B. G. Dragovich, The p-adic sector of the adelic string, *TMF*, 2010, Volume 163, Number 3, 449–455

https://www.mathnet.ru/eng/tmf6513

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 163, № 3
июнь, 2010

Б. Г. Драгович*

p-АДИЧЕСКИЙ СЕКТОР АДЕЛЬНОЙ СТРУНЫ

Исследуется конструкция лагранжианов, которые могут быть рассмотрены как лагранжианы p-адического сектора адельной открытой скалярной струны. Такие лагранжианы тесно связаны с лагранжианами для единой p-адической струны и содержат дзета-функцию Римана с даламбертианом в аргументе. В частности, представлен новый лагранжиан, полученный в рамках аддитивного подхода с учетом всех p-адических лагранжианов. Этот новый лагранжиан привлекателен тем, что он является аналитической функцией даламбертиана. Исследование теории поля с дзета-функцией Римана интересно также и само по себе.

Ключевые слова: p-адическая струна, нелокальная теория поля, дзета-функция Римана.

1. ВВЕДЕНИЕ

Понятие p-адической струны было введено Воловичем [1]. После этого предлагались различные версии p-адических струн. Наибольший интерес вызывали струны, у которых p-адическим является только мировой лист, а все остальные свойства описываются вещественными или комплексными числами. Такие p-адические струны связаны с обычными струнами через произведение их амплитуд рассеяния. В рассмотрение было введено понятие адельной струны, которое позволяет рассматривать обычные и p-адические струны одновременно и с единых позиций. Адельные струны можно воспринимать как более фундаментальные по сравнению с обычными и p-адическими (о применении p-адических чисел в физике см., например, [2], [3]). Некоторые p-адические структуры наблюдались также во многих других областях современной математической физики (см. [4]).

Одно из самых значительных достижений в теории p-адических струн состоит в эффективном полевом описании открытых скалярных p-адических струнных тахионов [5], [6]. Соответствующий лагранжиан является нелокальным, нелинейным, простым и точным. Он описывает четырехточечные амплитуды рассеяния, равно как и все высшие амплитуды на древесном уровне.

*Institute of Physics, Belgrade, Serbia. E-mail: dragovich@ipb.ac.rs

В последнее десятилетие лагранжев подход к теории p-адических струн получил существенное развитие; многие аспекты динамики p-адических струн подверглись исследованию, сравнению с динамикой обычных струн и нашли применение в нелокальной космологии (см., например, [7]–[11] и приведенную там библиографию).

Адельный подход к струнным амплитудам рассеяния связывает p-адические и обычные аналоги, исключая нежелательный параметр, задаваемый простым числом p, которое содержится в p-адических амплитудах, а также позволяет исправить ситуацию с p-адическим нарушением причинности. Также была сформулирована адельная квантовая механика [12], причем была найдена связь между адельным вакуумным состоянием гармонического осциллятора и дзета-функцией Римана. Адельный анализ был успешно применен к фейнмановскому интегралу по траекториям [13], квантовой космологии [14], суммированию расходящихся рядов [15] и динамическим системам [16].

Данная работа представляет собой результат исследования конструкции лагранжиана эффективной теории поля для p-адического сектора адельной открытой скалярной струны. Вначале мы даем краткий обзор лагранжианов для p-адической струны и наших предыдущих работ по этой теме. Затем мы представляем новый лагранжиан, который также содержит дзета-функцию Римана, но таким образом, что лагранжиан оказывается аналитической функцией даламбертиана $\Box$. Заметим, что четырехточечная струнная амплитуда в p-адическом секторе содержит дзета-функцию Римана.

2. p-АДИЧЕСКИЕ И АДЕЛЬНЫЕ СТРУНЫ

Напомним выражение для кросс-симметричной амплитуды Венециано для рассеяния двух обычных открытых струн:

$$A_\infty(a,b) = g_\infty^2 \int_{\mathbb{R}} |x|_\infty^{a-1} |1-x|_\infty^{b-1}\, d_\infty x = g_\infty^2 \frac{\zeta(1-a)}{\zeta(a)} \frac{\zeta(1-b)}{\zeta(b)} \frac{\zeta(1-c)}{\zeta(c)}, \tag{1}$$

где $a = -\alpha(s) = -s/2 - 1$, $b = -\alpha(t)$, $c = -\alpha(u)$, при условии $a+b+c=1$, т.е. $s+t+u=-8$; $|\cdot|_\infty$ обозначает обычное абсолютное значение, $\mathbb{R}$ – поле вещественных чисел, кинематические переменные $a,b,c \in \mathbb{C}$, а ζ – дзета-функция Римана. Соответствующая амплитуда Венециано для рассеяния p-адических струн была введена как p-адический аналог интеграла (1), т.е.

$$A_p(a,b) = g_p^2 \int_{\mathbb{Q}_p} |x|_p^{a-1} |1-x|_p^{b-1}\, d_p x, \tag{2}$$

где $\mathbb{Q}_p$ – поле p-адических чисел, $|\cdot|_p$ – p-адическое абсолютное значение, а $d_p x$ – аддитивная мера Хаара на $\mathbb{Q}_p$. Здесь кинематические переменные a, b, c сохраняют комплексные значения при условии $a+b+c=1$. После интегрирования в (2) получаем

$$A_p(a,b) = g_p^2 \frac{1-p^{a-1}}{1-p^{-a}} \frac{1-p^{b-1}}{1-p^{-b}} \frac{1-p^{c-1}}{1-p^{-c}}, \tag{3}$$

где p – любое простое число. Напомним определение дзета-функции Римана:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}, \quad s = \sigma + i\tau, \quad \sigma > 1. \tag{4}$$

Она имеет аналитическое продолжение на всю плоскость комплексных s, за исключением точки $s = 1$, где она имеет простой полюс с вычетом 1. Согласно (4) можно взять произведение p-адических струнных амплитуд

$$\prod_p A_p(a,b) = \frac{\zeta(a)}{\zeta(1-a)} \frac{\zeta(b)}{\zeta(1-b)} \frac{\zeta(c)}{\zeta(1-c)} \prod_p g_p^2, \tag{5}$$

что дает изящную простую формулу

$$A_\infty(a,b) \prod_p A_p(a,b) = g_\infty^2 \prod_p g_p^2. \tag{6}$$

Чтобы бесконечное произведение амплитуд (6) было конечным, требуется, чтобы было конечным произведение констант взаимодействия, т.е. $g_\infty^2 \prod_p g_p^2 = \mathrm{const}$. Из (6) следует, что обычную комплексную амплитуду Венециано можно представить как произведение всех обратных p-адических аналогов, которые, в свою очередь, намного проще. Более того, выражение (6) приводит к рассмотрению этого произведения как амплитуды адельной струны, составленной из обычной и p-адических струн.

2.1. Лагранжиан для p-адической открытой струны. На древесном уровне точный лагранжиан эффективного скалярного поля φ, описывающего тахион открытой p-адической струны, имеет вид [5], [6]

$$\mathcal{L}_p = \frac{m^D}{g_p^2} \frac{p^2}{p-1} \left[-\frac{1}{2} \varphi p^{-\Box/(2m^2)} \varphi + \frac{1}{p+1} \varphi^{p+1} \right], \tag{7}$$

где $\Box = -\partial_t^2 + \nabla^2$ – D-мерный даламбертиан.

Из разложения

$$p^{-\Box/(2m^2)} = \exp\left(-\frac{1}{2m^2} \ln p \Box \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{\ln p}{2m^2} \right)^k \frac{1}{k!} \Box^k$$

следует бесконечное число пространственно-временных производных. Уравнение движения для лагранжиана (7) имеет вид

$$p^{-\Box/(2m^2)} \varphi = \varphi^p. \tag{8}$$

Его свойства исследовались многими авторами (см. [9] и приведенную там библиографию).

3. ЛАГРАНЖИАНЫ ДЛЯ p-АДИЧЕСКОГО СЕКТОРА

Рассмотрим теперь конструкцию лагранжианов, являющихся кандидатами на описание полного p-адического сектора адельной открытой скалярной струны. В частности, такой лагранжиан должен описывать амплитуду рассеяния (5), которая содержит дзета-функцию Римана. Следовательно, этот лагранжиан должен содержать дзета-функцию Римана с даламбертианом в аргументе. Таким образом, нам следует искать возможные конструкции лагранжианов, содержащих дзета-функцию Римана и тесно связанных с p-адическим лагранжианом (7). Мы исследовали два подхода: аддитивный и мультипликативный.

3.1. Аддитивный подход. Простое число p в (7) можно заменить любым натуральным числом $n \geqslant 2$, и все следствия останутся в силе.

Введем лагранжиан, который включает в себя все лагранжианы (7), с заменой p на $n \in \mathbb{N}$. Для этого возьмем сумму всех лагранжианов $\mathcal{L}_n$ вида

$$L = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \mathcal{L}_n = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{m^D}{g_n^2} \frac{n^2}{n-1} \biggl[-\frac{1}{2}\,\phi n^{-\Box/(2m^2)}\phi + \frac{1}{n+1}\,\phi^{n+1}\biggr], \tag{9}$$

где явная реализация зависит от конкретного выбора коэффициентов C_n и констант взаимодействия g_n. Чтобы избежать расходимости вида $1/(n-1)$ при $n=1$, следует принять, что C_n/g_n^2 пропорционально $n-1$. Рассмотрим некоторые случаи, когда коэффициенты C_n пропорциональны $n-1$, а константы взаимодействия g_n не зависят от n, т.е. $g_n = g$. В действительности согласно формуле (6) в этом случае $g_n^2 = g^2 = 1$. Другая возможность состоит в том, что коэффициенты C_n не пропорциональны $n-1$, но $g_n^2 = n^2/(n^2-1)$. Тогда $\prod_p g_p^2 = \zeta(2) = \pi^2/6$, что согласуется с выражением (6). Чтобы отличать это новое поле от конкретного p-адического поля, будем использовать обозначение ϕ вместо φ.

Мы рассмотрели три случая выбора коэффициентов C_n в (9): 1) $C_n = (n-1)/n^{2+h}$, где h – вещественный параметр; 2) $C_n = (n^2-1)/n^2$; 3) $C_n = \mu(n)\,(n-1)/n^2$, где $\mu(n)$ – функция Мёбиуса.

Случай 1 был исследован в работах [17], [18]. Полученный лагранжиан имеет вид

$$L_h = \frac{m^D}{g^2}\biggl[-\frac{1}{2}\phi\zeta\biggl(\frac{\Box}{2m^2}+h\biggr)\phi + \mathcal{AC}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{-h}}{n+1}\,\phi^{n+1}\biggr], \tag{10}$$

где $\mathcal{AC}$ обозначает аналитическое продолжение.

Случай 2 исследовался в работе [19]; соответствующий лагранжиан есть

$$L = \frac{m^D}{g^2}\biggl\{-\frac{1}{2}\,\phi\biggl[\zeta\biggl(\frac{\Box}{2m^2}-1\biggr)+\zeta\biggl(\frac{\Box}{2m^2}\biggr)\biggr]\phi + \frac{\phi^2}{1-\phi}\biggr\}. \tag{11}$$

Случай 3 рассмотрен в работе [20]; соответствующий лагранжиан есть

$$L = \frac{m^D}{g^2}\biggl[-\frac{1}{2}\,\phi\,\frac{1}{\zeta(\Box/(2m^2))}\,\phi + \int_0^{\phi}\mathcal{M}(\phi)\,d\phi\biggr], \tag{12}$$

где $\mathcal{M}(\phi) = \sum_{n=1}^{\infty}\mu(n)\phi^n = \phi - \phi^2 - \phi^3 - \phi^5 + \phi^6 - \phi^7 + \phi^{10} - \phi^{11} - \cdots$.

3.2. Мультипликативный подход. В мультипликативном подходе дзета-функция Римана возникает как представление в виде произведения (4). Нашей исходной точкой снова является p-адический лагранжиан (7). Перепишем его сначала в виде

$$\mathcal{L}_p = \frac{m^D}{g_p^2}\frac{p^2}{p^2-1}\biggl\{-\frac{1}{2}\,\varphi[p^{-\Box/(2m^2)+1} + p^{-\Box/(2m^2)}]\varphi + \varphi^{p+1}\biggr\}, \tag{13}$$

а далее, после добавления и вычитания φ^2, в виде

$$\mathcal{L}_p = \frac{m^D}{g_p^2}\frac{p^2}{p^2-1}\biggl\{\frac{1}{2}\,\varphi[(1-p^{-\Box/(2m^2)+1}) + (1-p^{-\Box/(2m^2)})]\varphi - \varphi^2(1-\varphi^{p-1})\biggr\}. \tag{14}$$

Вычисляя произведения

$$\begin{gathered}\prod_p g_p^2 = C, \qquad \prod_p \frac{1}{1-p^{-2}}, \qquad \prod_p (1-p^{-\Box/(2m^2)+1}),\\ \prod_p (1-p^{-\Box/(2m^2)}), \qquad \prod_p (1-\varphi^{p-1})\end{gathered} \tag{15}$$

в (14), получаем лагранжиан

$$\mathcal{L} = \frac{m^D}{C}\zeta(2)\biggl\{\frac{1}{2}\phi\biggl[\zeta^{-1}\biggl(\frac{\Box}{2m^2}-1\biggr) + \zeta^{-1}\biggl(\frac{\Box}{2m^2}\biggr)\biggr]\phi - \phi^2\prod_p(1-\phi^{p-1})\biggr\}, \tag{16}$$

где $\zeta^{-1}(s) = 1/\zeta(s)$. Стоит отметить, что из лагранжиана (16) легко получить его p-адическую составляющую (13). Лагранжиан (16) был введен и исследован в работе [21]. В частности, было показано, что очень похожий лагранжиан можно получить из аддитивного подхода с функцией Мёбиуса и что в приближении слабого поля эти два лагранжиана описывают одну и ту же теорию поля.

3.3. Новый лагранжиан с дзета-функцией Римана. Представим теперь новый лагранжиан, построенный в рамках аддитивного подхода при выборе $C_n = (-1)^{n-1}(n^2-1)/n^2$ в выражении (9). Этот выбор коэффициентов C_n похож на указанный выше случай 2, а отличие состоит в знаке $(-1)^{n-1}$. Исходный p-адический лагранжиан имеет вид (13), и мы получаем

$$L = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{m^D}{g_n^2}\frac{n^2}{n^2-1}\biggl[-\frac{1}{2}\,\phi n^{-\Box/(2m^2)+1}\phi - \frac{1}{2}\phi n^{-\Box/(2m^2)}\phi + \phi^{n+1}\biggr]. \tag{17}$$

Напомним, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^s} = (1-2^{1-s})\zeta(s), \qquad s = \sigma + i\tau, \quad \sigma > 0, \tag{18}$$

имеет аналитическое продолжение на всю плоскость комплексных s без особенностей. В точке $s=1$ имеем $\lim_{s\to 1}(1-2^{1-s})\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}/n = \ln 2$. Применяя формулу (18) к лагранжиану (17) и используя аналитическое продолжение, получаем

$$\begin{aligned}L = -m^D\biggl\{\frac{1}{2}\phi\biggl[&(1-2^{2-\Box/(2m^2)})\zeta\biggl(\frac{\Box}{2m^2}-1\biggr) + \\ &+ (1-2^{1-\Box/(2m^2)})\zeta\biggl(\frac{\Box}{2m^2}\biggr)\biggr]\phi - \frac{\phi^2}{1+\phi}\biggr\},\end{aligned} \tag{19}$$

где мы положили $g_n^2 = g^2 = 1$.

Соответствующее уравнение движения имеет вид

$$\left[\left(1-2^{2-\Box/(2m^2)}\right)\zeta\left(\frac{\Box}{2m^2}-1\right)+\left(1-2^{1-\Box/(2m^2)}\right)\zeta\left(\frac{\Box}{2m^2}\right)\right]\phi=\frac{\phi^2+2\phi}{(1+\phi)^2}, \tag{20}$$

откуда в приближении слабого поля следует уравнение

$$\left(1-2^{2-M^2/(2m^2)}\right)\zeta\left(\frac{M^2}{2m^2}-1\right)+\left(1-2^{1-M^2/(2m^2)}\right)\zeta\left(\frac{M^2}{2m^2}\right)-2=0 \tag{21}$$

для спектра масс M^2 как функции струнной массы m^2. Уравнение (20) имеет три решения $\phi=\mathrm{const}$: $\phi=0,1,-5/3$.

Потенциал можно получить из равенства $V(\phi)=-L(\Box=0)$, т.е.

$$V(\phi)=m^D\,\frac{3\phi-5}{8(1+\phi)}\,\phi^2, \tag{22}$$

где имеются два локальных минимума при $\phi=1$ и $\phi=-5/3$, а также один локальный максимум $V(0)=0$. Эти значения ϕ совпадают с постоянными решениями уравнения движения (20). Потенциал (22) сингулярен при $\phi=-1$. Заметим, что знак $(-1)^{p-1}$ перед $\mathcal{L}_p$ в (17) положителен, когда p – нечетное простое число, в силу чего $V(\phi)\to+\infty$ при $\phi\to\pm\infty$.

4. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Основным результатом настоящей работы является построение лагранжиана (19). В отличие от ранее построенных лагранжианов, данный лагранжиан не имеет особенности по даламбертиану $\Box$ и позволяет применить более простой псевдодифференциальный подход. Эта аналитичность лагранжиана также должна оказаться полезной при применении таких лагранжианов в нелокальной космологии, где используется процедура линеаризации (см., например, [22] и приведенную там библиографию).

Следует заметить, что интересный подход к основаниям теории поля и космологии, основанный на дзета-функции Римана, был предложен в работе [23].

Благодарности. Настоящая работа была частично поддержана со стороны Министерства науки и технологического развития Сербии в рамках контракта 144032D. Автор благодарен организаторам Второй международной конференции “Струнная теория поля и смежные вопросы” (Москва, 2009 г.) за стимулирующую научную атмосферу.

Список литературы

[1] И. В. Волович, *ТМФ*, **71**:3 (1987), 337–340; I. V. Volovich, *Class. Quant. Grav.*, **4** (1987), L83–L87.
[2] L. Brekke, P. G. O. Freund, *Phys. Rep.*, **233**:1 (1993), 1–66.
[3] В. С. Владимиров, И. В. Волович, Е. И. Зеленов, *p-Адический анализ и математическая физика*, Наука, М., 1994.

[4] B. Dragovich, A. Yu. Khrennikov, S. V. Kozyrev, I. V. Volovich, *p-Adic Numbers, Ultrametric Anal. Appl.*, **1**:1 (2009), 1–17; arXiv: 0904.4205.

[5] L. Brekke, P. G. O. Freund, M. Olson, E. Witten, *Nucl. Phys. B*, **302**:3 (1988), 365–402.

[6] P. H. Frampton, Y. Okada, *Phys. Rev. D*, **37**:10 (1988), 3077–3079.

[7] D. Ghoshal, A. Sen, *Nucl. Phys. B*, **584**:1–2 (2000), 300–312; arXiv: hep-th/0003278.

[8] N. Moeller, B. Zwiebach, *JHEP*, **10** (2002), 034; arXiv: hep-th/0207107.

[9] V. S. Vladimirov, *p-Adic Numbers, Ultrametric Anal. Appl.*, **1**:1 (2009), 79–87.

[10] I. Ya. Aref'eva, "Nonlocal string tachyon as a model for cosmological dark energy", *p-Adic Mathematical Physics*, AIP Conf. Proc., **826**, eds. A. Yu. Khrennikov, Z. Rakić, I. V. Volovich, AIP, New York, 2006, 301–311; arXiv: astro-ph/0410443.

[11] N. Barnaby, T. Biswas, J. M. Cline, *JHEP*, **04** (2007), 056; arXiv: hep-th/0612230.

[12] Б. Г. Драгович, *ТМФ*, **101**:3 (1994), 349–359; arXiv: hep-th/0402193.

[13] G. S. Djordjević, B. Dragovich, L. Nešić, *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab Relat. Top.*, **6**:2 (2003), 179–195; arXiv: hep-th/0105030.

[14] G. S. Djordjević, B. Dragovich, L. D. Nešić, I. V. Volovich, *Internat. J. Modern Phys. A*, **17**:10 (2002), 1413–1433; arXiv: gr-qc/0105050.

[15] B. Dragović, *Phys. Lett. B*, **256**:3–4 (1991), 392–396.

[16] B. Dragovich, A. Khrennikov, D. Mihajlovic, *Rep. Math. Phys.*, **60**:1 (2007), 55–68; arXiv: math-ph/0612058.

[17] B. Dragovich, *Zeta strings*, arXiv: hep-th/0703008.

[18] Б. Г. Драгович, *ТМФ*, **157**:3 (2008), 364–372.

[19] B. Dragovich, "Some Lagrangians with zeta function nonlocality", *Problems of Modern Theoretical Physics*, a volume in honour of Prof. I. L. Buchbinder on the occasion of his 60th birthday (Tomsk, Russia 2008), Tomsk State Pedagogical Univ., Tomsk, 146–153; arXiv: 0805.0403.

[20] B. Dragovich, *Romanian J. Phys.*, **53**:9–10 (2008), 1105–1110; arXiv: 0809.1601.

[21] B. Dragovich, *Fortschr. Phys.*, **57**:5–7 (2009), 546–551; arXiv: 0902.0295.

[22] A. S. Koshelev, S. Yu. Vernov, *Cosmological perturbations in SFT inspired non-local scalar field models*, arXiv: 0903.5176.

[23] I. Ya. Aref'eva, I. V. Volovich, *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.*, **4**:5 (2007), 881–895; arXiv: hep-th/0701284v2.