

Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

A. V. Golub, A. P. Khromov, Equiconvergence theorem for expansions in eigenfunctions of integral operators with discontinuous involution, *Izv. Saratov Univ. Math. Mech. Inform.*, 2007, Volume 7, Issue 2, 5–10

DOI: 10.18500/1816-9791-2007-7-2-5-10

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.172

February 14, 2025, 08:37:54





- 3) для всех  $x$  из  $(0; 1) \setminus S(\sigma)$  справедливо равенство  $(pG''_{xx})'_x(x+0, x) - (pG''_{xx})'_x(x-0, x) = 1$ , и  $(pG''_{xx})'_x(x+0, x) - (pG''_{xx})'_x(x-0, x) + G(x, x)\Delta Q(x) = 1$  для  $x \in S(\sigma)$ ;  
 4) при всех  $s$   $G(0, s) = pG''_{xx}(0, s) = pG''_{xx}(1, s) = (pG''_{xx})'_x(1, s) = 0$ .

Тогда, как нетрудно видеть, функция  $u(x) = \int_0^1 G(x, s)F'_\sigma(s)ds$  является решением краевой задачи (1). Теорема доказана.

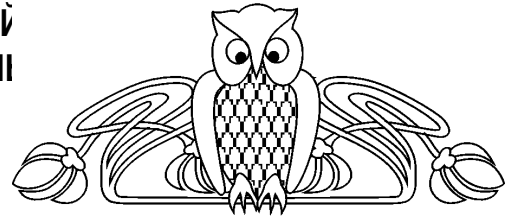
Пользуясь случаем, автор выражает благодарность и признательность своему научному руководителю профессору Юлию Витальевичу Покорному за постановку задачи и чуткое руководство.

**Библиографический список**

1. Покорный Ю.В., Копытин А.В. О регулярном толковании уравнения негладкого стержня // Вестн. Удмуртского ун-та. Математика. Механика. Ижевск, 2000. № 1. С. 137-144.

УДК 517.984

**ТЕОРЕМА РАВНОСХОДИМОСТИ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ИНВОЛЮЦИЕЙ, ДОПУСКАЮЩЕЙ РАЗРЫВЫ**



А.В. Голубь, А.П. Хромов

Саратовский государственный университет, кафедра дифференциальных уравнений и прикладной математики  
 E-mail: KhromovAP@info.sgu.ru

**Equiconvergence Theorem for Expansions in Eigenfunctions of Integral Operators with Discontinuous Involution**

A.V. Golub, A.P. Khromov

In the paper we consider the equiconvergence of expansions in trigonometric Fourier series and in eigen- and associated functions of integral operators with involution having discontinuities of the first type.

В статье устанавливается равносходимость разложений в тригонометрический ряд Фурье по собственным и присоединенным функциям интегрального оператора с инволюцией, допускающей разрывы первого рода.

Рассмотрим оператор

$$Af(x) = \int_0^{\theta(x)} A(\theta(x), t)f(t) dt, \tag{1}$$

где  $\theta(x) = \frac{1}{2} - x$  при  $x \in [0; \frac{1}{2}]$  и  $\theta(x) = \frac{3}{2} - x$  при  $x \in [\frac{1}{2}; 1]$ . Функция  $\theta(x)$  является инволюцией, т.е.  $\theta(\theta(x)) = x$ , причем  $\theta(x)$  терпит разрыв первого рода при  $x = \frac{1}{2}$ .

Требования на ядро оператора (1): функция  $A(x, t) = 0$  при  $t \geq x$ ,  $A(x, x-0) \equiv 1$  и  $\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial t^l} A(x, t)$  непрерывны при  $t \leq x$  и  $k+l \leq 2$ .

Операторы такого вида рассматривались в [1]. В данной статье, в отличие от результатов [1], получаются просто проверяемые условия, при которых имеет место равносходимость разложений по собственным и присоединенным функциям (с.п.ф.) оператора (1) и в обычный тригонометрический ряд Фурье.

Обозначим  $\tilde{A}(x, t) = A(\theta(x), t)$  при  $t \leq \theta(x)$  и  $\tilde{A}(x, t) \equiv 0$  при  $t > \theta(x)$  и введем матрицу  $B(x, t)$  с компонентами  $B_{ij}(x, t) = A(\frac{i-1}{2} + x, \frac{j-1}{2} + t)$  ( $i, j = 1, 2$ ),  $x, t \in [0; \frac{1}{2}]$ .

**Лемма 1.** Если  $y(x) = Af(x)$ , то  $z(x) = Bg(x)$ ,  $x \in [0; 1/2]$ , где  $z(x) = (z_1(x), z_2(x))^T$  ( $T$  — знак транспонирования),  $z_1(x) = y(x)$ ,  $z_2(x) = y(\frac{1}{2} + x)$ ,  $g(x) = (g_1(x), g_2(x))^T$ ,  $g_1(x) = f(x)$ ,  $g_2(x) = f(\frac{1}{2} + x)$ ,  $Bg(x) = \int_0^{1/2} B(x, t)g(t) dt$ .

**Доказательство.** Из определения оператора  $A$  имеем

$$y(x) = \int_0^{\frac{1}{2}-x} A\left(\frac{1}{2} - x, t\right) f(t) dt, \quad x \in [0; 1/2], \tag{2}$$



$$y(x) = \int_0^{\frac{3}{2}-x} A\left(\frac{3}{2}-x, t\right) f(t) dt, \quad x \in [1/2; 1]. \quad (3)$$

Но  $A\left(\frac{1}{2}-x, t\right) = B_{11}(x, t)$ , тогда (2) переписывается как

$$z_1(x) = \int_0^{1/2} B_{11}(x, t) g_1(t) dt. \quad (4)$$

В (3) положим  $x = \frac{1}{2} + \xi$ . Тогда  $\xi \in [0; \frac{1}{2}]$  и (3) переписывается следующим образом:

$$\begin{aligned} y\left(\frac{1}{2} + \xi\right) &= \int_0^{1-\xi} A(1-\xi, t) f(t) dt = \int_0^{1/2} A(1-\xi, t) f(t) dt + \int_{1/2}^{1-\xi} A(1-\xi, t) f(t) dt = \\ &= \int_0^{1/2} A(1-\xi, t) f(t) dt + \int_0^{\frac{1}{2}-\xi} A\left(1-\xi, \frac{1}{2} + \eta\right) f\left(\frac{1}{2} + \eta\right) d\eta. \end{aligned} \quad (5)$$

Так как  $A(1-x, t) = B_{21}(x, t)$ ,  $A\left(1-x, \frac{1}{2} + t\right) = B_{22}(x, t)$ , то (5) можно переписать как

$$z_2(x) = \int_0^{1/2} B_{21}(x, t) g_1(t) dt + \int_0^{1/2} B_{22}(x, t) g_2(t) dt. \quad (6)$$

Из (4) и (6), учитывая, что  $B_{12}(x, t) \equiv 0$ , следует утверждение леммы.  $\square$

**Следствие.** Имеет место формула  $z'\left(\frac{1}{2}-x\right) = -g(x) + B_1 g(x)$ , где  $B_1 g(x) = \int_0^{1/2} B_x\left(\frac{1}{2}-x, t\right) \times g(t) dt$ ,  $B_x(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} B(x, t)$ .

**Доказательство.** Так как компоненты матрицы  $B(x, t)$  могут терпеть разрыв на линии  $t + x = \frac{1}{2}$ , то  $z(x)$  можно представить в виде

$$\begin{aligned} z(x) &= \int_0^{1/2} B(x, t) g(t) dt = \int_0^{\frac{1}{2}-x} B(x, t) g(t) dt + \int_{\frac{1}{2}-x}^{1/2} B(x, t) g(t) dt = \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}-x} \begin{pmatrix} A\left(\frac{1}{2}-x, t\right) & 0 \\ A(1-x, t) & A\left(1-x, \frac{1}{2} + t\right) \end{pmatrix} g(t) dt + \int_{\frac{1}{2}-x}^{1/2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A(1-x, t) & 0 \end{pmatrix} g(t) dt. \end{aligned}$$

После дифференцирования получим

$$\begin{aligned} z'(x) &= - \begin{pmatrix} A\left(\frac{1}{2}-x, \frac{1}{2}-x-0\right) & 0 \\ A\left(1-x, \frac{1}{2}-x-0\right) & A(1-x, 1-x-0) \end{pmatrix} g\left(\frac{1}{2}-x\right) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A\left(1-x, \frac{1}{2}-x+0\right) & 0 \end{pmatrix} \times \\ &\times g\left(\frac{1}{2}-x\right) + \int_0^{1/2} B_x(x, t) g(t) dt = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} g\left(\frac{1}{2}-x\right) + \int_0^{1/2} B_x(x, t) g(t) dt. \end{aligned}$$

Поменяв  $x$  на  $\frac{1}{2}-x$ , получим требуемое. Лемма доказана.  $\square$

Представим оператор  $B_1$  в пространстве  $L_2^2[0, 1/2]$  в виде  $B_1 = W + V$ , где  $\|W\| < 1$ ,  $Vg(x) = \sum_{k=1}^m (g, \psi_k) \varphi_k(x)$ ,  $\{\psi_k(x)\}_1^m$ ,  $\{\varphi_k(x)\}_1^m$  — линейно независимые системы в пространстве вектор-

функций размерности 2,  $(g, \psi_k) = \sum_{j=1}^2 \int_0^{1/2} g_j(t) \psi_k^j(t) dt$ . Тогда по следствию из леммы  $1 z'\left(\frac{1}{2}-x\right) = (W - E)g(x) + Vg(x)$ . Откуда

$$(W - E)^{-1} z'\left(\frac{1}{2}-x\right) = g(x) + \sum_{k=1}^m (g, \psi_k) (W - E)^{-1} \varphi_k(x). \quad (7)$$



Обозначим  $(W - E)^{-1}\varphi_k(x) = \tilde{\varphi}_k(x)$ ,  $E$  — единичный оператор.

**Лемма 2.** Оператор  $B^{-1}$  существует тогда и только тогда, когда  $\text{rang } M = m$ , где

$$M = \begin{pmatrix} E + (\tilde{\varphi}, \psi)^T \\ \int_0^{1/2} B(0, t)\tilde{\varphi}^T(t) dt \end{pmatrix}, \quad E - \text{единичная матрица размерности } m \times m, \quad (\tilde{\varphi}, \psi) = \{(\tilde{\varphi}_j, \psi_k)\}_{j,k=1}^m, \\ \tilde{\varphi}^T = (\tilde{\varphi}_1, \dots, \tilde{\varphi}_m).$$

**Доказательство.** Пусть  $Bg = 0$ . Тогда из (7) при  $z(x) \equiv 0$  получим  $0 = g(x) + \sum_{k=1}^m \gamma_k \tilde{\varphi}_k(x)$ , где  $\gamma_k = (g, \psi_k)$ . Умножая последнее равенство скалярно на  $\{\psi_k(x)\}_1^m$ , получим систему

$$0 = \gamma_k + \sum_{k=1}^m \gamma_j (\tilde{\varphi}_k, \psi_k), \quad k = 1, \dots, m. \quad (8)$$

Подставляя  $g(x) = -\sum_{k=1}^m \gamma_k \tilde{\varphi}_k(x)$  в  $\int_0^{1/2} B(0, t)g(t) dt = 0$ , получаем

$$0 = \sum_{j=1}^m \gamma_j \int_0^{1/2} B(0, t)\tilde{\varphi}_j(t) dt. \quad (9)$$

Соотношения (8)–(9) представляют собой необходимые и достаточные условия для нахождения  $\{\gamma_k\}$ . Поэтому  $B^{-1}$  существует тогда и только тогда, когда ранг матрицы  $M$  системы (8)–(9) равен  $m$ .

**Лемма 3.** Пусть  $B^{-1}$  существует и для определенности минор  $\Delta$  матрицы  $M$ , образованный из первых  $m$  строк, отличен от нуля. Тогда

$$B^{-1}z = (W - E)^{-1}z' \left(\frac{1}{2} - x\right) \frac{1}{\Delta} \sum_{j,k=1}^m ((W - E)^{-1}z' \left(\frac{1}{2} - x\right), \psi_j) \Delta_{jk} \tilde{\varphi}_k(x), \quad \int_0^{1/2} B(0, t)B^{-1}z(t) dt = 0,$$

где  $\Delta_{jk}$  — алгебраические дополнения элементов определителя  $\Delta$ .

**Лемма 4.** Для оператора  $B^{-1}$  справедливо представление

$$B^{-1}z(x) = z' \left(\frac{1}{2} - x\right) + a_1(x)z(0) + a_2z \left(\frac{1}{2}\right) + a_3(x)z(x) + a_4(x)z \left(\frac{1}{2} - x\right) + \int_0^{1/2} a(x, t)z(t) dt, \\ S \cdot z(0) + T \cdot z \left(\frac{1}{2}\right) = 0, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

где  $a_i(x)$  ( $i = 1, \dots, 4$ ),  $a'_3(x)$ ,  $a'_4(x)$ ,  $a(x, t)$  — непрерывные матрицы-функции. Кроме того, каждая компонента матрицы  $a(x, t)$  имеет ту же гладкость, что и компоненты  $B_x(x, t)$ , с той лишь разницей, что теперь по  $t$  предполагается лишь непрерывность.

**Лемма 5.** Если  $z(x) = (E - \lambda B)^{-1}Bg(x)$ , а  $v(x) = (z^T(x), z^T(\frac{1}{2} - x))^T$ , то  $v(x)$  удовлетворяет интегро-дифференциальной системе:

$$Qv'(x) + \tilde{P}_1(x)v(0) + \tilde{P}_2(x)v \left(\frac{1}{2}\right) + \tilde{P}_3(x)v(x) + \tilde{N}v - \lambda v(x) = \tilde{m}(x), \quad \tilde{M}_0v(0) + \tilde{M}_1v \left(\frac{1}{2}\right) = 0, \quad (10)$$

$$\text{где } Q = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{P}_1(x) = \begin{pmatrix} a_1(x) & a_2(x) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{P}_2(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_2 \left(\frac{1}{2} - x\right) & a_1 \left(\frac{1}{2} - x\right) \end{pmatrix}, \\ \tilde{P}_3(x) = \begin{pmatrix} a_3(x) & a_4(x) \\ a_4 \left(\frac{1}{2} - x\right) & a_3 \left(\frac{1}{2} - x\right) \end{pmatrix}, \quad \tilde{N}v = \int_0^{1/2} \tilde{N}(x, t)v(t) dt, \quad \tilde{N}(x, t) = \begin{pmatrix} a(x, t) & 0 \\ a \left(\frac{1}{2} - x, t\right) & 0 \end{pmatrix}, \\ \tilde{M}_0 = \begin{pmatrix} S & T \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{M}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ T & S \end{pmatrix}, \quad \tilde{m}(x) = (g^T(x), g^T \left(\frac{1}{2} - x\right))^T.$$

**Лемма 6.** Если  $R_\lambda = (E - \lambda A)^{-1}A$  существует, то

$$R_\lambda f(x) = v_1(x), \quad x \in [0, 1/2], \quad R_\lambda f(x) = v_2 \left(x - \frac{1}{2}\right), \quad x \in [1/2, 1], \quad (11)$$

где  $v_i(x)$  — компоненты вектора  $v(x)$ , удовлетворяющего системе (10). Верно и обратное, то есть если  $\lambda$  таково, что однородная краевая задача для системы (10) имеет только нулевое решение, то  $R_\lambda$  существует и определяется по формуле (11).



**Лемма 7.** Существует матрица-функция  $H(x, \lambda) = H_0(x) + \lambda^{-1}H_1(x)$  с непрерывно дифференцируемыми компонентами матриц  $H_0(x)$ ,  $H_1(x)$ , причем  $H_0(x)$  невырождена при всех  $x$  и диагональна, что преобразование  $v(x) = \Gamma H(x, \lambda)w(x)$ , где  $\Gamma$  — матрица, диагонализующая матрицу  $Q^{-1}$ , т.е.  $\Gamma^{-1}Q^{-1}\Gamma = D = \text{diag}(i, -i, i, -i)$ , приводит систему (10) к виду

$$\begin{aligned} w'(x) + P_1(x, \lambda)w(0) + P_2(x, \lambda)w\left(\frac{1}{2}\right) + P_3(x, \lambda)w(x) + N_\lambda w - \lambda Dw(x) &= m(x, \lambda), \\ U(w) = M_{0\lambda}w(0) + M_{1\lambda}w\left(\frac{1}{2}\right) &= 0, \end{aligned} \tag{12}$$

где  $P_1(x, \lambda) = H^{-1}(x, \lambda)D\Gamma^{-1}\tilde{P}_1(x)H(0, \lambda)$ ,  $P_2(x, \lambda) = H^{-1}(x, \lambda)D\Gamma^{-1}\tilde{P}_2(x)H\left(\frac{1}{2}, \lambda\right)$ ,  $P_3(x, \lambda) = \lambda^{-1}H^{-1}(x, \lambda)[H'_1(x) + D\Gamma^{-1}\tilde{P}_3(x)H_1(x)]$ ,  $N_\lambda = H^{-1}(x, \lambda)D\Gamma^{-1}\tilde{N}\Gamma H(x, \lambda)$ ,  $M_{0\lambda} = \tilde{M}_0\Gamma H(0, \lambda)$ ,  $M_{1\lambda} = \tilde{M}_1\Gamma H\left(\frac{1}{2}, \lambda\right)$ ,  $m(x, \lambda) = H^{-1}(x, \lambda)D\Gamma^{-1}\tilde{m}(x)$ .

Рассмотрим краевую задачу

$$w'(x) = \lambda Dw(x) + m(x), \quad U(w) = 0, \tag{13}$$

где  $U(\cdot)$  — краевые условия из (12),  $m(x)$  — произвольный вектор-функция с компонентами из  $L[0, 1/2]$ .

**Лемма 8.** Для решения задачи (13) имеет место формула

$$w(x, \lambda) = -Y(x, \lambda)\Delta^{-1}(\lambda) \int_0^{1/2} U_x(g(x, t, \lambda))m(t) dt + g_\lambda m(x), \tag{14}$$

где  $Y(x, \lambda) = \text{diag}(e^{\lambda ix}, e^{-\lambda ix}, e^{\lambda ix}, e^{-\lambda ix})$ ;  $\Delta(\lambda) = U(Y(x, \lambda))$ ;  $g(x, t, \lambda) = \text{diag}(g_1(x, t, \lambda), \dots, \dots, g_4(x, t, \lambda))$ ;  $g_j(x, t, \lambda) = -\varepsilon(t, x)e^{\lambda i(x-t)}$  ( $j = 1, 3$ );  $g_j(x, t, \lambda) = \varepsilon(x, t)e^{-\lambda i(x-t)}$  ( $j = 2, 4$ );  $\varepsilon(x, t) = 1$  при  $t \leq x$ ,  $\varepsilon(x, t) = 0$  при  $t > x$ ;  $g_\lambda m(x) = \int_0^{1/2} g(x, t, \lambda)m(t) dt$  и  $U_x(\cdot)$  означает, что краевое условие берется по аргументу  $x$ .

Здесь и далее считаем, что  $\text{Re } \lambda i \geq 0$ .

**Лемма 9.** Для матрицы  $\Delta(\lambda)$  при больших  $|\lambda|$  имеет место следующее представление:  $\Delta(\lambda) = ([a_{ij}] + [b_{ij}]e^{\mu\omega_j})_{i,j=1}^4$ , где  $\mu = \lambda/2$ ,  $\omega_1 = \omega_3 = i$ ,  $\omega_2 = \omega_4 = -i$ ,  $a_{ij}$  ( $b_{ij}$ ) — компоненты матрицы  $K_0$  ( $L_0$ ),  $K_0 = \begin{pmatrix} S\Gamma_{11} + T\Gamma_{21} & S\Gamma_{12} + T\Gamma_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} H_0(0)$ ,  $L_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ T\Gamma_{11} + S\Gamma_{21} & T\Gamma_{12} + S\Gamma_{22} \end{pmatrix} H_0\left(\frac{1}{2}\right)$ , где  $\Gamma_{ij}$  — блоки матрицы  $\Gamma$  размера  $2 \times 2$ ,  $[a] = a + O(\lambda^{-1})$ .

**Доказательство.** По определению  $\Delta(\lambda) = U(Y(x, \lambda))$ , где  $Y(x, \lambda) = \text{diag}(e^{\lambda\omega_1 x}, \dots, e^{\lambda\omega_4 x})$ . Тогда

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) &= M_{0\lambda}Y(0, \lambda) + M_{1\lambda}Y\left(\frac{1}{2}, \lambda\right) = M_0H(0, \lambda)E + M_1H\left(\frac{1}{2}, \lambda\right)Y\left(\frac{1}{2}, \lambda\right) = \\ &= \tilde{M}_0\Gamma(H_0(0) + \lambda^{-1}H_1(0)) + \tilde{M}_1\Gamma\left(H_0\left(\frac{1}{2}\right) + \lambda^{-1}H_1\left(\frac{1}{2}\right)\right)Y\left(\frac{1}{2}, \lambda\right) = \\ &= \begin{pmatrix} S & T \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{pmatrix} (H_0(0) + \lambda^{-1}H_1(0)) + \\ &+ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ T & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{pmatrix} \left(H_0\left(\frac{1}{2}\right) + \lambda^{-1}H_1\left(\frac{1}{2}\right)\right)Y\left(\frac{1}{2}, \lambda\right). \end{aligned}$$

Откуда следует утверждение леммы.  $\square$

**Следствие.** Имеет место следующая асимптотическая формула:

$$\det \Delta(\lambda) = (\theta_0 + \theta_1 e^{-\mu i} + \theta_2 e^{-2\mu i} + \theta_3 e^{-3\mu i} + \theta_4 e^{-4\mu i} + O(\lambda^{-1})) e^{2\mu i},$$

где  $\theta_i$  — комплексные числа, причем  $\theta_0 = \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & b_{13} & a_{14} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{41} & a_{42} & b_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = 1$ ,  $\theta_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & a_{13} & b_{14} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{41} & b_{42} & a_{43} & b_{44} \end{vmatrix} = 1$ .

Обозначим далее через  $S_\delta$  комплексную  $\lambda$ -плоскость с удаленными нулями  $\det \Delta(\lambda)$  вместе с круговыми окрестностями одного и того же достаточно малого радиуса  $\delta$ .

**Лемма 10.** В области  $S_\delta$  справедлива оценка  $|\det \Delta(\lambda)| \geq C|e^{\lambda i}|$ .



**Лемма 11.** В области  $S_\delta$  при больших  $|\lambda|$  для решения  $w(x, \lambda) = R_{1\lambda}m(x)$  задачи (13) имеют место оценки:

$$\begin{aligned} \|R_{1\lambda}m\|_\infty &= O(\|m\|_1), & \|R_{1\lambda}m\|_\infty &= O(\varkappa(\lambda)\|m\|_\infty), \\ \|R_{1\lambda}m\|_1 &= O(\varkappa(\lambda)\|m\|_1), & \|R_{1\lambda}\chi\|_\infty &= O(\lambda^{-1}), \end{aligned}$$

где  $\|\cdot\|_\infty$  ( $\|\cdot\|_1$ ) — нормы в  $L_\infty [0, 1/2]$  ( $L [0, 1/2]$ ) в пространстве вектор-функций,  $\chi(x)$  — вектор-функция, у которой каждая компонента есть характеристическая функция отрезка  $[0, 1/2]$ ,

$$\varkappa(\lambda) = \frac{1 - e^{-|\operatorname{Re} \mu i|}}{|\operatorname{Re} \mu i|}.$$

**Доказательство.** Найдем оценки элементов матрицы  $Y(x, \lambda)\Delta^{-1}(\lambda)$ . Пусть  $\Delta_{ij}$  — алгебраические дополнения элементов матрицы  $\Delta(\lambda)$ . Тогда имеют место оценки  $\Delta_{i1} = \Delta_{i3} = O(e^{\mu i})$ ,  $\Delta_{i2} = \Delta_{i4} = O(e^{\lambda i})$ , следующие из леммы 9. Тогда, учитывая оценку из леммы 10, получаем оценку элементов матрицы  $Y(x, \lambda)\Delta^{-1}(\lambda)$ : элементы первой и третьей строк имеют оценку  $O(e^{\lambda i(x-\frac{1}{2})})$ ; второй и четвертой —  $O(e^{-\lambda i x})$ . Рассуждая далее аналогично [2] получаем требуемое.  $\square$

Рассмотрим задачу (12).

**Лемма 12.** В области  $S_\delta$  при больших  $|\lambda|$  имеет место оценка  $\|R_{1\lambda}N_\lambda\|_\infty = o(1)$ .

**Следствие.** В  $S_\delta$  при больших  $|\lambda|$  оператор  $E + R_{1\lambda}P_3(x, \lambda) + R_{1\lambda}N_\lambda$  обратим в  $L_\infty$ .

**Лемма 13.** В  $S_\delta$  при больших  $|\lambda|$  краевая задача (12) однозначно разрешима и для ее решения  $w(x, \lambda)$  справедлива оценка  $\|w(x, \lambda) - R_{1\lambda}H_0^{-1}m(x, \lambda)\|_\infty = O\left(\left(\frac{1}{|\lambda|} + \varkappa^2(\lambda)\right)\|f\|_1\right)$ .

**Лемма 14.** Если  $m(x) = \chi(x)$ , то  $\|w(x, \lambda) - R_{1\lambda}H_0^{-1}m(x)\|_\infty = O(\lambda^{-2})$ .

**Лемма 15.** Для любой  $f(x) \in L[0, 1]$  имеет место

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left\| \int_{|\lambda|=r} H(x, \lambda)[w(x, \lambda) - R_{1\lambda}H_0^{-1}m(x)] d\lambda \right\|_\infty = 0$$

(считается, что окружности  $|\lambda| = r$  находятся в  $S_\delta$ ).

Рассмотрим еще одну краевую задачу

$$u'(x) = \lambda Du(x) + m(x), \quad U_0(u) = u(0) - u\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

и ее решение обозначим  $R_{2\lambda}m$ . Для  $R_{2\lambda}m$  имеет место формула (14), где  $\Delta(\lambda)$  заменяется на  $\Delta_0(\lambda) = U_0(Y(x, \lambda))$ , а  $U(\cdot)$  — на  $U_0(\cdot)$ .

Удалим из  $S_\delta$  вместе с круговыми окрестностями радиуса  $\delta$  еще и собственные значения краевых задач

$$\begin{cases} u'(x) - \lambda i u(x) = 0, \\ u(0) = u(1/2) \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} u'(x) + \lambda i u(x) = 0, \\ u(0) = u(1/2) \end{cases}$$

и получившуюся область снова обозначим через  $S_\delta$ .

**Лемма 16.** Если  $m(x)$  — вектор-функция с компонентами из  $L [0, \frac{1}{2}]$  и  $m(x, \lambda) = H^{-1}(x, \lambda)m(x)$ , то

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left\| \int_{|\lambda|=r} H(x, \lambda)[R_{2\lambda}m(x, \lambda) - R_{2\lambda}(H_0^{-1}m(x))] d\lambda \right\|_\infty = 0.$$

**Лемма 17.** Если  $m(x)$  из леммы 16, то

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left\| \int_{|\lambda|=r} H(x, \lambda)[R_{1\lambda}m(x) - R_{2\lambda}m(x)] d\lambda \right\|_{[\varepsilon, \frac{1}{2}-\varepsilon]} = 0, \quad \varepsilon \in (0, 1/4).$$

**Лемма 18.** Если  $f(x) \in L[0, 1]$ , то

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left\| \int_{|\lambda|=r} [H(x, \lambda)w(x, \lambda) - H_0(x)R_{2\lambda}(H_0^{-1}\tilde{m}(x))] d\lambda \right\|_{[\varepsilon, \frac{1}{2}-\varepsilon]} = 0,$$

где  $\varepsilon \in (0, \frac{1}{4})$  и  $w(x, \lambda)$  — решение задачи (12),  $\tilde{m}(x)$  — из (10).

**Теорема.** Пусть  $A^{-1}$  существует. Тогда для любой  $f(x) \in L[0, 1]$  и любого  $\varepsilon \in (0, \frac{1}{4})$  имеют место соотношения:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \|S_r(f, x) - \sigma_r(f, x)\|_{[\varepsilon, \frac{1}{2}-\varepsilon]} = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \left\| S_r(f, x) - \sigma_r\left(g, x - \frac{1}{2}\right) \right\|_{[\frac{1}{2}+\varepsilon, 1-\varepsilon]} = 0,$$



где  $g(x) = f(\frac{1}{2} + x)$ ,  $x \in [0, \frac{1}{2}]$ ,  $S_r(f, x)$  — частичная сумма ряда Фурье по с.п.ф. оператора  $A$  для тех характеристических чисел, для которых  $|\lambda_k| < r$ ,  $\sigma_r(g, x)$  — частичная сумма ряда Фурье по системе  $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} e^{4k\pi i x} \right\}_{-\infty}^{\infty}$  функции  $g(x)$  на отрезке  $x \in [0, \frac{1}{2}]$  для тех  $k$ , для которых  $|4k\pi| < r$ .

**Доказательство.** Имеем  $S_r(f, x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} R_\lambda(A)f(x) d\lambda$ ,  $\sigma_r(f, x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} R_{0\lambda}f(x) d\lambda$ , где  $y(x) = R_{0\lambda}f(x)$  есть решение краевой задачи  $y'(x) - \lambda y(x) = f(x)$ ,  $y(0) = y(1/2)$ .

Пусть  $x \in [0, \frac{1}{2}]$ . Тогда  $R_{0\lambda}f(x) = (\Gamma H_0(x)R_{2\lambda}(H_0^{-1}\tilde{m}))_1$ ,  $R_\lambda f(x) = (\Gamma H(x, \lambda)w(x, \lambda))_1$ , где  $(\cdot)_1$  означает первую компоненту вектора, помещенного в скобки. По лемме 18 имеем

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left\| \int_{|\lambda|=r} [(\Gamma H(x, \lambda)w(x, \lambda))_1 - (\Gamma H_0(x)R_{2\lambda}(H_0^{-1}\tilde{m}(x)))_1] d\lambda \right\|_{[\varepsilon, \frac{1}{2}-\varepsilon]} = 0.$$

Тогда  $S_r(f, x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} (\Gamma H_0(x)R_{2\lambda}(H_0^{-1}\tilde{m}(x)))_1 d\lambda + o(1)$ , где  $o(1) \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow \infty$  равномерно по  $x \in [\varepsilon, \frac{1}{2} - \varepsilon]$ . Но  $-\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} (\Gamma H_0(x)R_{2\lambda}(H_0^{-1}\tilde{m}(x)))_1 d\lambda = \sigma_r(f, x)$  и первое соотношение теоремы получено. Второе соотношение получается аналогично. Теорема доказана.  $\square$

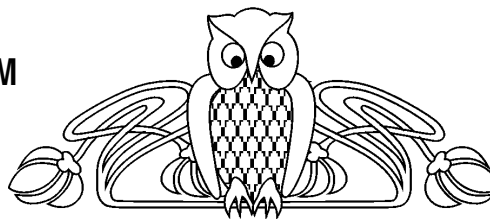
Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 06-01-00003).

### Библиографический список

1. Хромов А.П. Интегральные операторы с ядрами, разрывными на ломаных линиях // Мат. сб. 2006. Т. 197, вып. 11. С. 115–142.
2. Корнев В.В., Хромов А.П. О равносходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с ядрами, допускающими разрывы производных на диагоналях // Мат. сб. 2001. Т. 192, № 10. С. 33–50.

УДК 517.984.52

## РАЗЛОЖЕНИЕ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА $n$ -ГО ПОРЯДКА С НЕРЕГУЛЯРНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ



О.Ю. Дмитриев

Саратовский государственный университет,  
кафедра дифференциальных уравнений и прикладной математики  
E-mail: DmitrievOU@info.sgu.ru

### Expansions in Eigenfunctions of the $n$ -th Order Differential Operator with Non-Regular Boundary Conditions

O.Yu. Dmitriev

The paper deals with the expansions in eigenfunctions of the  $n$ -th order differential operator with non-regular boundary conditions of special type. Necessary and sufficient conditions for existing of such expansions either on the interval  $[0, 1]$  or inside it are derived.

В работе рассматривается задача разложения по собственным функциям дифференциального оператора  $n$ -го порядка с нерегулярными краевыми условиями специального вида. Получены необходимые и достаточные условия разложения по собственным функциям на отрезке  $[0, 1]$  и внутри него.

Рассмотрим на отрезке  $[0, 1]$  краевую задачу, определенную дифференциальным уравнением

$$y^{(n)} - \lambda y = 0, \tag{1}$$

и краевыми условиями

$$U_i(y) = a_i y^{(i-1)}(0) + y^{(i-1)}(1) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \tag{2}$$

где  $a_i$  — константы,  $\lambda$  — спектральный параметр,  $n = 4k + 1$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

Для случая  $n = 3$  А.П.Хромовым в [1] были получены необходимые и достаточные условия разложения функции в равномерно сходящийся на  $(0, 1)$  ряд Фурье по собственным и присоединенным функциям краевой задачи (1)–(2) с нерегулярными краевыми условиями. Там же были получены теоремы о разложении внутри интервала  $(0, 1)$ .