Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

Yu. P. Gulyaev, One-dimensional equations of motion of a viscous incompressible fluid in flexible tubes, *Izv. Saratov Univ. Math. Mech. Inform.*, 2012, Volume 12, Issue 2, 64–67

DOI: 10.18500/1816-9791-2012-12-2-64-67

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
http://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 18.97.9.172
February 14, 2025, 08:32:11

Полученные в данной работе приближенные системы уравнений могут быть использованы при исследовании длинноволновых колебаний и процессов распространения нестационарных волн в многослойных оболочках. В последнем случае они применимы вдали от фронтов волн.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проект* № 11-01-00545-а).

Библиографический список

1. *Kaplunov J. D., Kossovich L. Yu., Nolde E. V.* Dynamics of thin walled elastic bodies. San Diego : Academic Press, 1998. 226 p.
2. *Коссович Л. Ю.* Нестационарные задачи теории упругих тонких оболочек. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 1986. 176 с.
3. *Коссович Л. Ю., Каплунов Ю. Д.* Асимптотический анализ нестационарных упругих волн в тонких оболочках вращения при ударных торцевых воздействиях // Изв. Сарат. ун-та. 2001. Т. 1, вып. 2. С. 111–131.
4. *Каплунов Ю. Д., Кириллова И. В., Коссович Л. Ю.* Асимптотическое интегрирование динамических уравнений теории упругости для случая тонких оболочек // ПММ. 1993. Т. 57, вып. 1. С. 83–91.
5. *Коссович Л. Ю., Шевцова Ю. В.* Асимптотические приближения трехмерных динамических уравнений теории упругости в случае двухслойных пластин // Проблемы прочности и пластичности : межвуз. сб. Н. Новгород : Изд-во Нижегород. ун-та, 2005. Вып. 76. С. 102–111.
6. *Амбарцумян С. А.* Общая теория анизотропных оболочек. М. : Наука, 1971. 446 с.

УДК 539.3

ОДНОМЕРНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ГИБКИХ ТРУБКАХ

Ю. П. Гуляев

Саратовский государственный университет
E-mail: gulvis@yandex.ru

В статье описан новый вариант осреднения уравнений Навье–Стокса для осесимметричного течения вязкой несжимаемой жидкости при минимальном числе упрощающих гипотез. Приведена полная система пространственно одномерных дифференциальных уравнений, описывающая динамику кровотока в системе крупных артериальных сосудов.

Ключевые слова: линеаризация, одномерные уравнения, осесимметричные колебания, закон Пуазейля.

One-Dimensional Equations of Motion of a Viscous Incompressible Fluid in Flexible Tubes

Yu. P. Gulyaev

This paper describes a new variant of the averaging of the Navier–Stokes equations for axisymmetric flow of a viscous incompressible fluid with a minimum number of simplifying hypotheses. The complete system is spatially one-dimensional differential equations describing the dynamics of blood flow in the large arteries.

Key words: linearized, one-dimensional equation, axisymmetric oscillations, Poiseuille law.

Одномерные уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости [1] применяются для моделирования динамики кровотока в крупных артериях. Эти уравнения положены в основу создания быстродействующих многопараметрических моделей артериальных систем, которые достаточно быстро и точно могут численно описывать динамику кровотока в соответствующей части артериальной системы применительно к конкретному индивидууму. Используемый в настоящее время вариант уравнений, полученный с помощью осреднения уравнений Навье–Стокса для осесимметричного течения вязкой несжимаемой жидкости и некоторых упрощающих предположениях [2], на наш взгляд, не полностью отражает характер течения жидкости в случае осевой симметрии потока и когда осевая скорость существенно больше радиальной скорости течения.

В данной работе предлагается новый, более строгий математический подход к выводу одномерных уравнений осесимметричных движений вязкой жидкости. При этом существенно сокращается число дополнительных гипотез. В частности, непосредственно закон Пуазейля, справедливый только для установившихся течений в тонких жестких трубках, здесь не используется.

Предположим, что происходит осесимметричное нестационарное течение вязкой несжимаемой жидкости в предварительно натянутой гибкой цилиндрической трубке. В цилиндрической системе

© Гуляев Ю. П., 2012

координат, где ось z направлена по оси потока, уравнения Навье–Стокса имеют вид [3]:

$$\rho(\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_z}{\partial r}+v_x\frac{\partial v_z}{\partial z})=-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right),$$
$$\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+v_x\frac{\partial v_r}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial r}+\mu\left(-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}\right), \tag{1}$$
$$\frac{\partial (rv_r)}{\partial r}+\frac{\partial (rv_z)}{\partial z}=0.$$

Для потоков жидкости с существенным преобладанием осевой скорости уравнения (1) легко линеаризуются и принимают более простой вид:

$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t}+2v_0\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right),$$
$$\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t}+2v_0\frac{\partial v_r}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial r}+\mu\left(-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}\right), \tag{2}$$
$$\frac{\partial (rv_r)}{\partial r}+\frac{\partial (rv_z)}{\partial z}=0.$$

Здесь v_0 — средняя скорость преобладающего осевого течения.

Из этих уравнений вытекает уравнение для давления p:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}=0. \tag{3}$$

Осредняя уравнение (3) по площади поперечного сечения круглой трубки номинального радиуса R и вводя среднее по сечению давление в потоке жидкости по формуле

$$p_c=\frac{2}{R^2}\int\limits_0^R rp\,dr,$$

получим следующее соотношение:

$$\left.\frac{\partial p}{\partial r}\right|_{r=R}=-\frac{R}{2}\frac{\partial^2 p_c}{\partial z^2}. \tag{4}$$

Осреднение первого уравнения системы (1) по радиусу трубки приводит к известному одномерному уравнению движения для объёмного расхода жидкости Q [2]:

$$\rho\left(\frac{\partial Q}{\partial t}+\frac{2Q_0}{\pi R^2}\frac{\partial Q}{\partial z}\right)=-\pi R^2\frac{\partial p_c}{\partial z}+2\pi R\mu\left.\frac{\partial v_z}{\partial r}\right|_{r=R}+\mu\frac{\partial^2 Q}{\partial z^2},\qquad Q=2\pi\int\limits_0^R rv_z\,dr. \tag{5}$$

Здесь Q_0 — средний за период пульсации объёмный расход в направлении оси трубки.

Таким образом, в рамках линейной теории в данном случае учитывается конвективная часть ускорения частиц жидкости.

Аналогично преобразуется уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости

$$v_r|_{r-R}=-\frac{1}{2\pi R}\frac{\partial Q}{\partial z}. \tag{6}$$

Запишем второе уравнение системы (2) с учетом равенства (4) на границе контакта жидкости и стенки трубки:

$$\rho\left(\left.\frac{\partial v_r}{\partial t}\right|_{r=R}+2v_0\left.\frac{\partial v_r}{\partial z}\right|_{r-R}\right)=\frac{R}{2}\frac{\partial^2 p_c}{\partial z^2}+\mu\left(-\frac{\partial}{\partial z}\left(\left.\frac{\partial v_z}{\partial r}\right|_{r=R}\right)+\left.\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}\right|_{r-R}\right). \tag{7}$$

Легко показать, что уравнение (7) будет выполнено, если будет выполнено уравнение (4). Для этого нужно из уравнения (7) исключить с помощью уравнения неразрывности (6) радиальную скорость стенки трубы.

Найдем давление на контактной поверхности. Для этого второе уравнение системы (2) умножим на r^2 и проинтегрируем по частям в пределах от 0 до R. После применения к соответствующим интегралам теоремы о среднем значении окончательно получим:

$$p|_{r=R} = p_c - \rho\frac{R}{2}\left(\left.\frac{\partial v_r}{\partial t}\right|_{r=R} + 2v_0\left.\frac{\partial v_r}{\partial z}\right|_{r=R}\right) - \rho\frac{1}{8\pi}\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial t\partial z} + 2v_9\frac{\partial^2 Q}{\partial z^2}\right) +$$
$$+\mu\left[-\left.\frac{\partial v_z}{\partial z}\right|_{r=R} + \frac{2}{R}v_r|_{r=R} + \frac{R}{2}\left.\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}\right|_{r=R} + \frac{1}{8\pi}\frac{\partial^3 Q}{\partial z^3}\right]. \tag{8}$$

Из уравнения неразрывности вытекает следующее равенство:

$$\left.\frac{\partial v_r}{\partial r}\right|_{r=R} = -\frac{1}{R}\,v_r|_{r=R} - \left.\frac{\partial v_z}{\partial z}\right|_{r=R}. \tag{9}$$

Запишем уравнения осесимметричных колебаний круглой цилиндрической оболочки с учетом предварительного натяжения её стенок в продольном и поперечном направлениях [3]. Материал стенок предполагаем линейно упругим и изотропным. Деформации оболочки считаются малыми.

$$\rho_{\text{ст}}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial s}{\partial z} + \frac{s_0 - T_0}{R}\frac{\partial w}{\partial z} + \tau, \qquad \rho_{\text{ст}}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\frac{T}{R} + \frac{T_0}{R^2}w + s_0\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + q, \tag{10}$$
$$s = \frac{Eh}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \nu\frac{w}{R}\right), \qquad T_0 = \frac{Eh}{1-\nu^2}\left(\frac{w}{R} + \nu\frac{\partial u}{\partial z}\right),$$

где E — модуль Юнга материала, h — толщина оболочки, ν — коэффициент Пуассона, s_0, T_0 — соответственно мембранные силы предварительного продольного и поперечного натяжений оболочки.

Для уравнений гидроупругости необходимо написать кинематические и статические контактные условия на поверхности контакта стенки оболочки с жидкостью.

1. Условие безотрывного обтекания и условия прилипания частиц [1] жидкости к внутренней стенке оболочки:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v_z|_{r=R}, \qquad \frac{\partial w}{\partial t} = v_r|_{r=R}. \tag{11}$$

2. Статические контактные условия, выражающие условие непрерывности нормальных и касательных напряжений на поверхности контакта:

$$q = p|_{r=R} - 2\mu\left.\frac{\partial v_r}{\partial r}\right|_{r=R}, \qquad \tau = \mu\left(\left.\frac{\partial v_r}{\partial z}\right|_{r=R} + \left.\frac{\partial v_z}{\partial r}\right|_{r=R}\right). \tag{12}$$

Определенная трудность возникает при нахождении скорости деформации сдвига на стенке трубы $\partial v_z/\partial r|_{r=R}$.

Здесь можно предложить следующий приближенный метод. Введем в рассмотрение среднее по сечению трубки скорость деформации частиц жидкости:

$$\left(\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)_{\text{ср}} = \frac{2}{R^2}\int_0^R r\frac{\partial v_z}{\partial r}dr = \frac{2}{R}\left(v_z|_{r=R} - \frac{Q}{\pi R^2}\right) = \frac{2}{R}\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{Q}{\pi R^2}\right). \tag{13}$$

В случае установившегося течения вязкой жидкости в круглых трубках с жесткими стенками (течение Пуазейля) отношение скорости деформации сдвига на стенке трубки к средней по сечению трубки скорости деформации сдвига близко к двум. Предположим, что такое же отношение справедливо и для гибких трубок в общем случае осесимметричного неустановившегося течения. Тогда будем иметь:

$$\left.\frac{\partial v_z}{\partial r}\right|_{r=R} = 2\left(\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)_{\text{ср}} = \frac{4}{R}\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{Q}{\pi R^2}\right). \tag{14}$$

Из формулы (14), как частный случай, следует известное выражение скорости деформации сдвига на жесткой стенке при установившемся течение ($\partial u/\partial t = 0$).

Кроме того, можно получить простую формулу, связывающую скорость продольного перемещения стенки сосуда с объёмным расходом жидкости и осевой скоростью потока. Для этого определим среднюю скорость деформации сдвига частиц жидкости по-другому:

$$\left(\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)_{\text{ср}} = \frac{1}{R}\int\limits_0^R \frac{\partial v_z}{\partial r}dr = \frac{1}{R}\left(v_z|_{r=R} - v_x(0)\right) = \frac{1}{R}\left(\frac{\partial u}{\partial t} - v_z|_{r=0}\right). \qquad (15)$$

Вычитая почленно из формулы (13) формулу (15), окончательно получим

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{2Q}{\pi R^2} - v_z|_{r=0}\,. \qquad (16)$$

Измеряя методом допплерографии объёмный расход крови Q и максимальную осевую скорость потока, по формуле (16) можно найти скорость продольного перемещения стенки сосуда. Эта скорость в качестве дополнительной продольной составляющей может включать в себя скорость продольного реактивного сокращения мышц стенки сосуда при работе вторичного распределенного сердца.

Теперь запишем систему одномерных уравнений гидроупругости, которая может быть использована при моделировании пульсирующего кровотока в системе крупных артерий:

$$\rho\frac{\partial Q}{\partial t} = -\pi R^2\frac{\partial p_c}{\partial z} + 2\pi R\mu\left.\frac{\partial v_z}{\partial r}\right|_{r=R} + \mu\frac{\partial^2 Q}{\partial z^2}, \qquad Q = 2\pi\int\limits_0^R r v_z dr,$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{1}{2\pi R}\frac{\partial Q}{\partial z}, \qquad \rho_{\text{ст}}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial s}{\partial z} + \frac{s_0 - T_0}{R}\frac{\partial w}{\partial z} + \mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial z\partial t} + \left.\frac{\partial v_z}{\partial r}\right|_{r=R}\right),$$

$$\rho_{\text{ст}}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\frac{T}{R} + \frac{T_0}{R^2}w + s_0\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + p|_{r=R} - 2\mu\left.\frac{\partial v_r}{\partial r}\right|_{r=R},$$

$$s = \frac{Eh}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \nu\frac{w}{R}\right), \qquad T = \frac{Eh}{1-\nu^2}\left(\frac{w}{R} + \nu\frac{\partial u}{\partial z}\right), \qquad (17)$$

$$p|_{r=R} = p_c + \rho\frac{1}{8\pi}\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial t\partial z} + 2v_0\frac{\partial^2 Q}{\partial z^2}\right) - \mu\left[\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial t} + \frac{1}{\pi R^2}\frac{\partial Q}{\partial z} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial^3 Q}{\partial z^3}\right],$$

$$\left.\frac{\partial v_r}{\partial r}\right|_{r=R} = -\frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial z\partial t} = \frac{1}{2\pi R^2}\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z\partial t},$$

$$\left.\frac{\partial v_z}{\partial r}\right|_{r=R} = \frac{4}{R}\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{Q}{\pi R^2}\right), \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{R}\left(\frac{2Q}{\pi R^2} - v_z|_{r=0}\right).$$

Система замкнута, так как для определения десяти искомых функций Q, u, w, s, T, p_c, $p|_{r=R}$, $v_x|_{r=0}$, $\left.\frac{\partial v_r}{\partial r}\right|_{r=R}$, $\left.\frac{\partial v_z}{\partial r}\right|_{r=R}$ имеем десять уравнений.

В классе периодических функций времени эта система решается точно, и её общее решение можно представить комплексными рядами Фурье.

Библиографический список

1. *Педли Т.* Гидродинамика крупных кровеносных сосудов. М. : Мир, 1983. 400 с.

2. *Гуляев Ю. П., Коссович Л. Ю.* Математические модели биомеханики в медицине / учеб. пособие для студ. мех.-мат. фак. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2001. 49 с.

3. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика : в 2 ч. М. : Физматгиз, 1963. Ч. 2. 728 с.