A. K. Rybnikov, Spaces with an affine torsion-free connection of the first order, *Uspekhi Mat. Nauk*, 1962, Volume 17, Issue 2, 198–200

Теорема 2. *Пусть A — абелево многообразие размерности $n>0$; p^f — число точек p-го порядка на нем. Тогда локализация A_* изогенна группе* $fG_{1,0}+\sum\limits_i G_{n_i,\, m_i}$, *где* $\sum n_i = \sum m_i = n - f$, $m_i \neq 0$; *в сумму* $\sum G_{n_i,\, m_i}$ *любая группа* $G_{n,\, m}$ *входит с той же кратностью, что и группа* $G_{m,\, n}$.

(Предположение Барзотти, согласно которому всегда $m_i=1$, неверно. Из теоремы 2 вытекает, что оно справедливо при $n-f\leqslant 2$ — результат, высказанный Барзотти без доказательства: ср. [5].)

3. Представляет интерес выяснение того, насколько может быть обширен класс неизоморфных алгебраических групп, локализации которых изоморфны. Для решения этого вопроса требуется, однако, предварительно описать формальные группы с точностью до изоморфизма. Такое описание известно пока только для размерности 2 (Ю. Манин [4]). Поэтому мы ограничимся примерами. Они показывают, что ответы могут быть существенно разными.

Пример 1. Существуют алгебраические системы ненулевой размерности двумерных алгебраических групп, обладающие тем свойством, что для каждой группы в этой системе есть только конечное число изоморфных ей членов этой же системы. В то же время среди локализаций этих групп может быть только конечное число попарно неизоморфных, если для общего члена системы $f=2$.

Пример 2. Аналогичная алгебраическая система двумерных абелевых многообразий, локально изогенных группе $G_{1,1}+G_{1,1}$, при локализации переходит в целую алгебраическую систему той же (именно, единичной) размерности формальных групп.

Поступило в Правление Общества 17 октября 1961 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] J. Dieudonne, Lie groups and Lie hyperblgebras over a field of characteristic $p>0$ (VI), Amer. Journ. Math. 89, № 2 (1957), 331—338.

[2] К. Шевалле, Теория групп Ли, т. II, М., ИЛ, 1958.

[3] J. Dieudonné, Sur les groups formels abéliens unipotents, Rend. Circ.Mat. di Palermo, Ser. II, 5, № 2 (1956), 170—180.

[4] Ю. Манин, Двумерные формальные абелевы группы, ДАН 143, № 1 (1962).

[5] I. Barsotti, Abelian varieties over fields of positive characteristic, Rend. Circ. Mat. di Palermo, ser. II, 5, IV, 2 (1956), 145—169.

А. К. Рыбников «О пространствах аффинной связности без кручения 1-го класса».

В N-мерном аффинном пространстве R_N рассмотрим n-мерную поверхность. К каждой точке M этой поверхности присоединим n-мерную плоскость S (базовую плоскость), проходящую через эту точку, и $(N-n)$-мерную плоскость Σ (опорную плоскость), имеющую с S только одну общую точку M. В многообразии базовых плоскостей S устанавливается аффинная связность путем проектирования соседней базовой плоскости на исходную параллельно исходной опорной плоскости Σ. Задача погружения n-мерного пространства аффинной связности A_n в R_N состоит в отыскании в R_N такой n-мерной поверхности, оснащенной базовыми и опорными плоскостями, на которой связность, установленная путем проектирования, совпала бы со связностью в A_n. В такой постановке задача погружения рассматривалась в работах Г. Ф. Лаптева [1], [2], О. Гальвани [3] и автора [4], [5]. В настоящей работе мы рассматриваем пространства A_n без кручения 1-го класса. В этом случае реализующая поверхность является гиперповерхностью, базовые плоскости — гиперплоскостями, а опорные плоскости — прямыми.

Доказано, что если тензор Риччи невырожден, то при реализации пространства 1-го класса базовой гиперплоскостью является касательная гиперплоскость. Опираясь на это, мы доказываем 2 следующие теоремы.

Теорема 1. *Для того чтобы пространство аффинной связности без кручения с невырожденным тензором Риччи R_{ij} было пространством 1-го класса, необходимо, чтобы его тензор кривизны имел вид*

$$R_{jkl}=\frac{1}{n-1}\,p^{ab}R_{ba}\cdot p_{j\,[k}\delta^{i}_{l]}-p^{ia}\;p_{j[k}\,R_{\underset{\smile}{a}l]},$$

где p_{ij} — симметричный невырожденный тензор, удовлетворяющий уравнениям

$$p_{i\,[j\,|\,k]}=0,$$

а p^{ij} — тензор, компонентами которого являются элементы матрицы $\|p^{ij}\|$, обратной матрице $\|p_{ij}\|$.

Теорема 2. *Для того чтобы пространство эквиаффинной связности без кручения с невырожденным тензором Риччи R_{ij} было пространством 1-го класса, необходимо и достаточно, чтобы его тензор кривизны имел вид*

$$R^{i}_{jkl}=\frac{1}{n-1}\,p^{ab}R_{ba}\cdot p_{j\,[k}\delta^{i}_{l]}-p^{ia}p_{j\,[k}R_{l]\,a}\,,$$

где p_{ij} — симметричный невырожденный тензор, а p^{ij} — тензор, компонентами которого являются элементы матрицы $\|p^{ij}\|$, обратной матрице $\|p_{ij}\|$, причем

1°. $R_{ij}=R_{ji}$ *(условие эквиаффинной связности)*,

2°. $p_{i\,[j\,|\,k]}=0$,

3°. $q_{ijk}=0$, *где*

$$q_{ijk}\equiv R_{i\,[j\,|\,k]}+p^{ab}p_{ib\,|\,[j}R_{k]a}+\frac{1}{n-1}\,p^{ab}R_{ba\,|\,[j}p_{k]\,i}+\frac{1}{n-1}\,R_{ba}p^{al}p^{bm}p_{lm\,|\,[k}p_{j]\,i}.$$

Нами получены уравнения гиперповерхности с оснащением, индуцирующим эквиаффинную связность. Рассмотрение этих уравнений позволяет доказать следующие теоремы, частично перекрывающиеся с теоремами, которые доказаны другими способами в книгах П. А. и А. П. Широковых [6] и А. П. Нордена [7].

Теорема 3. *n-мерное пространство эквиаффинной связности 1-го класса без кручения с невырожденным тензором Риччи может быть реализовано в R_{n+1} на релятивно оснащенной гиперповерхности и притом только на релятивно оснащенной гиперповерхности.*

Теорема 4. *Проективно-евклидовы пространства эквиаффинной связности 1-го класса размерности $n>2$ с невырожденным тензором Риччи могут быть реализованы в R_{n+1} на гиперповерхностях, оснащенных центроаффинно, и притом только на центроаффинно оснащенных гиперповерхностях.*

Теорема 5. *Для того чтобы проективно-евклидово пространство размерности $n>2$ с невырожденным тензором Риччи было пространством 1-го класса, необходимо и достаточно, чтобы оно было пространством эквиаффинной связности. При этом достаточное условие имеет силу для любого n.*

Теорема 6. n-мерные ($n>2$) *проективно-евклидовы эквиаффинные связности с невырожденным тензором Риччи R_{ij}, обладающие ковариантно постоянным инвариантом $R=\mathrm{Det}\,\|R_{ij}\|$, реализуются в R_{n+1} на гиперсферах, оснащенных аффинными нормалями Бляшке, и притом только на них.*

Теорема 7. *Аффинная связность, индуцированная в R_{n+1} на гиперквадрике ранга n аффинными нормалями Бляшке, является связностью риманова пространства постоянной кривизны.*

В заключительной части работы рассмотрены симметрические пространства 1-го класса. Доказана

Теорема 8. *Никаких симметрических пространств аффинной связности A_n ($n>2$) 1-го класса с невырожденным тензором Риччи, у которых матрица, составленная из компонент тензора кривизны:*

$$\|R^{i}_{jkl}\|,$$

где i обозначает строки, а j, k, l — столбцы, имеет ранг > 2, отличных от римановых пространств постоянной кривизны, не существует.

Поступило в Правление Общества 11 сентября 1961 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. Ф. Лаптев, О выделении одного класса внутренних геометрий, индуцированных на поверхности пространства аффинной связности, ДАН **41**, № 8 (1943), 329—331.

[2] Г. Ф. Лаптев, О погружении пространства аффинной связности в аффинное пространство, ДАН **47**, № 8 (1945), 551—554.

[3] O. Galvani, La réalisation des connexions ponctuelles affines et la géometrie des groupes de Lie, Journ. Math. pures et appl. **25** (1946), 209—239.

[4] А. К. Рыбников, О погружении 3-мерного пространства аффинной связности с кручением в 7-мерное аффинное пространство, Вестн. МГУ, сер. матем и мех., № 5 (1959).

[5] А. К. Рыбников, О погружении пространства аффинной связности с кручением в аффинное пространство, Вестн. МГУ, сер. матем. и мех., № 1 (1960).

[6] П. А. Широков и А. П. Широков, Аффинная дифференциальная геометрия, М., Физматгиз, 1959.

[7] А. П. Норден, Пространства аффинной связности, М.—Л., Гостехиздат, 1950.