Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

М. А. Лифшиц, Гауссовские большие уклонения гладкой полунормы,
Зап. научн. сем. ЛОМИ, 1992, том 194, 106–113

https://www.mathnet.ru/znsl5010

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.85
16 декабря 2025 г., 15:39:19

М.А.Лифшиц

ГАУССОВСКИЕ БОЛЬШИЕ УКЛОНЕНИЯ ГЛАДКОЙ ПОЛУНОРМЫ

Постановка задачи. Пусть X - локально-выпуклое пространство; η - X-значный случайный вектор с распределением $\mathbf{P}$. Предполагается, что $\mathbf{P}$ - центрированная радонова гауссовская мера, заданная на борелевской σ-алгебре X.

Пусть $q: X \to \mathbf{R}^1$ - непрерывная полунорма. Естественным образом возникает задача изучения точной асимптотики больших уклонений

$$\mathbf{P}\{x \in X \mid q(x) \geq R\} = \mathbb{P}\{q(\eta) \geq R\}, \quad R \to \infty .$$

Мы будем рассматривать частный случай этой задачи, а именно, ситуацию, когда асимптотика уклонений определяется поведением полунормы в одном единственном направлении, и в соответствующей экстремальной точке полунорма q дважды дифференцируема. Наша цель - установить соотношение вида

$$\mathbb{P}\{q(\eta) \geq R\} \sim C(1-\Phi(R/\sigma)), \tag{I}$$

где C и σ - некоторые постоянные, зависящие от q и $\mathbf{P}$; Φ - функция распределения стандартного гауссовского закона $\mathcal{N}(0,1)$, а запись вида $f \sim g$ (или $f <\sim g$) означает здесь и далее, что функции f и g подчиняются асимптотическому соотношению

$$\lim_{R\to\infty} f(R)/g(R) = 1 \quad \left(\text{или } \limsup_{R\to\infty} f(R)/g(R) \leq 1\right).$$

Асимптотика вида (I) появляется в целом ряде работ [3-9], начиная со статьи Золотарева, написанной около тридцати лет назад. В несколько иной постановке подобная асимптотика для распределений функционалов от многомерного винеровского процесса получена в работе Шильдера (см.[II; I0, гл.5]). В статье Талаграна [8] имеются необходимые и достаточные условия для того, чтобы асимптотика больших уклонений имела вид (I) с $C = 2$. Недавно Линде в [4] сформулировал для конечномерного случая условия, объясняющие природу происхождения асимптотики (I). В данной статье будет получен бесконечномерный аналог результата Линде и, тем самым, найдена общая формулировка, объемлющая ряд

© М. А. Лифшиц, 1992

результатов Золотарева, Линде, Добрича, Маркуса и Вебера.

Прежде чем формулировать основной результат, напомним некоторые базовые понятия из теории гауссовских мер. Пусть X^* - пространство, сопряженное к X, т.е. пространство линейных непрерывных функционалов, заданных на X. Обозначим X^*_P гильбертово пространство линейных измеримых функционалов, определяемое как пополнение X^* по норме пространства $L^2(X,P)$. Пусть $I^*: X^* \to X^*_P$ - естественное вложение. Тогда существует сопряженный оператор $I: X^*_P \to X$ и оператор $K \equiv II^*: X^* \to X$ оказывается корреляционным оператором меры P, т.е. для любых $f, g \in X^*$ справедливы равенства

$$f(Kg) = g(Kf) = \mathbf{E} f(\eta) g(\eta) = \int_X fg \, dP.$$

Линейное пространство $H \equiv I(X^*_P)$ называется ядром меры P, а функционал действия определяется соотношением

$$J(x) \equiv \infty, \quad x \notin H; \quad J(x) \equiv \inf\{|z|^2 \mid z \in I^{-1}(x)\}, \; x \in H.$$

Компактное множество $\mathcal{E} \equiv \{x \mid J(x) \leq 1\} \subset H \subset X$

называется эллипсоидом рассеивания меры P.

Теперь мы в состоянии дать точную формулировку двух условий, определяющих рассматриваемую ситуацию.

УСЛОВИЕ (А). Существует такой вектор $x_0 \in X$, что экстремальное значение

$$\sigma \equiv \max_{\{x \in X \mid q(x)=1\}} J(x)^{-1/2} \tag{2}$$

положительно и достигается только в точках x_0 и $-x_0$.

УСЛОВИЕ (Б). Полунорма q дважды дифференцируема в точке x_0, т.е. существует такой линейный функционал f и такая билинейная форма $\mathcal{A}$, что

$$q(x) = 1 + f(x - x_0) + \frac{1}{2} \mathcal{A}(x - x_0, x - x_0) + o(q^2(x - x_0)). \tag{3}$$

Сделаем несколько замечаний, поясняющих сформулированные условия.

I. Исключенный из рассмотрения в условии (А) случай $\sigma = 0$ сводится ввиду единственности x_0 к тривиальному случаю одномерного X и вырожденной меры P.

2. Величину σ можно переписать в виде

$$\sigma = \max_{\{x \in X \mid J(x) \leq 1\}} q(x) = \max_{x \in \mathcal{E}} q(x) .$$

Учитывая непрерывность q и компактность $\mathcal{E}$, убеждаемся, что максимум в (2) действительно достигается. Таким образом, смысл условия (А) заключается в единственности экстремального направления x_0.

3. Однородность полунормы q соответствующим образом отражается на свойствах функционала f и оператора $\mathcal{A}$. Сравнивая разложение (3) с тождеством

$$q(x_0 + c x_0) = (1+c) q(x_0) = 1 + c ,$$

получаем равенства

$$f(x_0) = 1, \quad \mathcal{A}(x_0, x_0) = 0 . \tag{4}$$

<u>Основной результат</u>. Положим

$$C \equiv 2 \mathbf{E} \exp\{\mathcal{A}(\eta,\eta)/2\sigma^2\} . \tag{5}$$

ТЕОРЕМА I. Пусть η – гауссовский вектор и его распределение $\mathbf{P}$ удовлетворяет условиям (А) и (Б). Если $C < \infty$, то асимптотика больших уклонений подчиняется соотношению (I), причем константы σ и C определяются соотношениями (2) и (5).

ЗАМЕЧАНИЕ. Простые двумерные примеры показывают, что при $C = \infty$ даже выполнение условий (А) и (Б) не гарантирует, что асимптотика больших уклонений будет иметь вид (I).

В данной статье мы ограничимся схемой доказательства теоремы I, оставляя в стороне ряд технических подробностей, связанных, главным образом, с интегральным оцениванием остаточных членов в разложении (3) и классическими оценками больших уклонений [I, 2].

СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ I. Важную роль в наших рассуждениях будет играть случайный вектор $\eta_0 \equiv \eta - f(\eta) x_0$. Нетрудно проверить, что слагаемые в правой части разложения

$$\eta = \eta_0 + f(\eta) x_0 \tag{6}$$

независимы, а случайная величина $f(\eta)$ распределена по

нормальному закону с дисперсией σ^2. Поэтому можно записать вероятность больших уклонений по формуле полной вероятности

$$\mathbb{P}\{q(\eta)>R\}=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathbb{P}\{q(\eta_0+rx_0)>R\}(2\pi)^{-1/2}\sigma^{-1}exp\{-r^2/2\sigma^2\}dr. \qquad (7)$$

При $|r|>R$ вероятность под знаком интеграла равна единице. В области интегрирования $\{|r|\leq R\}$ делается обычная для таких случаев замена переменной $|r|=R-v/R$. В результате приходим к выражению

$$\mathbb{P}\{q(\eta)>R\}=2[1-\Phi(R/\sigma)]+$$

$$+2(2\pi)^{-1/2}\sigma^{-1}R^{-1}\int_0^{R^2}\mathbb{P}\{q(x_0+\eta_0/|r|)>R/|r|\}exp\left\{\frac{2v-v^2/R^2}{2\sigma^2}\right\}dv\,exp\{-R^2/2\sigma^2\}.$$

Применяя разложение (3) к значению $q(x_0+\eta_0/r)$ при фиксированном v и $r, R\to+\infty$, получим

$$\mathbb{P}\{q(x_0+\eta_0/|r|)>R/|r|\}\approx\mathbb{P}\left\{1+f(\eta_0)/r+A(\eta_0,\eta_0)/2r^2>1+\frac{R-r}{r}\right\}.$$

Из определения η_0 видно, что $f(\eta_0)=f(\eta)(1-f(x_0))=0$. Поэтому изучаемая вероятность примет вид

$$\mathbb{P}\left\{A(\eta_0,\eta_0)/2>r^2\frac{(R-r)}{r}\right\}=\mathbb{P}\{A(\eta_0,\eta_0)/2>r(R-r)\}=$$

$$=\mathbb{P}\{A(\eta_0,\eta_0)/2>rv|R\}=\mathbb{P}\{A(\eta,\eta)/2>rv/R\}.$$

Отбрасывая несущественные члены, мы приходим к представлению

$$\mathbb{P}\{q(\eta)>R\}\sim 2[1-\Phi(R/\sigma)]+$$

$$+2(2\pi)^{-1/2}\sigma^{-1}R^{-1}\int_0^\infty \mathbb{P}\{\mathcal{A}(\eta,\eta)/2>v\}\exp\{v/\sigma^2\}\,dv\,\exp\{-R^2/2\sigma^2\}\,.$$

Учитывая классическую оценку хвоста нормального закона

$$1-\Phi(R/\sigma)\sim\sigma(2\pi)^{-1/2}R^{-1}\exp\{-R^2/2\sigma^2\}$$

и интегрируя по частям, получаем

$$\mathbb{P}\{q(\eta)>R\}\sim$$

$$\sim 2[1-\Phi(R/\sigma)]\left\{1+\int_0^\infty \mathbb{P}\{\mathcal{A}(\eta,\eta)/2>v\}\,d(\exp\{v/\sigma^2\})\right\}=$$

$$=2[1-\Phi(R/\sigma)]\left\{\int_0^\infty \exp\{v/\sigma^2\}\,d(\mathbb{P}\{\mathcal{A}(\eta,\eta)/2>v\})\right\}=$$

$$=C[1-\Phi(R/\sigma)]\,,$$

что и утверждается в (I). ■

ПРИМЕР I. Пусть $X=\ell^2$; η – гауссовский вектор с независимыми компонентами. Выстроим дисперсии компонент в порядке убывания и обозначим их $\sigma_1,\sigma_2,\ldots$. В качестве полунормы рассмотрим обычную гильбертову норму. Если $\sigma_1>\sigma_2$, то распределение вектора η удовлетворяет условию (А) и, разумеется, условию гладкости (Б). При этом в качестве экстремального вектора x_0 выступает координатный орт, отвечающий σ_1 , в качестве функционала f – соответствующий ему координатный функционал, билинейная форма $\mathcal{A}$ имеет вид

$$\mathcal{A}(x,x)\equiv\sum_{i=2}^{\infty} x^{(i)2}\,.$$

Учитывая независимость компонент, находим

$$\mathbf{E}\exp\{A(\eta,\eta)/2\sigma_1^2\} = \mathbf{E}\exp\{\sum_{i=2}^{\infty}\eta^{(i)2}/2\sigma_1^2\} =$$

$$= \prod_{i=2}^{\infty}\mathbf{E}\exp\{\eta^{(i)2}/2\sigma_1^2\} = \prod_{i=2}^{\infty}(1-\sigma_i^2/\sigma_1^2)^{-1/2}.$$

В результате применения теоремы I получаем асимптотику

$$\mathbf{P}\{q(\eta)>R\}\sim 2\left[1-\Phi(R/\sigma_1)\right]\prod_{i=2}^{\infty}(1-\sigma_i^2/\sigma_1^2)^{-1/2}.$$

Этот результат был получен в работе В.М.Золотарева [3]. В той же работе получена асимптотика больших уклонений и для случая, когда несколько максимальных дисперсий совпадают, причем ответ отличается от (I) степенным множителем. Этот случай, конечно, не охватывается теоремой I, поскольку он не вписывается в условие (A).

Указанная в этом примере асимптотика больших уклонений очевидным образом имеет место и для нормы гауссовского вектора в произвольном сепарабельном гильбертовом пространстве, если максимальное собственное число соответствующего корреляционного оператора имеет единичную кратность.

В ряде работ [5, 7] рассмотрена точная асимптотика больших уклонений гильбертовой нормы для нецентрированного гауссовского вектора. По всей видимости, теорема I тоже допускает обобщение в этом направлении.

Заканчивая рассмотрение гильбертовой нормы, отметим, что существует другое обобщение асимптотической оценки Золотарева, Оно принадлежит Гефдингу [9] и касается уклонений гильбертовой нормы вектора, имеющего негауссовскую компоненту.

Если рассматривать распределение нормы гауссовского вектора с независимыми компонентами в пространстве $\ell^p,\ p>2$, то теорема I применима, и имеет место асимптотика (I). В этом случае $A=0$ и $C=2$. Соответствующий результат доказан в [6] при помощи [8]. Если же рассматривать аналогичную задачу для $\ell^p, p\in(1,2)$, то типичными оказываются асимптотики, отличные от (I), а вызвано это нарушением условия (A). Эта ситуация подробно рассмотрена в [5, I2].

ПРИМЕР 2. Пусть η - n-мерный случайный вектор, имеющий стандартное гауссовское распределение. Пусть $q(x) \equiv \|x\|$ - некоторая норма в $\mathbb{R}^n$, не превосходящая евклидовой нормы $|x|$ при всех $x \in \mathbb{R}^n$. Предположим, что пересечение единичных сфер норм $\|\cdot\|$ и $|\cdot|$ состоит из точек x_0 и $-x_0$. Предположим также, что норма q дважды дифференцируема в точке x_0. Если $\mathcal{A} \equiv q''(x_0)$, E - тождественный оператор, то оператор $E - \mathcal{A}$ будет положительно определенным. Предположим, что этот оператор строго положительно определен. Тогда из теоремы I вытекает следующее асимптотическое соотношение для больших уклонений:

$$\mathbb{P}\{q(\eta) > R\} \sim 2\{\det(E-\mathcal{A})\}^{-1/2}[1-\Phi(R)] .$$

Действительно, при сформулированных ограничениях выполнены условия (А) и (Б), а приводя матрицу оператора $\mathcal{A}$ к диагональному виду, мы легко вычислим и константу C из утверждения теоремы I. Если $\sigma_1^2, \ldots, \sigma_n^2$ - собственные числа оператора $\mathcal{A}$, а ξ_i - независимые стандартные гауссовские с.в., то, как и в примере I,

$$\mathbf{E}\exp\{\mathcal{A}(\eta,\eta)/2\} = \prod_i \mathbf{E}\exp\{\sigma_i^2\xi_i^2/2\} =$$

$$= \prod_i (1-\sigma_i^2)^{-1/2} = \det(E-\mathcal{A})^{-1/2} .$$

Этот пример, вместе с рядом приложений к конкретным нормам, рассмотрен другим методом в работе [4].

Автор благодарен профессору В.Линде за полезное обсуждение тематики данной статьи.

Литература

1. Deuschel J.D., Strook D. Large deviations. Academic press, 1989.
2. Fernique X. Integrabilite des vectours gaussiens. - C.R.Acad.Sci.Paris, 1970, v.270, ser.A, p.1698-1699.
3. Золотарев В.М. Об одной вероятностной задаче. - Теория вероятн. и её примен. - 1961, т.6, № 2, с.219-222.

4. L i n d e W. Gaussian measures of large balls in R^n. To appear in: Proc.Conf. on Probability Theory, Itaca, 1990.
5. L i n d e W. Gaussian measures of large balls in ℓ^p. To appear in Ann.Prob., 1991.
6. D o b r i c V., M a r c u s M.B., W e b e r M. The distribution of large values of the supremum of a Gaussian process. - Asterisque, 1988, v.157-158, p.95-127.
7. H w e n g C.R. Gaussian measure of large balls in Hilbert space. - Proc.Amer.Math.Soc., 1980, v.78, p.107-110.
8. T a l a g r a n d M. Small tails for the supremum of a Gaussian process. - Ann.Inst.H.Poincare, 1988, v.24, ser.B., p.307-315.
9. Г е ф д и н г В. Об одной теореме В.М.Золотарева. - Теория вероятн. и её примен., I964, т.9, № I, с.96-99.
10. В е н т ц е л ь А.Д. Предельные теоремы о больших уклонениях для марковских случайных процессов. М.: Наука, I986.
11. S h i l d e r M. Some asymptotic formulas for Wiener integrals. - Trans.Amer.Math.Soc., 1966, v.125, N 1, p.63-85.
12. Л и ф ш и ц М.А. Вычисление точной асимптотики некоторых гауссовских больших уклонений. - В кн.: Исследования по математической статистике. 9. Зап.научн.семин.ЛОМИ, I990, т.I84, с.I89-I99.