} du \right] + \\ + \frac{i\rho V_\infty}{2} \left[ \int_F \frac{V_\infty dz}{dW} dW - \int_F \frac{1}{V_\infty} \cdot \frac{dW}{dz} \cdot \overline{\frac{dW}{du}} du \right].$$

На вертикальных сторонах прямоугольника  $\operatorname{Im} dW = 0$  и  $\left| \frac{dW}{V_\infty dz} \right| = 1$ .

Отсюда справедливы следующие соотношения.

$$dW = \overline{dW(-\bar{u})}, \\ \frac{V_\infty dz}{dW}(u) = \overline{\frac{dW}{V_\infty dz}(-\bar{u})}.$$

Следовательно,

$$\bar{R} = X - iY = -\frac{i\rho V_\infty}{2} \left[ \frac{1}{2} \oint_D \frac{1}{V_\infty} \cdot \frac{dW}{dz} \cdot \overline{\frac{dW}{du}} du + \oint_F \frac{1}{V_\infty} \cdot \frac{dW}{dz} \cdot \overline{\frac{dW}{du}} du \right], \quad (2.11)$$

где интегралы берутся по бесконечно малым окружностям около соответствующих точек против часовой стрелки. Так как функции  $\frac{dW}{du}$  и  $\frac{dW}{V_\infty dz}$  в окрестностях точек  $D$  и  $F$  имеют разложения вида

$$\frac{dW}{du} = \frac{c_{-1}^*}{u - \frac{\tau}{2}} + c_0^* + \dots \text{ в точке } D,$$

$$\frac{dW}{du} =$$

$$= \frac{c_{-3}}{\left(u - \frac{1}{2} - \bar{\eta}_\infty i\right)^3} + \frac{c_{-2}}{\left(u - \frac{1}{2} - \bar{\eta}_\infty i\right)^2} + \frac{c_{-1}}{u - \frac{1}{2} - \bar{\eta}_\infty i} + c_0 + \dots \text{ в точке } F$$

и 
$$\frac{dW}{V_\infty dz} = a_0^* + a_1^* \left(u - \frac{\tau}{2}\right) + \dots \text{ в точке } D,$$

$$\frac{dW}{V_\infty dz} = a_0 + a_1 \left(u - \frac{1}{2} - \bar{\eta}_\infty i\right) + a_2 \left(u - \frac{1}{2} - \bar{\eta}_\infty i\right)^2 + \dots \text{ в точке } F,$$

то интегралы, входящие в формулу (2.11), легко вычисляются, и выражение для вектора  $\bar{R}$  силы давления принимает вид:

$$\bar{R} = \pi \rho V_\infty \left[ \frac{1}{2} a_0^* c_{-1}^* + a_0 c_{-1} + c_{-3} \left( a_2 + a_1 \frac{c_{-2}}{c_{-3}} \right) \right], \quad (2.12)$$

где

$$a_1^* = -e^{2i},$$

$$c_{-1}^* = -\frac{2q}{\pi},$$

$$a_0 = 1,$$

$$a_1 = -2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{\vartheta_2'(\xi_1 + \bar{\eta}_\infty i)}{\vartheta_2(\xi_1 + \bar{\eta}_\infty i)} + \frac{\vartheta_3'(\bar{\xi}_1 + \bar{\eta}_\infty i)}{\vartheta_3(\bar{\xi}_1 + \bar{\eta}_\infty i)} \right\},$$

$$a_2 = \frac{a_1^2}{2a_0} + \frac{a_0}{2} \lim_{u \rightarrow \frac{1}{2} + \bar{\eta}_\infty i} \frac{d^2}{du^2} \ln \frac{dW}{V_\infty dz} = \frac{a_1^2}{2} +$$

$$+ \frac{1}{2} \vartheta_1(2\bar{\eta}_\infty i) \vartheta_1'^2(0) \left[ \frac{\vartheta_1(2\xi_1)}{\vartheta_2^2(\xi_1 + \bar{\eta}_\infty i) \vartheta_2^2(\xi_1 - \bar{\eta}_\infty i)} - \frac{\vartheta_1(2\bar{\xi}_1)}{\vartheta_3^2(\bar{\xi}_1 + \bar{\eta}_\infty i) \vartheta_3^2(\bar{\xi}_1 - \bar{\eta}_\infty i)} \right],$$

$$c_{-1} = \frac{q}{\pi},$$

$$c_{-3} = -N \frac{\vartheta_2(\xi_1 + \bar{\eta}_\infty i) \vartheta_2(\xi_1 - \bar{\eta}_\infty i) \vartheta_3(\bar{\xi}_1 - \bar{\eta}_\infty i) \vartheta_3(\bar{\xi}_1 + \bar{\eta}_\infty i)}{\vartheta_1^3(0) \vartheta_3^2(\bar{\eta}_\infty i) \vartheta_1^2(2\bar{\eta}_\infty i)},$$

$$c_{-2} = c_{-3} \left[ 2 \operatorname{Im} \left( \frac{\vartheta_2'(\xi_1 + \bar{\eta}_\infty i)}{\vartheta_2(\xi_1 + \bar{\eta}_\infty i)} + \frac{\vartheta_3'(\bar{\xi}_1 + \bar{\eta}_\infty i)}{\vartheta_3(\bar{\xi}_1 + \bar{\eta}_\infty i)} \right) - 2 \frac{\vartheta_3'(\bar{\eta}_\infty i)}{\vartheta_3(\bar{\eta}_\infty i)} - \frac{\vartheta_1'(2\bar{\eta}_\infty i)}{\vartheta_1(2\bar{\eta}_\infty i)} \right].$$

Следует отметить, что при  $\bar{\xi}_1 = 0$ , из (2.10) имеем  $q = 0$ , т. е. вторая пластина становится продолжением свободной поверхности. Подобная задача была рассмотрена А. В. Кузнецовым [5].

### III. Симметричное кавитационное обтекание клина в канале по схеме Жуковского — Рожко

§ 1. Рассмотрим симметричное кавитационное обтекание клина в канале по схеме с параллельными стенками (рис. 3). Пусть длина

щеки клина равна  $l$ , а угол раствора равен  $\pi\alpha$  ( $0 < \alpha \leq 1$ ). Поток ограничен двумя стенками  $FE$  и  $FK$  и стенками  $AE$  и  $BK$ . Расстояние между стенками канала равно  $2L$ . Набегающий поток имеет в бесконечности слева скорость  $V_\infty$ , на свободных поверхностях —  $V_0$  и в бесконечности справа —  $V_\infty^1$ . Начало координат совпадает с вершиной клина, а ось  $Ox$  направлена параллельно стенке канала в сторону течения.

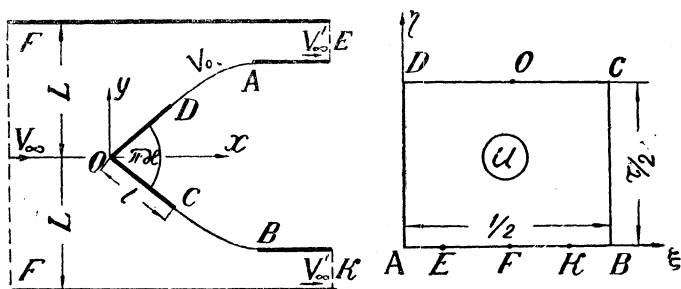


Рис. 3.

Общее решение эквивалентной схемы для обтекания пластины имеется еще у Рети [4]. Однако подробно подобная задача еще не изучалась [1].

Рассмотрим параметрическую переменную  $u$ , изменяющуюся в прямоугольнике  $ABCD$  со сторонами  $1/2$  и  $\tau/2i$ . Нетрудно видеть, что в силу симметрии течения функция  $\frac{dW}{du}$  будет иметь полюсы 1-го порядка в точках  $E(u = \xi_1)$ ,  $F(u = \frac{1}{4})$  и  $k(u = \frac{1}{2} - \xi_1)$  и простой нуль в точке разветвления  $O(u = \frac{\tau}{2} + \frac{1}{4})$ . При обходе точки  $O(u = \frac{\tau}{2} + \frac{1}{4})$  аргумент  $\theta$  изменяется на положительную величину  $\pi\alpha$ . Учитывая эти замечания, легко можно при помощи формул (1.2) и (1.10) записать параметрическое решение данной задачи в виде

$$\frac{dW}{du} = N \frac{\vartheta_1(2u) \vartheta_4(u - \frac{1}{4}) \vartheta_3(u - \frac{1}{4})}{\vartheta_1(u - \xi_1) \vartheta_1(u + \xi_1) \vartheta_2(u - \xi_1) \vartheta_2(u + \xi_1) \vartheta_1(u - \frac{1}{4}) \vartheta_2(u - \frac{1}{4})}, \quad (3.1)$$

$$\frac{dW}{V_0 dz} = \frac{\vartheta_4^x(u - \frac{1}{4})}{\vartheta_3^x(u - \frac{1}{4})}. \quad (3.2)$$

Заметим, что при  $\xi_1 = 0$  получается обтекание клина в канале по обычной схеме Кирхгофа, рассмотренного Н. Е. Жуковским [2] и позднее Биркгоффом и др. [3]. При  $\xi_1 = \frac{1}{4}$  имеем кавитационное обтекание клина в неограниченной жидкости по схеме Жуковского — Рожко.

Общее решение, определяемое выражениями (3.1) и (3.2), содержат три неизвестных параметра  $N$ ,  $\tau$  и  $\xi_1$ . Для их определения используем следующие условия:

1. Условие для величины скорости жидкости в точке  $F$

$$\frac{V_\infty}{V_0} = \frac{\vartheta_4^x(0)}{\vartheta_3^x(0)}. \quad (3.3)$$

2. Условие, определяющее ширину канала

$$L = \frac{N}{2V_{\infty} \vartheta_2(0) \vartheta_1^2\left(\frac{1}{4} - \xi_1\right) \vartheta_2^2\left(\frac{1}{4} - \xi_1\right)}. \quad (3.4)$$

3. Условие, определяющее длину щеки клина

$$l = \frac{N}{V_0} \int_0^{1/4} \frac{\vartheta_1(2t) \vartheta_1^{1-x}\left(\frac{1}{4} - t\right) \vartheta_2^{1+x}\left(\frac{1}{4} - t\right) dt}{\vartheta_4\left(\frac{1}{4} - t\right) \vartheta_3\left(\frac{1}{4} - t\right) \vartheta_4(t - \xi_1) \vartheta_4(t + \xi_1) \vartheta_3(t - \xi_1) \vartheta_3(t + \xi_1)}. \quad (3.5)$$

Таким образом, мы имеем три уравнения для определения трех неизвестных.

Величину скорости  $V_{\infty}^1$  в точке  $E$  и  $K$  можно определить по формуле

$$\frac{V_{\infty}^1}{V_0} = \frac{\vartheta_4^x\left(\frac{1}{4} - \xi_1\right)}{\vartheta_3^x\left(\frac{1}{4} - \xi_1\right)}. \quad (3.6)$$

§ 2. Сопротивление клина можно вычислить интегрированием уравнения (1.13). Однако в данной задаче целесообразнее получить формулу для определения сопротивления клина в канале при помощи теоремы об изменении количества движения.

Пусть  $p_0$  — давление жидкости на свободных струях  $DA$  и  $CB$ , а  $p_{\infty}$  и  $p_{\infty}^1$  — давления жидкости в бесконечности слева и справа.

Сопротивление клина вычисляется по формуле  $X = \int_{-d/2}^{d/2} (p - p_0) dy$ ,

где  $d$  — расстояние между параллельными пластинками  $AE$  и  $BK$ . Применим теорему об изменении количества движения к массе жидкости, заключенной между параллельными стенками, клином, свободными поверхностями и прямолинейными сечениями  $FF$  и  $EK$ , перпендикулярными к стенкам канала и проведенными в бесконечности слева и справа от клина.

Результирующая всех давлений на жидкость равна

$$-X + 2L(p_{\infty} - p_0) - (2L - d)(p_{\infty}^1 - p_0).$$

Приращение в единицу времени количества движения жидкости, заключенной между указанными поверхностями, равно

$$-\rho q V_{\infty} + \rho q V_{\infty}^1.$$

Приравнявая импульс результирующей давлений к приращению количества движения, находим

$$X = 2L(p_{\infty} - p_0) - (2L - d)(p_{\infty}^1 - p_0) - \rho q(V_{\infty}^1 - V_{\infty}).$$

Отсюда, используя интеграл Бернулли, имеем

$$X = 2L \cdot \frac{\rho}{2}(V_0^2 - V_{\infty}^2) - (2L - d) \frac{\rho}{2}(V_0^2 - V_{\infty}^1{}^2) - \rho q(V_{\infty}^1 - V_{\infty})$$

или после несложного преобразования получим

$$X = \rho V_{\infty}^2 L \left( \frac{V_0^1}{V_{\infty}} - 1 \right) \left( \frac{V^2}{V_{\infty} V_{\infty}^1} - 1 \right). \quad (3.7)$$

Из (3.7) можно получить коэффициент сопротивления клина в канале

$$c_x = \frac{X}{\rho l \sin \pi \frac{z}{2} V_\infty^2} = \frac{L}{l \sin \pi \frac{z}{2}} \left( \frac{V_\infty^1}{V_\infty} - 1 \right) \left( \frac{V_0^2}{V_\infty V_\infty^1} - 1 \right). \quad (3.8)$$

Полагая  $V_\infty^1 = V_0$ , нетрудно получить из (3.8) коэффициент сопротивления клина, помещенного в канале и обтекаемого по схеме Кирхгофа [1]:

$$c_x = \frac{L}{l \sin \pi \frac{z}{2}} \left( \frac{V_0}{V_\infty} - 1 \right)^2. \quad (3.9)$$

Чтобы получить из (3.8) известную формулу для коэффициента сопротивления тела, обтекаемого безграничным потоком по схеме Жуковского — Рожко, преобразуем правую часть при помощи равенства  $2L \cdot V_\infty = (2L - d) V_\infty^1$  к виду  $c_x = \frac{d}{2l \sin \pi \frac{z}{2}} \frac{V_\infty^1}{V_\infty} \left( \frac{V_0^2}{V_\infty V_\infty^1} - 1 \right)$ . Отсю-

да, полагая  $V_\infty = V_\infty^1$  имеем

$$c_x = \frac{d}{2l \sin \pi \frac{z}{2}} \cdot \sigma, \quad (3.10)$$

где  $\sigma = V_0^2/V_\infty^2 - 1$  — число кавитации.

§ 3. Для практического решения системы уравнений (3.3), (3.4) и (3.5) целесообразно разложить тэта-функции в быстросходящиеся тригонометрические ряды по степеням  $h = e^{-\pi \xi_1}$ . При этом, уравнение (3.3) позволяет определить  $h$ , а уравнения (3.4) и (3.5) — параметр  $\xi_1$ .

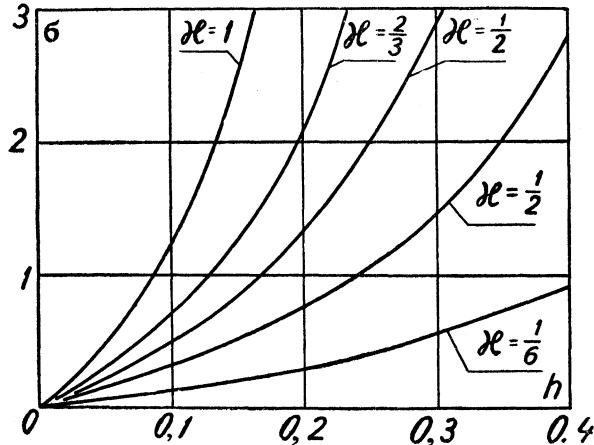


Рис. 4.

На рис. 4 даны кривые зависимости параметра  $h$  от чисел кавитации  $\sigma$  при различных значениях  $\alpha$ . Нетрудно видеть, что малым числам кавитации соответствуют малые значения параметра  $h$ . Для последних все формулы сильно упрощаются. Действительно, пренебрегая в разложениях для тэта-функций членами порядка  $h^2$ , можно представить систему уравнений (3.3), (3.4) и (3.5) в виде

$$\frac{V_\infty}{V_0} = \frac{1 - 2\alpha h}{1 + 2\alpha h}, \quad (3.10)$$

$$\frac{l}{L} = 16 \cdot h^2 \frac{V_\infty}{V_0} I_x \cos^2 2\pi \xi_1, \quad (3.11)$$

где

$$I_x = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/4} \sin 4\alpha \cdot \operatorname{ctg}^x \alpha d\alpha. \quad (3.12)$$

В таблице 1 приведены значения интеграла  $I_x$  для некоторых значений  $x$ .

Таблица 1

$x$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{5}{6}$	1
$I_x$	0,3782	0,4549	0,5550	0,6890	0,8736	1,1366

Следует отметить, что интеграл (3.12) можно взять в конечном виде, если  $x = m/n$ , где  $m$  и  $n$  — целые числа. В этом случае  $I_x$  после замены переменного  $t = \operatorname{tg}^{1/n} \alpha$  сводится к интегралу от рациональной дроби. Однако при больших  $n$  интеграл (3.12) выгоднее вычислять численно, например, методом Симпсона.

Формула (3.6) при сделанных предположениях преобразуется к виду

$$\frac{V_\infty^1}{V_0} = \frac{1 - 2xh \sin 2\pi\xi_1}{1 + 2xh \sin 2\pi\xi_1}. \quad (3.13)$$

Используя (3.10), (3.11) и (3.13), нетрудно представить формулу (3.8) для коэффициента сопротивления клина в канале в виде

$$c_x = \frac{x^2 \sqrt{1+\sigma} (\sqrt{1+\sigma} + 1)^2}{4I_x \cdot \sin \pi \frac{x}{2} (1 - 4x^2 h^2 \sin^2 2\pi\xi_1)}. \quad (3.14)$$

При сделанных нами предположениях относительно малости  $h$  можно пренебречь членом  $4x^2 h^2 \sin^2 2\pi\xi_1$ . Таким образом, мы получили известный факт [1], что при различных отношениях  $l/L$  коэффициент

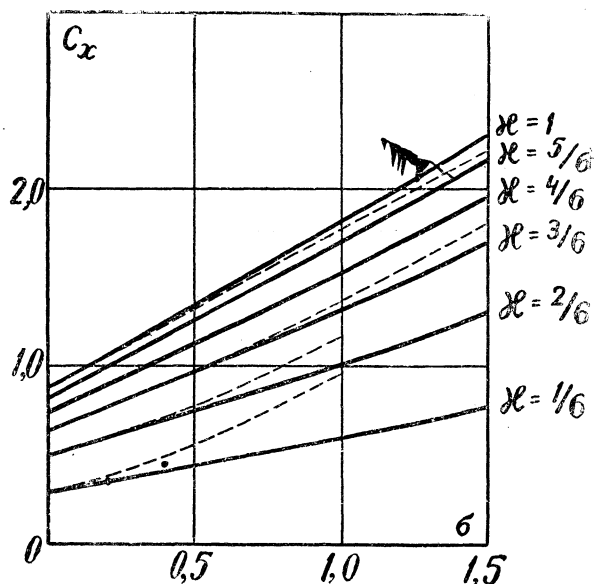


Рис. 5.

сопротивления  $c_x$  оказывается практически одним и тем же, если число кавитации не меняется. На рисунке 5 нанесены кривые зависимости  $c_x$  от  $\sigma$  при  $\xi_1 = 0$ , вычисленные по формуле (3.14). Для сравнения нанесены пунктирной линией соответствующие кривые из [1] для клина, обтекаемого потоком неограниченной жидкости с возвратной струйкой. Точки соответствуют значениям  $c_x$  для клина с углом раствора в  $30^\circ$ , расположенного в канале и обтекаемого по схеме Кирхгофа [1].

Заметим, что в пределе при  $h = 0$  формула (3.14) дает известный результат для коэффициента сопротивления клина, обтекаемого по схеме Кирхгофа.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. М. И. Гуревич. Теория струй идеальной жидкости. М., 1961.
2. Н. Е. Жуковский. Видоизменение метода Кирхгофа. Собрание сочинений, т. III, § 17, ГТТИ, 1936.
3. Birkhoff G., Plesset M., Simmons N., Wall effects in cavity flow, Quarterly of Applied Mathematics, p. I, vol. VIII, July 1950, N 2; p. II, vol. IX, January, 1952, N 4. (Переводы в сборниках „Механика“, № 1, 1951, стр. 87—102 и № 2, 1953, стр. 55—63).
4. Rethy M. Strahlformen incompressibler reibungsloser Flüssigkeiten, Mathematische Annalen, Bd. 46, 1895 г., s. 249 - 272.
5. А. В. Кузнецов. Итоговая научная конференция КГУ, Казань, 1963.
6. В. И. Смирнов. Курс высшей математики, том. III, часть 2, ГТТИ, 1942.