ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1979 МАТЕМАТИКА № 1(200)

УДК 517.958

Л. Н. Грудцын

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ О ЦЕНТРАЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ ТОЧКИ ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ

Рассматривается обобщение классических задач Гамильтона [1] и Даинелли [2] на случай движения материальной точки переменной массы в обобщенном центральном гравитационном поле.

§ 1. Обобщенная теорема Гамильтона

Рассмотрим движение материальной точки переменной массы $m = m_0 f(t)$ в центральном гравитационном поле силы притяжения

$$\boldsymbol{F} = -km\boldsymbol{r}/r^{n+1}. \tag{1.1}$$

Здесь m, m_0 — значения массы точки в момент времени t и при $t=0$, соответственно; k, n — постоянные положительные гравитационные параметры; $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор точки, проведенной из центра O притяжения; $f(t)$ — непрерывно дифференцируемая функция.

Уравнения движения точки в осях неподвижного орторепера $S_0(O, x, y)$ имеют вид

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -kx/r^{n+1} + (\dot{f}/f)(u_x - \dot{x}), \\ \ddot{y} &= -ky/r^{n+1} + (\dot{f}/f)(u_y - \dot{y}), \end{aligned} \tag{1.2}$$

где $\boldsymbol{u}(u_x, u_y)$ — абсолютная скорость отсоединения или присоединения материальных частиц к основной точке; точка сверху обозначает производную по t.

Принимая гипотезу [3] $\boldsymbol{u} = \lambda\dot{\boldsymbol{r}}$ ($\lambda = \text{const}$), получаем первый интеграл системы (1.2)

$$x\dot{y} - \dot{x}y = hf^{\lambda-1}, \tag{1.3}$$

являющийся интегралом момента количества движения точки. Здесь h — постоянная интегрирования.

Рассмотрим обратную задачу центрального движения точки, поставленную для точки постоянной массы Гамильтоном [1]: определить центральную силу F, под действием которой материальная точка опишет заданную траекторию, уравнение которой

$$\Phi(x, y) = 0. \tag{1.4}$$

Из (1.4) следует

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\dot{y} = 0, \tag{1.5}$$

а из уравнений (1.3), (1.5) находим

$$\dot{x} = -\Delta^{-1} hf^{\lambda-1}\frac{\partial\Phi}{\partial y};\ \dot{y} = \Delta^{-1} hf^{\lambda-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \tag{1.6}$$

$$\Delta = x\frac{\partial\Phi}{\partial x} + y\frac{\partial\Phi}{\partial y} \neq 0.$$

Учитывая соотношение (1.6), вычислим величину $\ddot{x}$. В результате получим

$$\ddot{x} = -h\Delta^{-3}\left[(\lambda-1)f^{\lambda-2}\dot{f}\ \frac{\partial\Phi}{\partial y}\Delta^2 + hxf^{2(\lambda-2)}G\right],$$

$$G = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}\ \frac{\partial\Phi}{\partial x}\ \frac{\partial\Phi}{\partial y} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2. \tag{1.7}$$

Рассмотрим первое уравнение системы (1.2)

$$\ddot{x} = -kx/r^{n+1} + (\lambda-1)(\dot{f}/f)\dot{x}. \tag{1.8}$$

Исключая из соотношений (1.7), (1.8) величину $\ddot{x}$ и используя уравнение (1.6) для $\dot{x}$, в результате получаем

$$F = H\Delta^{-3}rf^{2\lambda-1}\cdot G;\quad H = m_0h^2. \tag{1.9}$$

Величину $f^{2\lambda-1}$ назовем приведенной массой точки.

Рассмотрим случай, когда траектория точки является коническим сечением, уравнение которого $2\Phi(x, y) \equiv a_2x^2 + 2a_{12}xy + b_2y^2 + 2a_1x + 2b_1y + c = 0$, $a_1^2 + b_1^2 + c^2 \neq 0$, Тогда $\Delta = -(a_1x + b_1y + c)$, $G = a_1^2b_2 + a_2b_1^2 + a_{12}^2c - 2a_{12}a_1b_1 - a_2b_2c = G_0$ и формула (1.9) принимает вид

$$F = -Hrf^{2\lambda-1}G_0(a_1x + b_1y + c)^{-3}. \tag{1.10}$$

Из соотношения (1.10) следует

Теорема. *Величина силы, действующей на материальную точку переменной массы, находящуюся в центральном гравитационном поле вида* (1.1) *в положении* (x, y), *прямо пропорциональна величине радиуса-вектора точки, проведенного из центра сил, приведенной массе точки, и обратно пропорциональна кубу длины перпендикуляра, опущенного из точки* (x, y) *на поляру центра сил при условии, что выполняется гипотеза* $\mathbf{u} = \lambda\dot{\mathbf{r}}$.

При $\lambda = 1/2$ *величина* F *не изменяется с изменением массы точки, а при* $\lambda = 1$ *величина* F *пропорциональна массе* $m(t)$.

§ 2. Обобщение задачи Даинелли

Расширением предыдущей обратной задачи является следующая: определить силовое поле, для которого семейство кривых $\Phi(x, y) = C$ ($C = \text{const}$) является семейством возможных траекторий материальной точки переменной массы при условии, что все силы, действующие на точку, являются квазипозиционными [4].

Пусть

$$m = m_0f(s),\quad s = s(t),$$
$$u(s) = \lambda(s)v,\quad v = \dot{r}, \tag{2.1}$$

где s — криволинейная координата точки; $\lambda(s)$ — заданная непрерывная функция; $\boldsymbol{F}(F_x, F_y)$ — вектор искомого силового поля, отнесенный к массе m_0; a_x, a_y, a_τ, a_n — проекции вектора ускорения точки на оси репера S_0 и на оси естественного трехгранника. Так как

$$a_x = -\delta^{-1}\left(a_\tau \frac{\partial\Phi}{\partial y} + a_n \frac{\partial\Phi}{\partial x}\right), \quad a_y = \delta^{-1}\left(a_\tau \frac{\partial\Phi}{\partial x} - a_n \frac{\partial\Phi}{\partial y}\right),$$

$$\delta = \left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2\right]^{1/2} \neq 0,$$

то из уравнений движения точки с учетом (2.1) находим

$$F_x = -\delta^{-1}\left[\left(a_\tau \frac{\partial\Phi}{\partial y} + a_n \frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) f(s) - (\lambda - 1)\, v^2 \frac{\partial\Phi}{\partial y} f'(s)\right],$$

$$F_y = \delta^{-1}\left[\left(a_\tau \frac{\partial\Phi}{\partial x} - a_n \frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) f(s) - (\lambda - 1)\, v^2 \frac{\partial\Phi}{\partial x} f'(s)\right].$$

Так как $a_n = -\delta^{-1} w \cdot G$; $a_\tau = -\frac{1}{2} w'(s)\,\delta^2 + \delta^{-1} w \left\{\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial y} - \left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial^2\Phi}{\partial x \partial y}\right\}$, $w = -v^2\delta^{-2}$ $\rho = \delta^3 G^{-1}$, где ρ — радиус кривизны траектории точки, то окончательно получаем

$$F_x(s) = \left[w\Delta_1 - \frac{1}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial y} L(w)\right] f(s) + (\lambda - 1)\, w \frac{\partial\Phi}{\partial y} L(f),$$

$$F_y(s) = \left[-w\Delta_2 + \frac{1}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial x} L(w)\right] f(s) - (\lambda - 1)\, w \frac{\partial\Phi}{\partial x} L(f), \tag{2.2}$$

$$\Delta_1 = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} - \frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x \partial y},$$

$$\Delta_2 = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2},$$

$$L = \frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}.$$

Формулы (2.2) определяют решение обобщенной задачи Даинелли для материальной точки переменной массы в случае квазипозиционных сил при условии, что выполняется гипотеза (2.1). Из соотношений (2.2) видно, что при $\lambda(s) = 1$ формулы для F_x, F_y в случае точки переменной массы отличаются от соответствующих формул для точки постоянной массы только множителем $f(s)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Уиттекер Е. Т. Аналитическая динамика. М.—Л., ОНТИ, 1937.
2. Dainelli. *Jiornale di Matematische di Baltaglini, napoli*, 18, 1880, S. 271.
3. Космодемьянский А. А. Курс теоретической механики, ч. 2, М., „Просвещение", 1966.
4. Грудцын Л. Н. К обобщению теоремы Боннэ. ПММ, т. 37, вып. 6. 1973, с. 1138—1141.

г. Саратов

Поступила
18 V 1976