A. M. Blokh, M. Yu. Lyubich, Decomposition of one-dimensional dynamical systems into ergodic components. The case of a negative Schwarzian derivative,
Algebra i Analiz, 1989, Volume 1, Issue 1, 128–145

А. М. Блох, М. Ю. Любич

О РАЗЛОЖЕНИИ ОДНОМЕРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ЭРГОДИЧЕСКИЕ КОМПОНЕНТЫ. СЛУЧАЙ ОТРИЦАТЕЛЬНОГО ШВАРЦИАНА

В работе изучается измеримая динамика одномерных полимодальных преобразований $f: M \to M$ с отрицательным шварцианом. Получено разложение M, из которого удалены области притяжения предельных циклов в объединение конечного числа эргодических компонент. Эти компоненты совпадают с областями притяжения минимальных метрических аттракторов. В частности, почти каждая траектория преобразования f сходится к некоторому минимальному аттрактору.

§ 1. Введение

Пусть $f: M \to M$ — отображение отрезка или окружности с отрицательным шварцианом. В настоящей работе исследуется измеримая динамика таких преобразований, т. е. поведение почти всех (относительно меры Лебега) его траекторий. При этом важную роль (в постановочном плане) играет понятие метрического аттрактора в смысле Милнора [1]. В этой работе Дж. Милнор сформулировал проблему разложения глобального аттрактора преобразования f в конечное объединение минимальных аттракторов. В работах [2, 3] было получено разложение глобального аттрактора в конечное объединение неразложимых аттракторов A_k. В настоящей работе доказана эргодичность сужения f на области притяжения аттракторов A_k. Отсюда, в частности, следует минимальность этих аттракторов, что завершает решение сформулированной выше проблемы.

Теорема об эргодичности C^2-диффеоморфизмов окружности была известна ранее (Эрман—Каток, см. [4] и [5], с. 91). Для унимодальных транзитивных отображений отрезка с отрицательным шварцианом соответствующий результат был получен авторами в 1986 г. (работа готовится к печати в «Украинском математическом журнале», 1989 г.). Идейно настоящая работа близка к теореме об отсутствии блуждающих интервалов у полимодальных отображений с отрицательным шварцианом (М. Ю. Любич, 1987 г.).

Перейдем к точным формулировкам. Пусть M — одномерное компактное многообразие с краем, т. е. дизъюнктное объединение конечного числа отрезков и окружностей. Рассмотрим класс $\mathfrak{S}_d$ C^3-гладких кусочно-монотонных отображений $f: M \to M$, имеющих d критических точек $c_k \in \operatorname{int} M$ (*«d-модальных»*) и удовлетворяющих следующим условиям:

U1. *В окрестности точек c_k выполняются оценки:*

$$A_1 |x - c_k|^{\beta_k} \leqslant |f'(x)| \leqslant A_2 |x - c_k|^{\beta_k},$$

где $A_1, A_2, \beta_k > 0$.

Ключевые слова: аттрактор, эргодичность, соленоид, точка плотности, унимодальное разложение.

U2. *Критические точки c_k являются экстремумами.*

U3. *Вне критических точек f имеет отрицательный шварциан*:

$$Sf=\frac{f'''}{f'}-\frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2<0$$

(производная $f'(x)$ понимается в смысле стандартной координаты на отрезке или угловой координаты на окружности).

Отметим, что условие U1 выполняется для C^∞-гладких отображений с неплоскими критическими точками. Множество критических точек преобразования f обозначим через $C=C(f)$. Положим $S=S(f)=C(f)\cup\partial M$. Точки этого множества мы будем называть *сингулярными*.

Положим $\mathfrak{S}=\bigcup\limits_{d=0}^{\infty}\mathfrak{S}_d$. Далее, f^n обозначает n-ю итерацию преобразования f, $\omega(x)$ — предельное множество траектории (орбиты) $\{f^n x\}_{n=0}^{\infty}$, λ — меру Лебега на многообразии M, $\mathbb{Z}_+=\{0, 1, \ldots\}$.

Множество $X\subset M$ называется *инвариантным*, если $fX\subset X$, и вполне инвариантным, если дополнительно $f^{-1}X\subset X$. Инвариантное множество X будем называть *транзитивным*, если $f\mid X$ топологически транзитивно, т. е. имеет плотную орбиту. Для замкнутого инвариантного множества $A\subset M$ через $\mathrm{rl}(A)=\{x:\omega(x)\subset A\}$ обозначим его *область притяжения* («realm of attraction»).

Метрическим аттрактором (по Милнору) называется замкнутое инвариантное подмножество $A\subset M$ такое, что $\lambda(\mathrm{rl}(A))>0$ и $\lambda(\mathrm{rl}(A)\setminus\mathrm{rl}(A'))>0$ для любого собственного замкнутого инвариантного подмножества $A'\subset A$. В дальнейшем мы, как правило, будем говорить просто «аттрактор». Аттрактор называется *минимальным*, если он не содержит меньших аттракторов, и *неразложимым*, если он не разлагается в объединение двух меньших аттракторов. *Глобальным аттрактором* называется такой аттрактор A, что $\omega(x)\subset A$ для п. в. $x\in M$. Как показано в [1], любое непрерывное преобразование имеет единственный глобальный аттрактор.

Теорема A [2, 3]. *Пусть A — неразложимый аттрактор преобразования $f: M\to M$ с отрицательным шварцианом (без каких-либо предположений о невырожденности критических точек).*

Тогда имеет место одна из следующих трех возможностей:

A1. *A — предельный цикл, т. е. орбита периодической точки, для которой* $\mathrm{int}(\mathrm{rl}(A))\neq\varnothing$.

A2. $A=\bigcup\limits_{k=0}^{p-1}f^kI$ — *замкнутое инвариантное транзитивное подмногообразие (вообще говоря, с краем); здесь I — отрезок или окружность и $f^pI\subset I$.*

A3. $A=\omega(c)\ni c$, *где $c\in C(f)$ — некоторая критическая точка.*

При этом для п. в. $x\in M$ предельное множество $\omega(x)$ совпадает с некоторым неразложимым аттрактором.

Отметим, что если аттрактор типа A2 не содержит критических точек, то он является объединением *окружностей* f^kI $(k=0, \ldots, p-1)$, причем $f^p\mid I$ топологически сопряжено с иррациональным вращением $z\mapsto e^{2\pi i\theta}z$ или преобразованием $z\mapsto z^n$ $(|z|=1)$.

Через q_c и q_i обозначим число связных компонент многообразия M, являющихся окружностями и отрезками соответственно.

Следствие A. *Глобальный аттрактор преобразования $f\in\mathfrak{S}_d$ разлагается в объединение не более чем $d+q_c+2q_i$ неразложимых аттракторов.*

Доказательство. Любой аттрактор типа A3 содержит критическую точку. Это же относится и к аттрактору типа A2, не являющемуся объединением окружностей. Наконец, аттрактор типа A1 притягивает некоторую сингулярную точку (по теореме Зингера [6]). Комбинация этих замечаний дает требуемую оценку.

Все рассматриваемые ниже меры будут предполагаться *борелевскими*. Мера μ называется *инвариантной* относительно преобразования f, если $\mu(f^{-1}X)=\mu(X)$ для любого измеримого множества X, и *квазиинвариантной*, если $\mu(X)=0 \Rightarrow \mu(f^{-1}X)=0$. Очевидно, лебегова мера λ квазиинвариантна относительно гладких преобразований с конечным числом критических точек.

Преобразование $f: X \to X$ с квазиинвариантной мерой называется *эргодическим*, если не существует разбиения $X=X_1 \cup X_2$ пространства X на два инвариантных подмножества положительной меры, $X_1 \cap X_2 = \varnothing$. Иными словами, любое вполне инвариантное множество положительной меры совпадает mod 0 со всем пространством (говорят, что некоторое свойство выполняется mod 0, если оно выполняется после удаления множества нулевой меры). Основным результатом настоящей работы является следующая

Теорема 1. *Пусть A — неразложимый аттрактор преобразования $f \in \mathfrak{S}$, не являющийся предельным циклом. Тогда сужение $f \mid \mathrm{rl}(A)$ эргодично (относительно меры Лебега).*

Эта теорема имеет многочисленные следствия.

Следствие 1. *Неразложимые аттракторы минимальны.*

Доказательство. Пусть $A_1 \underset{\neq}{\subset} A_2$ — два аттрактора, причем A_2 неразложим. Тогда $\mathrm{rl}(A_1)$ — вполне инвариантное подмножество положительной меры в $\mathrm{rl}(A_2)$. Так как A_2 не является предельным циклом, то $f \mid \mathrm{rl}(A_2)$ эргодично. Следовательно, $\lambda(\mathrm{rl}(A_2) \setminus \mathrm{rl}(A_1))=0$, вопреки определению аттрактора.

Из следствия 1 и теоремы A вытекает

Следствие 2. *Для почти каждой точки $x \in M$ существует минимальный аттрактор A такой, что $\omega(x)=A$.*

Обозначим через $\Lambda(f)$ множество точек $x \in M$, орбиты которых не стремятся к предельным циклам. Через d_Λ обозначим число критических точек, лежащих в $\Lambda(f)$.

Любое преобразование f пространства с квазиинвариантной мерой μ может быть разложено (mod 0) на *эргодические компоненты* (см. [5]). Определение эргодических компонент в общем случае является достаточно деликатной задачей, ввиду того что они могут иметь нулевую меру. Однако эргодические компоненты положительной меры определяются без затруднений: это вполне инвариантные множества X такие, что $\mu(X) > 0$ и сужение $f \mid X$ эргодично. Из следствия 2 и теоремы 1 вытекает

Следствие 3. *Пусть $f \in \mathfrak{S}_d$. Тогда эргодические компоненты преобразования $f \mid \Lambda(f)$ суть области притяжения $\mathrm{rl}(A_k)$ минимальных аттракторов, отличных от предельных циклов. Множество $\Lambda(f)$ разлагается в объединение не более чем $d_\Lambda + q_c$ эргодических компонент.*

Замечание. На области притяжения предельных циклов эргодическими компонентами являются *большие орбиты* преобразования f, т. е. классы следующей эквивалентности: $x \sim y$, если $f^n x = f^m x$ для некоторых $n, m \in \mathbb{Z}_+$.

Важной проблемой теории гладких динамических систем является исследование инвариантных мер, абсолютно непрерывных относительно меры Лебега (см. [7]).

Следствие 4. *Преобразование $f \in \mathfrak{S}_d$ имеет не более $d_\Lambda + q_c$ абсолютно непрерывных инвариантных вероятностных эргодических мер.*

Замечание. В частности, унимодальное отображение $f \in \mathfrak{S}_1$ отрезка может иметь не более одной абсолютно непрерывной инвариантной вероятностной меры. Для унимодальных отображений, обладающих некоторым дополнительным свойством гиперболичности, это было доказано ранее в работе [8].

Доказательство следствия 4. Пусть μ — такая мера. Очевидно, $\operatorname{supp}\mu \subset \Lambda(f)$. Рассмотрим множество S_μ таких точек $x \in \Lambda(f)$, для которых

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\varphi(f^n x)=\int\varphi d\mu$$

для всех непрерывных функций φ. Из эргодической теоремы следует, что $\mu(S_\mu)=1$ и, значит, $\lambda(S_\mu)>0$. Поскольку множества S_μ вполне инвариантны и попарно не пересекаются, то требуемое вытекает из следствия 3.

Множество X называется *блуждающим*, если $f^n X\cap X=\varnothing$ $(n=1, 2, \ldots)$, и *сильно блуждающим*, если $f^n X\cap f^m X=\varnothing$ $(n>m\geqslant 0)$. При $f\in\mathfrak{S}$ множество $\Lambda(f)$ не содержит сильно блуждающих интервалов (М. Ю. Любич). Из следствия 3 вытекает измеримый аналог этого утверждения (ср. с теоремой Сулливана [9]).

Следствие 5. *Не существует сильно блуждающих множеств $X\subset\Lambda(f)$ положительной меры, для которых $f^n\mid X$ инъективно $(n\in\mathbb{Z}_+)$.*

Доказательство. В противном случае разобьем сильно блуждающее множество X на $k>d_\Lambda+q_c$ множеств положительной меры и положим

$$Y_i=\bigcup_{m=-\infty}^{\infty} f^m X_i.$$

Так как вполне инвариантные множества Y_i попарно не пересекаются, то f имеет не менее, чем k эргодических компонент. Противоречие.

Замечание. Для унимодальных $f\in\mathfrak{S}_1$ мы можем доказать отсутствие блуждающих множеств X без условия инъективности $f^n\mid X$.

§ 2. Формулировка Основной леммы. Обозначения и выбор констант

Интервал I называется *периодическим*, если $f^p I\subset I$ для некоторого $p>0$. В окрестности экстремумов c_k определим *инволюцию* $\tau: x\to x'$ следующим образом: $f(x')=f(x)$. Множество X будем называть *локально симметричным*, если оно инвариантно относительно τ. *Плотность* множества X в интервале $I=[a, b]$ будем обозначать через

$$\rho_X(I)=\rho_X[a, b]\underset{\text{def}}{=}\lambda(X\cap I)/\lambda(I).$$

Критическую точку c будем называть *слабой точкой плотности* множества X, если $\rho_X(I)\to 1$ при $\lambda(I)\to 0$, I — непериодический интервал, симметричный относительно c. Отметим, что если c не является периодической точкой, то существуют сколь угодно малые непериодические интервалы I, симметричные относительно c.

Основная лемма. *Пусть c — критическая точка, орбита которой не стремится к предельному циклу, X — измеримое инвариантное локально симметричное подмножество в $\{x:\omega(x)\ni c\}$, $\lambda(X)>0$. Тогда c является слабой точкой плотности множества X.*

Из Основной леммы непосредственно следует эргодичность $f\mid \mathrm{rl}(A)$ для аттракторов типа А3. Для аттракторов типа А2, не являющихся аттракторами типа А3, эргодичность доказана в [2, 3]. Поэтому дальнейшие наши усилия будут направлены на доказательство Основной леммы.

Термин «интервал» мы будем применять к интервалам любого типа (замкнутым, открытым и полуоткрытым). Замкнутые интервалы мы будем также называть отрезками. Через $[a, b]$ мы будем обозначать (замкнутый) интервал с концами a и b, не предполагая, что $a\leqslant b$; в случае, если a и b лежат на окружности, мы выбираем меньший из интервалов, оканчивающихся в этих точках. Обозначение $[a, b]$ будет использоваться также для ориентированного интервала, начинающегося в a и оканчивающегося в b.

Далее нам понадобится следующее

Предложение 1. *Пусть $f \in \mathfrak{S}$, V — интервал, орбита которого не стремится к предельному циклу. Тогда*

$$\inf_{m \in \mathbb{Z}} \lambda(f^m V) > 0.$$

Этот результат следует из топологической картины динамики одномерных отображений (см. [10]) и отсутствия блуждающих интервалов.

Обозначим через S_P множество периодических сингулярных точек; S_A — множества сингулярных точек, содержащихся в $\bigcup \operatorname{int} \operatorname{rl}(Z_i)$, где Z_i — всевозможные предельные циклы преобразования f. Очевидно, $S_P \cap C \subset S_A$.

Зафиксируем теперь (до конца статьи) некоторую критическую точку $c \notin S_A$, для которой мы будем доказывать основную лемму, и некоторую точку $x \in M$ такую, что $\omega(x) \ni c$ и орбита точки x не проходит через экстремумы. Положим $x_n = f^n x$. Кроме того, зафиксируем большое число $\varkappa \in \mathbb{Z}_+$ и два маленьких числа $\eta > 0$ и $\beta \in (0, \eta)$, обладающие следующими свойствами.

P1. *$f^m a \neq b$ для любых $a \in S$, $b \in S \setminus S_P$, $m \geqslant \varkappa$.*

P2. *$|f^\varkappa a - b| > \eta$ для любых $a \in S$, $b \in S \setminus S_P$.*

P3. *$|f^m a - c| > \eta$ для любой точки $a \in S_A \cup S_P$* (это возможно, поскольку $c \notin S_A$).

Кроме того, мы предположим, что η-окрестности сингулярных точек попарно не пересекаются, а в η-окрестностях критических точек корректно определена инволюция τ. При этом в силу U1 τ удовлетворяет условию Липшица с некоторой константой L.

Наконец, в силу предложения 1 существует $\xi \in (0, \eta)$ такое, что выполняется свойство

P4. *Пусть $a \in S \setminus S_A$, V — интервал, содержащий a. Тогда*

$$\lambda(V) \geqslant \eta \Rightarrow \lambda(f^m V) > \xi \quad (m \in \mathbb{Z}_+).$$

§ 3. Унимодальные разложения и лемма о растяжении

Унимодальным разложением (*ассоциированным с точкой x*) мы будем называть набор замкнутых интервалов $G_0, G_1, \ldots, G_k$ и набор натуральных чисел $0 = n_0 < n_1 < \ldots < n_k$ таких, что

D1. *При $i > 0$ интервал G_i содержится в η-окрестности некоторой критической точки c_i и $\tau(G_i) = G_i$;*

D2. *$x_{n_i} \in \operatorname{int} G_i$, $\operatorname{int} G_k$ не содержит точек x_l при $l < n_k$;*

D3. *$f^{l_i} G_i \subset G_{i+1}$, $f^{l_i}(\partial G_i) \subset \partial G_{i+1}$, где $l_i = n_{i+1} - n_i$;*

D4. *Отрезки G_0 и $f^m G_i$ ($i = 0, \ldots, k-1$, $m = 1, 2, \ldots, l_i - 1$) не содержат критических точек.*

Порядком унимодальности разложения $\{G_i, n_i\}_{i=0}^k$ мы будем называть число k. Максимальный порядок унимодальных разложений, для которых $n_k = n$, $G_k = G$, обозначим через $\operatorname{ord}(f^n x, G)$ (при максимизации число k, естественно, не фиксируется).

Определим на множестве унимодальных разложений частичный порядок следующим образом: $\{G_i, n_i\}_{i=0}^k \prec \{G'_j, n'_j\}_{j=0}^{k'}$, если $n_k = n'_{k'}$ и наборы $\{G_i\}$, $\{n_i\}$ содержатся в наборах $\{G'_j\}$, $\{n'_j\}$ соответственно. Максимальность разложения будем понимать в смысле этого порядка.

Далее, пусть $T_0 = G_0$, $G_i = [z_i, \tau(z_i)]$ при $i \geqslant 1$. Если $i \geqslant 1$ и $n_{i+1} - n_i > \varkappa$, то положим $\nu_i = n_{i+1} - n_i - \varkappa$. Рассмотрим максимальный интервал $T_i = [f^\varkappa z_i, \zeta_i]$, оканчивающийся в $f^{\varkappa}z_i$ и содержащий $f^{\varkappa}G_i$, на котором функция f^{ν_i} монотонна. Положим $R_i = [x_{n_i+\varkappa}, \zeta_i]$ (рис. 1).

Лемма 1. *Пусть преобразование f удовлетворяет условию* U2. *Пусть $\{G_i, n_i\}_{i=0}^{k}$ — максимальное унимодальное разложение, причем $G_k \ni c$ и $\lambda(G_k) < \xi$. Тогда если $n_{i+1} - n_i > \varkappa$, то $f^{\nu_i}T_i \supset G_{i+1}$.*

Доказательство. При $i=0$ отображение $f^{\nu_0} | T_0 = f^{n_1 - n_0} | G_0$ монотонно и $f^{\nu_0}(\partial T_0) \subset \partial G_1$. Следовательно, $f^{\nu_0}T_0 = G_1$.

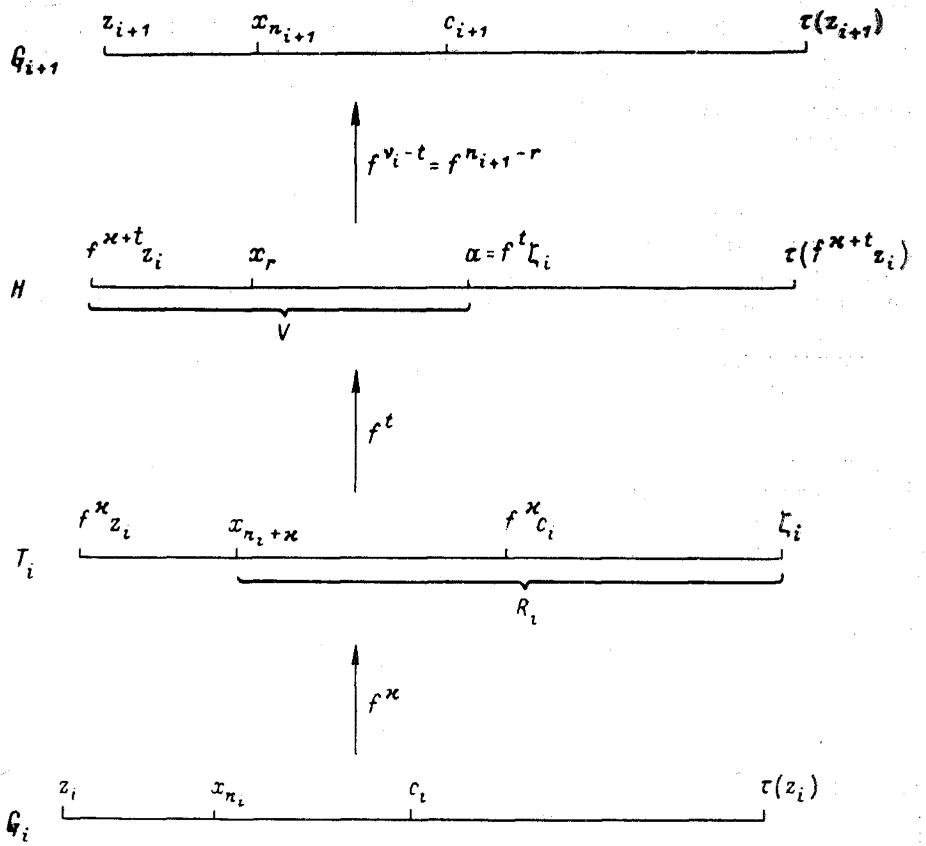

Рис. 1.

Пусть теперь $i \geqslant 1$. Рассуждая от противного, предположим, что $f^{\nu_i}T_i \subset G_{i+1}$. Из определения интервала $T_i = [f^{\varkappa}z_i, \zeta_i]$ следует, что либо $\zeta_i \in f^{-t}C$ для некоторого $t \in [0, \nu_i)$, либо $\zeta_i \in \partial M$. Покажем, что последнее исключено. Действительно, в противном случае в силу свойства P3, примененного к $a = \zeta_i$, имеем $\zeta_i \notin S_A \cup S_P$ (так как $f^{n-n_i-\varkappa}\zeta_i \in G_k$ лежит в η-окрестности c). Поскольку $\lambda(f^{n-n_i-\varkappa}R_i) < \lambda(G_k) < \xi$, то в силу P4 $\lambda(R_i) < \eta$. С другой стороны, из P2 вытекает, что $\lambda(R_i) \geqslant |f^{\varkappa}c_i - \zeta_i| > \eta$ — противоречие.

Следовательно, ζ_i является f^t-прообразом некоторой критической точки a, $0 \leqslant t < \nu_i$. Рассмотрим интервал $V = f^tT_i$, оканчивающийся в точке a. Поскольку $f^{n_k - \varkappa - t}V \subset G_k$ и $\lambda(G_k) < \xi$, то $\lambda(V) < \eta$ (надо применить P3 и P4). Следовательно, корректно определен симметричный относительно точки a интервал $H = V \cup \tau(V)$, содержащий x_r, где $r = n_i + \varkappa + t$ (рис. 1). Легко видеть, что наборы $\{G_0, \ldots, G_i, H, G_{i+1}, \ldots, G_k\}$ и $\{n_0, \ldots, n_i, r, n_{i+1}, \ldots, n_k\}$ определяют новое унимодальное разложение, вопреки максимальности исходного разложения. Лемма доказана.

Пусть G — интервал, симметричный относительно c, $\lambda(G)<\xi$, n — момент первого попадания траектории $\{f^m x\}_{m=0}^{\infty}$ в $\operatorname{int} G$. В заключение этого параграфа мы опишем конструкцию максимального унимодального разложения $\{G_i, n_i\}_{i=0}^{k}$, для которого $G_k=G$, $n_k=n$.

Пусть G_0 — наименьший отрезок, содержащий точку x, для которого $f^n(\partial G_0)\subset\partial G$. Рассмотрим моменты $m_i\in(0, n]$ $(i=1, \ldots, l)$, в которые интервалы $f^{m_i}G_0$ накрывают некоторые критические точки c_i. Из свойств P3, P4 (см. § 2) вытекает, что $\lambda(f^{m_i}G_0)<\eta$. Следовательно, корректно определены симметричные интервалы $G_i=f^{m_i}G_0\cup\tau(f^{m_i}G_0)$. Легко видеть, что последовательность $\{G_i, m_i\}_{i=0}^{l}$ (где $m_0=0$) задает унимодальное разложение, ассоциированное с точкой x. Если $m_l<n$ (т. е. $f^nG_0\not\ni c$), то к этому разложению надо добавить еще интервал $G=G_{l+1}$ и соответствующий момент времени $n=n_{l+1}$. Остается дополнить построенное разложение до некоторого максимального.

§ 4. Леммы об искажении

В этом параграфе собран основной аналитический аппарат, используемый в настоящей работе. Первый результат не требует отрицательности шварциана.

Первая лемма об искажении. *Рассмотрим C^1 — гладкое отображение $f: M\to M$, удовлетворяющее условию U1 из § 1. Пусть B — измеримое подмножество в M, V — интервал, не содержащий критических точек. Если $\rho_B(V)\leqslant 1/2$, то*

$$\rho_{fB}(fV)\leqslant A(f)\rho_B(V),$$

где константа $A(f)$ не зависит от B, V.

Доказательство мы оставляем читателю.

Далее, в этом параграфе $\varphi: I\to J=[a, b]$ обозначает C^3-гладкое отображение интервала I на интервал J, не имеющее критических точек, $S\varphi<0$. Следующий результат является аналогом теоремы искажения Кёбе для однолистных функций (см. [11]).

Свойство Кёбе ([12], [13]). *Пусть $\delta>0$, x_1, $x_2\in I$. Если $|\varphi(x_i)-a_j|\geqslant\delta\lambda(J)$, $i, j=1, 2$, то $|\varphi'(x_1)|/|\varphi'(x_2)|\leqslant F(\delta)$, где $F(\delta)$ не зависит от φ.*

Пусть B — измеримое подмножество интервала $V=[x, y]$. Положим

$$\bar\rho_B[x, y]\equiv\bar\rho_B(V, x)=\sup_{z\in(x, y]}\rho_B[x, z].$$

Отметим, что $\bar\rho_B[x, y]\neq\bar\rho_B[y, x]$.

Из свойства Кёбе легко выводится

Вторая лемма об искажении. *Пусть B — измеримое подмножество в отрезке I. Разобьем I на два отрезка $L\cup R$ с общим концом α. Тогда*

$$\left.\begin{aligned}&\bar\rho_B(L, \alpha)\leqslant\delta\\&\lambda(\varphi L)/\lambda(\varphi R)\leqslant K\end{aligned}\right\}\Rightarrow\bar\rho_{\varphi B}(\varphi L, \varphi\alpha)\leqslant\gamma(\delta, K),$$

где функция $\gamma(\delta, K)$ не зависит от φ, $\gamma(\delta, K)\to 0$ $(\delta\to 0)$ при каждом фиксированном K.

Очевидно, что $\gamma(\delta, K)\geqslant\delta$. Кроме того, функция $\gamma(\delta, K)$ может быть выбрана непрерывной и монотонно возрастающей по δ, а также монотонно возрастающей по K. Отметим также, что во Второй лемме об искажении нельзя заменить $\bar\rho$ на ρ (с этим связаны многие трудности в дальнейшем).

§ 5. Двухшаговый метод оценки плотности

До конца статьи B будет обозначать некоторое f^{-1}-инвариантное локально симметричное относительно экстремумов измеримое множество (в конечном счете результаты будут применяться к множеству $B=M\setminus X$, где X — из Основной леммы). Через $\rho(J)$, $\bar\rho(J)$ мы будем обозначать $\rho_B(J)$, $\bar\rho_B(J)$.

Рассмотрим унимодальное разложение $\{G_i, n_i\}_{i=0}^k$. При $i \geqslant 1$ $G_i = [z_i, \tau(z_i)] \ni c_i$. Пусть интервал $(a, b) \subset G_i$ не содержит критическую точку c_i, причем b лежит ближе к c_i, чем a (естественно, это условие налагается только в случае $i \geqslant 1$). Обозначим через z_{i+1} тот конец интервала G_{i+1}, для которого $[f^{l_i}a, z_{i+1}] \not\ni f^{l_i}b$, где $l_i = n_{i+1} - n_i$. Положим

$$K = |f^{l_i}a - f^{l_i}b| / |f^{l_i}a - z_{i+1}|.$$

Лемма 2. *Пусть* $f \in \mathfrak{S}$. *Если* $\bar{\rho}[a, b] \leqslant \delta < 1/2$, *то*

$$\bar{\rho}[f^{l_i}a, f^{l_i}b] \leqslant \gamma(A\delta, K),$$

где γ — *функция из Второй леммы об искажении, а константа* A *зависит только от* f.

Доказательство. Положим $A = \max\limits_{1 \leqslant m \leqslant \varkappa} A(f^m)$, где $A(f)$ — константа из Первой леммы об искажении. Пусть $l_i > \varkappa$. Тогда разложив f^{l_i} в суперпозицию $f^{l_i - \varkappa} \circ f^\varkappa$, применим сначала Первую лемму от искажении к функции $f^\varkappa$, а затем Вторую лемму об искажении к $f^{l_i - \varkappa}$. На первом шаге получаем

$$\bar{\rho}[f^\varkappa a, f^\varkappa b] \leqslant A\delta. \tag{1}$$

Пусть $L = [f^\varkappa a, f^\varkappa b]$, T_i — интервал, определенный в § 3 (рис. 1), H — компонента интервала $T_i \setminus L$, примыкающая к точке $f^\varkappa a$. Применение Второй леммы об искажении к $f^{l_i - \varkappa} | L \cup H$ с учетом (1) дает требуемое.

Если $l_i \leqslant \varkappa$, то требуемое сразу получается применением Первой леммы об искажении к $f^{l_i} | [a, b]$, ибо $A\delta \leqslant \gamma(A\delta, K)$.

§ 6. Ломаные

Под *t-звенной ломаной* (на прямой) мы будем понимать конечный набор точек $Y = \{y^0, y^1, \ldots, y^t\}$. При этом точки y^m называются *вершинами* ломаной, а отрезки $[y^m, y^{m+1}]$ — ее *звеньями*. Мы не исключаем случай вырожденных звеньев, в котором $y^m = y^{m+1}$. Точка y^0 называется *началом* ломаной, а точка y^t — *ее концом*.

Ломаную будем называть *правильной*, если $y^m \neq y^{m+1}$, а отрезки $[y^m, y^{m+1}]$ и $[y^{m+1}, y^{m+2}]$ направлены в противоположные стороны. Правильную ломаную назовем *стандартной*, если $[y^m, y^{m+1}] \subset [y^{m+1}, y^{m+2})$, $m = 0, \ldots, t-2$.

Будем говорить, что ломаная обладает свойством $D(\varepsilon)$ (по отношению к фиксированному измеримому множеству B), или является *$D(\varepsilon)$-ломаной*, если

$$\bar{\rho}[y^m, y^{m+1}] \leqslant \varepsilon \quad (m = 0, 1, \ldots, t-1). \tag{2}$$

Заметим сразу, что любую $D(\varepsilon)$-ломаную можно переделать в стандартную $D(\varepsilon)$-ломаную с теми же началом и концом. Прежде всего переделаем ее в правильную $D(\varepsilon)$-ломаную, забыв те вершины y^m, для которых $y^m = y^{m+1}$ или отрезки $[y^{m-1}, y^m]$ и $[y^m, y^{m+1}]$ одинаково направлены. Если полученная правильная ломаная не стандартна, то $y^{m+2} \in [y^m, y^{m+1}]$ при некотором m. Выбрасывая вершины y^{m+1} и y^{m+2} (если $m+2 = n$, то одну вершину y^{m+1}), мы получаем $D(\varepsilon)$-ломаную с меньшим числом вершин. Повторив эту процедуру несколько раз, мы получим требуемую стандартную $D(\varepsilon)$-ломаную.

Будем говорить, что *стандартная двузвенная ломаная* $\{y^0, y^1, y^2\}$ *обладает свойством* $E(\varepsilon)$, если $\bar{\rho}[y^0, y^1] \leqslant \varepsilon$ и

$$\rho[y^1, u] \leqslant \varepsilon \quad \text{при} \quad u \in [y^0, y^2]. \tag{3}$$

Любую $E(\varepsilon)$-ломаную можно переделать в $D(\varepsilon)$-ломаную (двузвенную или однозвенную) с теми же началом и концом. Эту процедуру, которую мы сейчас опишем, будем называть *ED-перестройкой.*

Рассмотрим множество

$$Z=\{y\in[y^0,\ y^1]:\rho[y,\ u]\leqslant\varepsilon\ \forall u\in[y^0,\ y^2]\}.$$

Очевидно, Z — замкнутое множество. Пусть $\tilde{y}$ — ближайшая к y^0 точка множества Z. Тогда, заменив y^1 на $\tilde{y}$, мы получим $D(\varepsilon)$-ломаную. Действительно, оценка (2) на звене $[y^0,\ \tilde{y}]$ очевидна. Если на звене $[\tilde{y},\ y^2]$ она не выполняется, то $\exists y\in[y^0,\ \tilde{y}]:\rho[\tilde{y},\ y]>\varepsilon$. Но тогда $\rho[y,\ u]\leqslant\varepsilon\ \ \forall u\in[y^0,\ y^2]$ и, значит, $y\in Z$. При этом y находится ближе к y^0, чем $\tilde{y}$. Противоречие.

Отметим, что если $\tilde{y}=y^0$, то вершину $\tilde{y}$ можно отбросить, и мы получим однозвенную ломаную $\{y^0,\ y^2\}$.

§ 7. Индуктивное построение ломаных

В этом параграфе мы будем использовать обозначения $z_i'=\tau(z_i)$, $u'=\tau(u)$ и т. д. Пусть $\{G_i,\ n_i\}_{i=0}^{k}$ — максимальное унимодальное разложение, при $i\geqslant 1$ $G_i=[z_i,\ z_i']$, причем $f^{n_i}x\in(z_i,\ c_i)$, $G_0=[z_0,\ \zeta_0]$. Ниже свойства $D(\varepsilon)$, $E(\varepsilon)$ и т. д. понимаются по отношению к фиксированному f^{-1}-инвариантному измеримому множеству B.

Лемма 3. *Существует функция $\sigma(\varepsilon)>0$, $\sigma(\varepsilon)\to 0$ $(\varepsilon\to 0)$, обладающая следующим свойством. Предположим, что отрезок $[z_i,\ c_i]$ (или отрезок $[z_0,\ \zeta_0]$ при $i=0$) содержит стандартную t-звенную $D(\varepsilon_i)$-ломаную, начинающуюся в $f^{n_i}x$ и оканчивающуюся в z_i, $i<k$. Тогда в отрезке $[z_{i+1},\ c_{i+1}]$ существует стандартная не более, чем $(t+1)$-звенная ломаная, начинающаяся в $f^{n_{i+1}}x$ и оканчивающаяся в z_{i+1}, где $\varepsilon_{i+1}=\sigma\varepsilon_i$.*

Замечание. Как всегда, функцию σ можно выбрать непрерывной и монотонно растущей. При этом $\sigma(\varepsilon)\geqslant(\varepsilon)$.

Настоящий параграф будет полностью посвящен доказательству леммы 3. Напомним, что через L обозначена константа Липшица инволюции τ. Удобно построить сначала обратную функцию $\varepsilon_i=\omega(\varepsilon_{i+1})=\sigma^{-1}(\varepsilon_{i+1})$. Для этого зададим большое число K, удовлетворяющее следующему неравенству:

$$K=K(\varepsilon_{i+1})>2(L+1)^3/\varepsilon_{i+1}. \tag{4}$$

При этом часто мы будем использовать лишь оценку $K>\max(2,\ L)$. Теперь потребуем, чтобы ε_i удовлетворяло оценке

$$\gamma(A\varepsilon_i,\ (K+1)^2)<\varepsilon_{i+1}/2(L+1)^3, \tag{5}$$

где A — константа из леммы 2, а γ — функция из Второй леммы об искажении. Определим функцию $\varepsilon_i=\omega(\varepsilon_{i+1})$, как некоторую монотонную непрерывную миноранту класса функций, удовлетворяющих неравенству (5).

Обозначим до конца параграфа $l=n_{i+1}-n_i$. Для определенности будем считать $i\geqslant 1$ (случай $i=0$ отличается только обозначениями). Пусть $Y=\{f^{n_i}x=y^0,\ y^1,\ \ldots,\ y^t=z_i\}$ — стандартная ломаная в $[z_i,\ c_i]$. Рассмотрим сначала стандартную ломаную $V=\{v^0,\ v^1,\ \ldots,\ v^t\}=f^lY$ в G_{i+1}, где $v^m=f^ly^m$ $(m=0,\ \ldots,\ t)$. Она начинается в $v^0=f^{n_{i+1}}x$ и оканчивается в z_{i+1} или z_{i+1}'.

Разобьем V на однозвенные и двузвенные ломаные V_s $(s=1,\ \ldots,\ q)$ следующим образом. Если отрезок $[v^0,\ v^1]$ направлен к c_{i+1}, то $V_1=\{v^0,\ v^1,\ v^2\}$ — двузвенная ломаная. В противном случае $V_1=\{v^0,\ v^1\}$ — однозвенная ломаная. Ломаная V_2 состоит из следующих двух звеньев ломаной V, V_3 — из следующих двух и т. д. до тех пор, пока мы не исчерпаем всю ломаную V. При этом последняя ломаная V_q является либо двузвенной (в случае $v^t = z_{i+1}$), либо однозвенной (в случае $v^t = z'_{i+1}$). Отметим, что во всех двузвенных ломаных V_s первое звено $[v^j, v^{j+1}]$ направлено к c_{i+1}, а второе $[v^{j+1}, v^{j+2}]$ — от c_{i+1}.

Теперь мы займемся перестройкой однозвенных и двузвенных ломаных V_s в $D(\varepsilon_{i+1})$-ломаные W_s, лежащие в $[z_{i+1}, c_{i+1}]$. Во всех случаях, кроме одного исключения, ломаная W_s будет иметь не более звеньев, чем ломаная V_s, а начало и конец этих ломаных будут общими. Исключением является случай $s = q$ и $V_q = [v^{t-1}, z'_{i+1}]$ — однозвенная ломаная. В этом случае W_q будет двузвенной ломаной, начинающейся в v_q^{t-1} и оканчивающейся в z_{i+1}. Таким образом, $W = \bigcup\limits_{s=1}^{q} W_s$ будет не более чем $(t+1)$-звенной $D(\varepsilon)$-ломаной в $[z_{i+1}, c_{i+1}]$, начинающейся в $f^{n_{i+1}}x$ и оканчивающейся в z_{i+1}. Переделав ее в стандартную (см. предыдущий параграф), мы получим искомую ломаную.

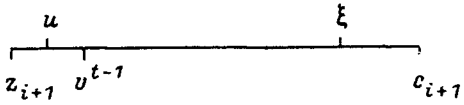

Рис. 2.

Перейдем к построению ломаных W_s, рассмотрев несколько случаев.

Случай 1. *Перестройка ломаной* $V_1 = \{v^0, v^1\}$ *в случае, когда отрезок* $[v^0, v^1]$ *направлен от* c_{i+1}, *не требуется*, поскольку в этом случае на отрезке $[v^0, v^1]$ выполняется свойство $D(\varepsilon_{i+1})$. Действительно,

$$\frac{|v^0 - v^1|}{|v^0 - z'_{i+1}|} \leqslant \frac{|c_{i+1} - z_{i+1}|}{|c_{i+1} - z'_{i+1}|} \leqslant L.$$

Применяя лемму 2, получаем

$$\bar{\rho}[v^0, v^1] \leqslant \gamma(A\varepsilon_i, L) \underset{(4,\,5)}{<} \varepsilon_{i+1}.$$

Случай 2. *Перестройка ломаной* $V_q = \{v^{t-1}, v^t\}$ *в случае, когда* $v^t = z'_{i+1}$. В этом случае мы построим двузвенную ломаную $W_q = \{v^{t-1}, w^t, z_{i+1}\}$. Рассмотрим два подслучая:

Случай 2.1. *Предположим, что* $|c_{i+1} - v^{t-1}| \geqslant K|v^{t-1} - z_{i+1}|$. В этом случае рассмотрим точку $\xi \in [v^{t-1}, c_{i+1}]$ (рис. 2), для которой

$$|v^{t-1} - \xi| = K|v^{t-1} - z_{i+1}|. \tag{6}$$

Покажем, что двузвенная ломаная $\{v^{t-1}, \xi, z_{i+1}\}$ обладает свойством $E(\varepsilon_{i+1})$. Применяя лемму 2 к f^l, убеждаемся, что

$$\bar{\rho}[v^{t-1}, \xi] \leqslant \gamma(A\varepsilon_i, K) \underset{(5)}{<} \varepsilon_{i+1}/2. \tag{7}$$

Проверим теперь свойство (3) для нашей ломаной. Пусть $u \in [z_{i+1}, v^{t-1}]$. Тогда

$$\rho[\xi, u] \leqslant \frac{|u - v^{t-1}|}{|u - \xi|} + \rho[v^{t-1}, \xi] \underset{(6,\,7)}{\leqslant} \frac{1}{K} + \frac{\varepsilon_{i+1}}{2} \underset{(4)}{<} \varepsilon_{i+1},$$

что и требовалось. Произведя теперь ED-перестройку ломаной $\{v^{t-1}, \xi, z_{i+1}\}$, мы получим искомую $D(\varepsilon_{i+1})$-ломаную W_q, имеющую не более двух звеньев.

Случай 2.2. *Пусть теперь* $|c_{i+1} - v^{t-1}| \leqslant K|v^{t-1} - z_{i+1}|$. Покажем, что в этом случае $\widetilde{W}_q = \{v^{t-1}, c_{i+1}, z_{i+1}\}$ является $E(\varepsilon_{i+1})$-ломаной (тогда искомая ломаная W_q получится из $\widetilde{W}_q$ ED-перестройкой). Имеем

$$|v^{t-1}-z'_{i+1}|=|v^{t-1}-c_{i+1}|+|c_{i+1}-z'_{i+1}|\leqslant|v^{t-1}-c_{i+1}|+L|c_{i+1}-z_{i+1}|=$$
$$=(1+L)|v^{t-1}-c_{i+1}|+L|v^{t-1}-z_{i+1}|\leqslant((1+L)K+L)|v^{t-1}-z_{i+1}|\leqslant$$
$$\leqslant(K+1)^2|v^{t-1}-z_{i+1}|. \tag{8}$$

Применяя лемму 2, получаем

$$\bar\rho[v^{t-1},\ z'_{i+1}]\leqslant\gamma(A\varepsilon_i,\ (K+1)^2)\underset{(5)}{<}\varepsilon_{i+1}/(L+1)^3. \tag{9}$$

Тем более

$$\bar\rho[v^{t-1},\ c_{i+1}]<\varepsilon_{i+1}. \tag{10}$$

Далее, пусть $u\in[z_{i+1},\ v^{t-1}]$ (рис. 3). Из (9) следует

$$\varepsilon_{i+1}/(L+1)^2>\rho[v^{t-1},\ u']\geqslant\rho[c_{i+1},\ u']\frac{|c_{i+1}-u'|}{|v^{t-1}-u'|}\geqslant\frac{1}{L+1}\rho[c_{i+1},\ u']. \tag{11}$$

Следовательно,

$$\rho[c_{i+1},\ u]\leqslant L^2\rho[c_{i+1},\ u']\underset{(11)}{<}\varepsilon_{i+1}.$$

Последнее неравенство и неравенство (10) показывают, что $\widetilde W_q$ — $E(\varepsilon_{i+1})$-ломаная.

Мы полностью разобрали случаи однозвенных ломаных. Перейдем теперь к основному случаю.

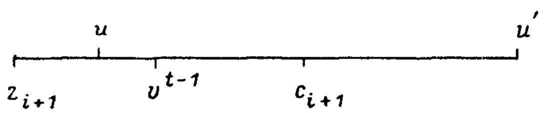

Рис. 3.

Случай 3. $V_s=\{v^j,\ v^{j+1},\ v^{j+2}\}$ — *двузвенная ломаная*. Рассмотрим точку $\xi\in[v^j,\ v^{j+1}]$, для которой

$$|\xi-v^j|=\min(|v^{j+1}-v^j|,\ K|v^j-z_{i+1}|). \tag{12}$$

Применим лемму 2:

$$\bar\rho[v^j,\ \xi]\leqslant\gamma(A\varepsilon_i,\ K)\underset{(5)}{<}\varepsilon_{i+1}. \tag{13}$$

Теперь рассмотрим несколько подслучаев.

Случай 3.1. $\xi\in[v^j,\ c_{i+1}]$.

Покажем, что в этом случае ломаная $\widetilde W_s=\{v^j,\ \xi,\ v^{j+2}\}$ обладает свойством $E(\varepsilon_{i+1})$ и, значит, искомая ломаная W_s может быть получена из $\widetilde W_s$ ED-перестройкой. Требуемая оценка на звене $[v^j,\ \xi]$ справедлива в силу (13). Чтобы оценить плотность множества B на звене $[\xi,\ v^{j+2}]$, рассмотрим два подслучая в соответствии с тем, где достигается минимум в (12).

Случай 3.1.1. $|\xi-v^j|=K|v^j-z_{i+1}|$. Действуя так же, как в случае 2.1, мы проверим требуемое неравенство

$$\rho[\xi,\ u]<\varepsilon_{i+1}\quad\text{при } u\in[v^j,\ v^{j+2}].$$

Случай 3.1.2. $|v^{j+1}-v^j|<K|v^j-z_{i+1}|$. В этом случае на звене $[\xi,v^{j+2}]=[v^{j+1},\ v^{j+2}]$ выполняется даже свойство $D(\varepsilon_{i+1})$. Действительно, применяя лемму 2, мы находим

$$\bar\rho[v^{j+1},\ v^{j+2}]\leqslant\gamma(A\varepsilon_{i+1},\ L)<\varepsilon_{i+1},$$

ибо

$$\frac{|v^{j+2}-v^{j+1}|}{|v^{j+1}-z'_{i+1}|}\leqslant\frac{|z_{i+1}-c_{i+1}|}{|c_{i+1}-z'_{i+1}|}\leqslant L.$$

Случай 3.2. $\xi\in[c_{i+1}, z'_{i+1}]$.

Тем более $v^{j+1}\in[c_{i+1}, z'_{i+1}]$. Действуя так же, как при выводе неравенства (8), получаем

$$|v^j-v^{j+1}|\leqslant|v^j-\xi|+|c_{i+1}-z'_{i+1}|\leqslant(K+1)^2|v^j-z_{i+1}|. \tag{14}$$

Применяя лемму 2, получаем

$$\bar\rho[v^j, v^{j+1}]\leqslant\gamma(A\varepsilon_i,\ \ (K+1)^2)<\varepsilon_{i+1}/2(L+1)^2. \tag{15}$$

Тем более $\bar\rho[v^j, c_{i+1}]<\varepsilon_{i+1}$, т. е. на отрезке $[v^j, c_{i+1}]$ выполнено свойство $D(\varepsilon_{i+1})$ Наша цель — показать, что ломаная $\widetilde{W}_s=\{v^j, c_{i+1}, v^{j+1}\}$ обладает свойством $E(\varepsilon_{i+1})$ (рис. 4). Предположим противное:

$$\rho[c_{i+1}, u]>\varepsilon_{i+1} \tag{16}$$

для некоторой точки $u\in[v^j, v^{j+2}]$, $u=f^l w$, где $w\in[y^j, y^{j+2}]$. Тогда

$$\rho[v^j, u']\geqslant\rho[c_{i+1}, u']\frac{|c_{i+1}-u'|}{|u-u'|}\geqslant\frac{1}{L+1}\rho[c_{i+1}, u']\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{(L+1)L^2}\rho[c_{i+1}, u]>\frac{\varepsilon_{i+1}}{(L+1)^3}. \tag{17}$$

Оценки (15) и (17) показывают, что множество B в отрезках $[v^j, a]$ (где $a\in[v^j, v^{j+1}]$) является менее густым, чем в отрезке $[v^j, u']$. Отсюда следует,

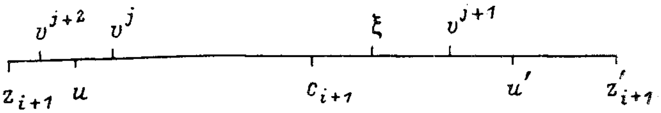

Рис. 4.

что $[v^j, v^{j+1}]\subset[v^j, u']$, причем первый отрезок составляет не слишком большую долю второго. Точнее говоря,

$$\frac{\varepsilon_{i+1}}{(L+1)^3}\underset{(17)}{<}\rho[v^j, u']\leqslant\rho[v^j, v^{j+1}]+\frac{|v^{j+1}-u'|}{|v^j-u'|}\underset{(15)}{\leqslant}\frac{\varepsilon_{i+1}}{2(L+1)^3}+\frac{|v^{j+1}-u'|}{|v^j-u'|}.$$

Следовательно,

$$1+\frac{|v^j-v^{j+1}|}{|v^{j+1}-u'|}=\frac{|v^j-u'|}{|v^{j+1}-u'|}\leqslant\frac{2(L+1)^3}{\varepsilon_{i+1}}\underset{(4)}{<}K.$$

Тем более

$$|v^j-v^{j+1}|<K|v^{j+1}-u'|. \tag{18}$$

Покажем теперь, что отрезок $[u, v^{j+1}]$ составляет не слишком большую часть отрезка $[u, u']$. Действительно,

$$\frac{|u-v^{j+1}|}{|v^{j+1}-u'|}=\frac{|u-c_{i+1}|}{|v^{j+1}-u'|}+\frac{|c_{i+1}-v^{j+1}|}{|v^{j+1}-u'|}\underset{(18)}{\leqslant}L\frac{|u'-c_{i+1}|}{|v^{j+1}-u'|}+K=$$

$$=L\left(1+\frac{|v^{j+1}-c_{i+1}|}{|v^{j+1}-u'|}\right)+K\leqslant L(1+K)+K<(K+1)^2. \tag{19}$$

Кроме того, из (16) следует, что

$$\rho[v^{j+1}, u] \geqslant \rho[u, c_{i+1}] \frac{|u-c_{i+1}|}{|u-u'|} \geqslant \frac{1}{L+1}\rho[u, c_{i+1}] > \varepsilon_{i+1}/(L+1). \tag{20}$$

Применяя лемму 2 с учетом (19) и (20), получаем

$$\bar{\rho}[y^{j+1}, w] \geqslant A^{-1}\gamma^{-1}(\varepsilon_{i+1}/(L+1), \quad (K+1)^2) \underset{(5)}{>} \varepsilon_{i+1},$$

причем $w \in [y^j, y^{j+2}]$. Это противоречит тому, что $Y - D(\varepsilon_i)$-ломаная.

§ 8. Доказательство Основной леммы в несоленоидальном случае

Соленоидальным множеством или *соленоидом* (см. [10]) называется инвариантное множество S следующей структуры:

$$S = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=0}^{p_m-1} f^k I_m,$$

где $I_1 \supset I_2 \supset \ldots$ — последовательность вложенных отрезков, $f^{p_m} I_m \subset I_m$, $p_m \to \infty$. Отметим, что при этом $\operatorname{int} A = \varnothing$ (это следует из отсутствия блуждающих интервалов). Точку a будем называть *соленоидальной*, если она содержится в некотором соленоиде (в действительности может существовать только один такой соленоид). Иными словами, точка a соленоидальна, если она не периодична, но содержится в периодических интервалах сколь угодно малой длины. Для несоленоидальной точки a понятия «слабая точка плотности» и «точка плотности» совпадают.

В этом параграфе мы докажем Основную лемму в случае, когда критическая точка c несоленоидальна. Тогда константа η (см. § 2) может быть заранее выбрана таким образом, что выполняется следующее свойство.

P5. *Если I — периодический интервал, содержащий некоторую точку $f^n x$ $(n \in \mathbb{Z}_+)$, то $\lambda(I) > \eta$.*

Комментарий. Пусть I — периодический интервал с периодом p, содержащий точку $f^n x$. Так как $\omega(x) \ni c$, то $I_s \equiv f^s I \ni c$ для некоторого $s \in [0, p)$. Поскольку точка c несоленоидальна, то $\lambda(I_s) \geqslant \alpha > 0$. Теперь воспользуемся предложением 1: $\lambda(I) = \lambda(f^{p-s} I_s) \geqslant \rho$ для некоторой константы $\rho > 0$.

Будем говорить, что *точка a расположена ближе к критической точке c_i*, чем точка b, если a находится в η-окрестности c_i и $b \notin [a, \tau(a)]$. Точку $x_m = f^m x$ назовем *n-ближайшей* к точке c_i, если она расположена ближе к c_i, чем все точки $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Если $m = n$, то будем говорить просто «*x_n-ближайшая к c_i точка*».

Лемма 4. *Пусть $\{G_i, n_i\}_{i=0}^{k}$ — унимодальное разложение, ассоциированное с орбитой точки x, $G_i \ni c_i$, $c_k = c$. Предположим, что точка c несоленоидальна, $\lambda(G_k) < \xi$. Тогда*

а) *точка x_{n_i} является n_k-ближайшей к точке c_i $(i = 1, \ldots, k)$;*

б) *критические точки c_i попарно различны;*

в) *$k \leqslant d$.*

Замечание. Таким образом, $\operatorname{ord}(f^n x, G) \leqslant d$ для достаточно малых окрестностей G.

Доказательство. Импликации а) $\Rightarrow$ б) $\Rightarrow$ в) очевидны. Докажем а). Предположим, что x_l лежит ближе к c_i, чем x_{n_i} для некоторого $i \in [1, k)$, $l \in [0, n]$. Тогда $i < k$, $l < n$ в силу свойства D2 унимодальных разложений (см. § 3). Рассмотрим теперь два случая.

(i) $l < n_i$. Тогда

$$\operatorname{int} G_k \supset \operatorname{int}(f^{n_k - n_i} G_i) \ni f^{n_k - n_i} x_l = x_{n_k - (n_i - l)}$$

(второе включение выполняется, поскольку орбита точки x не проходит через экстремумы), и мы получили противоречие со свойством D2.

(ii) $l > n_i$. Положим $p = l - n_i \in (0, n - n_i)$ и рассмотрим сужение $f^p | G_i$. В силу свойства P5 $f^p G_i \not\subset G_i$. Следовательно, $\operatorname{int}(f^p G_i)$ содержит x_{n_i} или $\tau(x_{n_i})$ и, значит, $\operatorname{int}(f^{p+1}G_i) \ni x_{n_i+1}$. Применяя f^{n_k-l-1} к этому включению, получаем

$$x_{n_k-p} = f^{n_k-l-1} x_{n_i+1} \in \operatorname{int}(f^{n_k-l-1}(f^{p+1}G_i)) = \operatorname{int}(f^{n_k-n_i}G_i).$$

Следовательно, $x_{n_k-p} \in \operatorname{int} G_k$, и мы снова пришли к противоречию. Лемма доказана.

Рассмотрим окрестность G, симметричную относительно c, и сразу предположим, что $\lambda(G) < \xi$ (где ξ определена в § 2). Пусть теперь x — точка плотности множества X, n — момент первого попадания орбиты $\{f^m x\}_{m=0}^{\infty}$ в $\operatorname{int} G$. Построим максимальное унимодальное разложение $\{G_i, n_i\}_{i=0}^{k}$, ассоциированное с точкой x, для которого $G_k = G$, $n_k = n$ (см. § 3). В силу предложения 1 $\lambda(G_0) \to 0$ при $\lambda(G) \to 0$, следовательно, и $\rho(G_0) \to 0$. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$, если окрестность G достаточно мала, то

$$\rho(G_0) < \varepsilon_0 = \sigma \circ^d (\varepsilon/L^2),$$

где функция σ определена в § 3.

Отметим сразу, что $\varepsilon_0 \leqslant \sigma \circ^k (\varepsilon/L^2)$, ибо по лемме 4 $k \leqslant d$. Применив лемму 3 k раз, мы построим стандартную $D(\varepsilon/L^2)$-ломаную, начинающуюся в точке x_n, оканчивающуюся в $z_k \equiv \zeta^0$ и содержащуюся в отрезке $[z_k, x_n]$. Рассмотрим последнее звено $J^0 = [\zeta^0, \zeta^1] \ni x_n$ этой ломаной. Так как $\rho(J^0) \leqslant \varepsilon/L^2$, то $\rho(J^0 \cup \tau(J^0)) \leqslant \varepsilon$. Рассмотрим теперь интервал $I_1 = G \setminus (J^0 \cup \tau(J^0)) \subset [x_n, \tau(x_n)]$ и повторим рассуждение, заменив G на I_1. Таким способом мы построим последовательность вложенных интервалов $G = I_0 \supset I_1 \supset \ldots$, симметричных относительно c, и такую, что

1) $\rho(I_m \setminus I_{m+1}) \leqslant \varepsilon$;

2) $I_{m+1} \subset [x_{s_m}, \tau(x_{s_m})]$, где s_m — момент первого попадания траектории $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ в $\operatorname{int} G_m$. Из последнего свойства вытекает, что $\bigcap_{m=0}^{\infty} I_m = \{c\}$. Следовательно, $G \setminus \{c\} = \bigcup_{m=0}^{\infty} (I_m \setminus I_{m+1})$ и, значит, $\rho(G) \leqslant \sup_m \rho(I_m \setminus I_{m+1}) \leqslant \varepsilon$. Отсюда следует требуемое, так как G — произвольный симметричный интервал достаточно малой длины.

§ 9. Доказательство Основной леммы в соленоидальном случае

Будем говорить, что соленоидальный аттрактор S является *d-модальным*, если он содержит d экстремумов. Заменяя M на орбиту симметричного относительно c периодического отрезка I_m из системы, порождающей соленоид (см. начало § 8), мы можем считать, что *все критические точки отображения f лежат на соленоиде*.

Пусть, как и ранее, x — точка плотности множества X, $\omega(x) = S$, $\{G_i, n_i\}_{i=0}^{k}$ — некоторое максимальное унимодальное разложение, ассоциированное с точкой x. Мы не можем утверждать, как в лемме 4, что это разложение имеет низкий порядок, но зато можем более детально описать его структуру. Этому посвящены следующие две леммы. Положим $F_i = [x_{n_i}, \tau(x_{n_i})]$.

Лемма 5. *Пусть $\lambda(G_k) < \xi$. Тогда*

а) *последовательность экстремумов $c_i \in G_i$ периодична с периодом d;*

б) *$f^{n_{i+d}-n_i} F_i \subset F_i$ при $i \in [1, k-d]$;*

в) *$f^{n_{i+r}-n_i} F_i \ni c_{i+r}$ при $i \in [1, k-d]$, $r \in [1, d]$;*

г) x_{n_i} *является* $(n_{i+d}-1)$*-ближайшей к* c_i *точкой при* $i\in[1, k-d]$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что $x_l\notin \operatorname{int} G_i$ при $l<n_i$. Действительно, в противном случае, применяя $f^{n_k-n_i}$, получаем, что $x_{n_k-(n_i-l)}\in \in \operatorname{int} G_k$, вопреки определению унимодального разложения. Следовательно, x_{n_i} является ближайшей к c_i точкой.

Предположим теперь, что экстремумы $c_i, c_{i+1}, \ldots, c_{l-1}$ попарно различны, а $c_l=c_i$. Тогда

$$f^{n_l-n_i}F_i\subset f^{n_l-n_i}G_i\subset G_l\subset F_i \tag{21}$$

(последнее включение имеет место, поскольку интервал $\operatorname{int} G_l$ симметричен и не содержит x_i). Таким образом, отрезок F_i периодичен с периодом n_l-n_i.

Пусть $0=m_1, m_2, \ldots, m_s$ — моменты времени, в которые отрезки f^mF_i, $m\in[0, n-n_i-1]$ содержат экстремумы. При этом каждый отрезок $f^{m_j}F_i$ ($j= =1, \ldots, s$) содержит ровно один экстремум, поскольку $\lambda(G_k)<\xi$ (здесь надо снова использовать свойства P2, P3). По определению унимодального разложения набор $\{m_j\}_{j=1}^s$ содержится в наборе $\{n_t-n_i\}_{t=i}^{l-1}$. Следовательно, $s\leqslant l-i\leqslant d$. Но поскольку S — d-модальный соленоид, то инвариантное подмногообразие

$$\mathscr{O}_{i,l}=\bigcup_{m=0}^{n_l-n_i-1} f^mF_i$$

содержит все экстремумы отображения f и, значит, $s\geqslant d$. Следовательно, $s=l-i=d$, наборы $\{m_j\}_{j=1}^s$ и $\{n_t-n_i\}_{t=i}^{l-1}$ совпадают и $\{c_i, c_{i+1}, \ldots, c_{l-1}\}=C$.

Таким образом, в последовательности $\{c_t\}_{t=1}^k$ между ближайшими повторяющимися экстремумами содержатся все остальные экстремумы. Отсюда, конечно, вытекает пункт а). Пункт б) вытекает из (21), ибо, как мы показали, $l=i+d$. Пункт в) при $r<d$ следует из совпадения наборов $\{m_j\}_{j=1}^s$ и $\{n_t-n_i\}_{t=i}^{l-1}$.

Чтобы доказать пункт в) при $r=d$, рассмотрим отрезки F_i^ν, $\nu=\pm1$, на которые точка c_i разбивает отрезок F_i. Если в) нарушается при $r=d$, то

$$f^{n_{i+d}-n_i}F_i^\nu\subset \operatorname{int} F_i^\nu \tag{22}$$

для некоторого $\nu\in\{\pm1\}$. Кроме того,

$$f^rF_i\cap F_i=\varnothing \quad (r=1, \ldots, n_{i+d}-n_i-1). \tag{23}$$

Действительно, в противном случае f^rF_i содержит x_{n_i} или $\tau(x_{n_i})$. Применяя $f^{n_k-r-n_i}$, получаем, что G_k содержит x_{n_k-r}, что противоречит определению унимодального разложения.

Из (22), (23) следует, что инвариантное подмногообразие $\bigcup\limits_{m=1}^{n_{i+d}-n_i} f^mF_i^\nu$ не содержит точку c_i. Это противоречит тому, что $\omega(x)\ni c_i$. Пункт в) доказан полностью.

Доказательство последнего пункта основано на аналогичных соображениях. Пусть $l\in[n_i+1, n_{i+d}]$ — первый момент, для которого x_l лежит ближе к c_i, чем x_{n_i}. Тогда

$$f^mG_i\subset F_i \text{ при } m=l-n_i,\quad f^mG_i\cap \operatorname{int} F_i=\varnothing \quad (m=1, \ldots, l-n_i-1). \tag{24}$$

Действительно, в противном случае f^mG_i содержит x_{n_i} или $\tau(x_{n_i})$. Применяя $f^{n_k-m-n_i}$, получаем, что G_k содержит x_{n_k-m} — противоречие.

Так как S — d-модальный соленоид, то из (24) вытекает, что орбита $\bigcup\limits_{m=0}^{l-n_i-1} f^mG_i$ содержит все экстремумы c_j, а $f^{l-n_i}G_i\ni c_i$. Ясно, что это возможно только при $l=n_{i+d}$. Лемма доказана.

Обозначим через H_n максимальный интервал монотонности функции f^n, содержащий точку x. Концами отрезка H_n являются либо прообразы экстремумов, либо граничные точки многообразия M. Положим $M_n = f^n H_n$. Через $M_n^{\pm}$ обозначим отрезки, на которые точка x_n разбивает отрезок M_n. При этом условимся считать, что компонента $M_{n_i}^-$ лежит дальше от c_i, чем $M_{n_i}^+$.

Лемма 6. *Пусть $\lambda(G_k) < \xi$. Существует γ (не зависящее от разложения) такое, что при $n_i \geqslant \gamma$ и $d \leqslant i \leqslant k-d$ имеем:*

а) $M_{n_i}^-$ *содержит* $x_{n_{i-d}}$ *или* $\tau(x_{n_{i-d}})$;

б) $M_{n_i}^+ \supset F_i \cap f^{n_i - n_{i-1}} F_{i-1} \ni c_i$.

Доказательство. Существует такое $\gamma \in \mathbb{Z}_+$, что $\partial H_\gamma \not\subset \partial M$ и, значит, H_γ оканчивается в прообразах экстремумов. Тогда это относится и к интервалам H_{n_i} при $n_i \geqslant \gamma$. Следовательно, существуют $t_\nu \in (0, n_i)$, $\nu = \pm 1$ такие, что интервалы $f^{t_\nu} H_{n_i}$ оканчиваются в некоторых экстремумах $c_j^\nu \, (i-d \leqslant j < i)$, причем

$$f^{n_i - t_\nu} V^\nu = M_{n_i}^\nu,$$

где

$$V^\nu = [x_{t_\nu}, \; c_j^\nu].$$

Рассмотрим теперь два случая.

(i) $t_\nu > n_j$. Поскольку $t_\nu < n_i \leqslant n_{j+d}$, то по лемме 5, г)

$$V^\nu \cup \tau(V^\nu) \equiv [x_{t_\nu}, \; \tau(x_{t_\nu})] \ni x_{n_j}.$$

Применяя $f^{n_i - t_\nu}$, мы заключаем, что

$$M_{n_i}^\nu \ni x_{n_i - (t_\nu - n_j)}. \tag{25}$$

Поскольку $x_{n_{i-d}}$ является n_i-ближайшей к c_i точкой (лемма 5, г)), то из (25) следует требуемое (пункт б) — с большим запасом).

(ii) $t_\nu = n_j$. Тогда

$$M_{n_i}^\nu = f^{n_i - t_\nu} V^\nu = f^{n_i - n_j} F_j \supset f^{n_i - n_{i-1}} F_{i-1} \ni c_i \tag{26}$$

(два последних включения — по лемме 5, в)). Это возможно только при $\nu = +1$, и в этом случае (26) доказывает утверждение б).

(iii) $t_\nu < n_j$. Покажем, что этот случай исключен. С помощью обычного рассуждения мы убеждаемся, что $R^\nu = V^\nu \cup \tau(V^\nu)$ — периодический интервал с периодом $n_j - t_\nu$ и, следовательно, один из интервалов $\operatorname{int}(f^m R^\nu) = \operatorname{int}(f^m V^\nu)$, $m = 1, \ldots, n_j - t_\nu$ содержит экстремум. Но это невозможно, поскольку отображение $f^{n_i - t_\nu} \mid V^\nu$ монотонно. Лемма доказана.

Перейдем к доказательству Основной леммы в соленоидальном случае. Пусть $F_0 = [z_0, z_0']$ — маленький непериодический c-симметричный интервал. Мы должны показать, что плотность $\rho(F_0)$ множества $B = M \setminus X$ в этом интервале мала.

Зафиксируем малое $\varepsilon > 0$, большое $K > 2/\varepsilon$, а затем столь малое $\delta > 0$, что

$$\sigma \circ^{3d}(\delta) < \varepsilon/2L^2, \quad \sigma \circ \gamma(\delta, K) < \varepsilon/2L^2, \tag{27}$$

где γ и σ — функции из Второй леммы об искажении и леммы 3 соответственно.

Рассмотрим последовательность ближайших к c точек x_{m_k} $(k = 1, 2, \ldots)$ траектории $\{f^m x = x_m\}_{m=0}^{\infty}$, лежащих в $\operatorname{int} F_0$, $0 < m_1 < m_2 < \ldots$. Положим

$$F_k = [x_{m_k}, \; \tau(x_{m_k})] = [z_k, \; z_k'],$$

где точки z_k лежат по одну сторону от c.

Если интервал F_0 достаточно мал, то имеет место следующее свойство: *для любого интервала $G_0 \ni x$ такого, что $f^{m_k} G_0 \subset F_0$ при некотором k, выполняется* $\rho(G_0) < \delta$.

Пусть $F_k^- = [z_k, c]$ и l — первый номер, для которого

$$\lambda(F_0^{\pm} \setminus F_l^{\pm}) / \lambda(F_l^{\pm}) > K. \tag{28}$$

Пусть $k \in [1, l]$. Если $\operatorname{ord}(f^{m_k} x, F_{k-1}) \leqslant 3d$, то по лемме 3 (с учетом первого неравенства (27)) существует $D(\varepsilon/2)$-ломаная, соединяющая z_k с z_{k-1} и лежащая в $[z_{k-1}, c]$. В частности, такая ломаная существует при $k = 1, 2$, поскольку отрезок F_0 непериодичен.

Предположим теперь, что $\operatorname{ord}(f^{m_k} x, F_{k-1}) > 3d$. Пусть $\bar{z}_{k-1}$ — та из точек z_{k-1}, z'_{k-1}, которая лежит с той же стороны от c, что и точка x_{m_k}. По лемме 6 $M_{m_{k-1}} \supset [\bar{z}_{k-2}, c]$, а в силу выбора l

$$|x_{m_{k-1}} - \bar{z}_{k-2}| \leqslant K |x_{m_{k-1}} - c|.$$

Применяя Вторую лемму об искажении, получаем

$$\bar{\rho}[x_{m_{k-1}}, \bar{z}_{k-2}] \leqslant \gamma(\delta, K) \equiv \delta_1.$$

Таким образом, $\{x_{m_{k-1}}, \bar{z}_{k-2}\}$ является однозвенн й $D(\delta_1)$-ломаной. По лемме 3 существует $D(\sigma(\delta_1))$-ломаная, ведущая из x_{m_k} в $\bar{z}_{k-1}$. Заменив ее при необходимости на симметричную ломаную, мы получим (в силу второго неравенства (27)) $D(\varepsilon/2)$-ломаную, ведущую из z_k в z_{k-1} и лежащую в $[z_{k-1}, c]$.

Итак, всегда существует $D(\varepsilon/2)$-л маная, ведущая из z_k в z_{k-1} и лежащая в $[z_{k-1}, c]$, $k = 1, \ldots, l$. Объединение этих ломаных является $D(\varepsilon/2)$-ломаной, ведущей из z_l в z_0 и лежащей в $[z_0, c]$. Переделаем эту ломаную в стандартную и рассмотрим ее последнее звено J. Имеем $J \supset [z_0, z_l]$ и $\rho(J) < \varepsilon/2$. Следовательно,

$$\rho(F_0^-) \leqslant \frac{\lambda(F_l^-)}{\lambda(F_0^-)} + \rho(J) \underset{(28)}{\leqslant} \frac{1}{K} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Следовательно, $\rho(F_0) < L^2 \varepsilon$, и мы получаем требуемое.

Основная лемма, а вместе с ней и теорема 1 доказаны.

Литература

[1] **Milnor J.** On the concept of attractor // Com. Math. Phys. 1985. Vol. 99. P. 177—195.

[2] **Блох А. М., Любич М. Ю.** Аттракторы преобразований отрезка // Функцион. анализ и его прил. 1987. Т. 21, вып. 2. С. 70—71.

[3] **Блох А. М., Любич М. Ю.** О типичном поведении траекторий преобразований отрезка // Теория функций, функцион. анализ и их прил. 1988. Вып. 49. С. 5—16.

[4] **Herman M.** Sur la conjugation differentiable des diffeomorphisms du cercle à de rotations // Publ. Math. IHES. 1979. Vol. 49. P. 5—233.

[5] **Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В.** Эргодическая теория. М.: Наука, 1980. 383 с.

[6] **Singer D.** Stable orbits and bifurcations of maps of the interval // Siam. J. Appl. Math. 1978. Vol. 35. P. 260—267.

[7] **Бунимович Л. А., Песин Я. Б., Синай Я. Г., Якобсон М. В.** Эргодическая теория гладких динамических систем. Сер. Современные проблемы математики. Т. 2. М.: ВИНИТИ, 1985. С. 113—232.

[8] **Collet P.** Ergodic properties of some unimodal mappings of the interval. Preprint Institute Mittag-Leffler. Rep. 11-1984.

[9] **Sullivan D.** Quasiconformal homeomorphisms and dynamics, I // An. Math. 1985. Vol. 122. P. 401—418.

[10] **Блох А. М.** О динамических системах на одномерных разветвленных многообразиях, I // Теория функций, функцион. анализ и их прил. 1986. Вып. 46. С. 8—18.
[11] **Голузин Г. М.** Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.; Л.: ГИТТЛ, 1952. 540 с.
[12] **Van Strien S.** On the bifurcations creating horseshoes // Springer Lecture Notes Math. 1981. Vol. 98. P. 316—351.
[13] **Guckenheimer J.** Limit sets of S-unimodal maps with zero entropy // Com. Math. Phys. 1987. Vol. 110. P. 655—659.

Арктический и антарктический
научно-исследовательский институт
Ленинград

Поступила 27 июня 1988 г.

Примечание при корректуре

Результаты настоящей работы распространяются на класс C^∞-гладких преобразований с неплоскими критическими точками. Кроме того, авторы показали, что на каждом минимальном аттракторе существует единственная σ-конечная абсолютно непрерывная инвариантная мера μ. Если μ конечна, то $h_\mu(f) > 0$.