УДК 625.396.67:518.371 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

© В.Ф. КРАВЧЕНКО

# ВОЗБУЖДЕНИЕ И РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ТЕЛАХ С РАЗЛИЧНЫМ ИМПЕДАНСОМ, ИМЕЮЩИХ СИММЕТРИЮ ВРАЩЕНИЯ

*(Представлено академиком Ю.А. Митропольским 15 VI 1988)*

1. Рассмотрим импедансное сверхпроводящее тело вращения [1], возбуждаемое сторонними источниками. Задача заключается в определении рассеянного поля этой поверхностью. Пусть область $V^-$, содержащая сторонние токи, является внешней по отношению к сверхпроводящему телу. В этой области искомое поле $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{H}_1$ должно удовлетворять следующим уравнениям:

$$(1)\qquad \begin{aligned} \operatorname{rot}\ \mathbf{E}_1 &= -ik\mathbf{H}_1 - \frac{4\pi}{c}\ \mathbf{j}^{(\text{м})}, \\ \operatorname{rot}\ \mathbf{H}_1 &= ik\mathbf{E}_1 + \frac{4\pi}{c}\ \mathbf{j}^{(\text{э})}. \end{aligned}$$

На границе тела $\Sigma$ выполняется граничное условие [2, 3]:

$$(2)\qquad [\mathbf{n}\mathbf{E}_1]\,|_{\Sigma} = \hat{Z}[\mathbf{n}[\mathbf{n}\mathbf{H}_1]]\,|_{\Sigma},$$

где $\mathbf{n}$ – нормаль к сверхпроводящей поверхности $\Sigma$; $\hat{Z}$ – импеданс сверхпроводящего тела, имеющего тот же физический смысл, что и в [2, 3]. Так как область $V^-$ является бесконечномерной, то поле должно удовлетворять условиям излучения Зоммерфельда и Мейкснера. Решение краевой задачи (1), (2) с условиями излучения в пространстве $W_2^1(V^-)$ существует и единственно в том случае, если

$$(3)\qquad \mathbf{j}^{(\text{м})} + \operatorname{rot}\mathbf{j}^{(\text{э})} \in L_2(V^-), \quad \mathbf{j}^{(\text{э})} + \operatorname{rot}\mathbf{j}^{(\text{м})} \in L_2(V^-).$$

Далее, так как сторонние токи расположены в ограниченном объеме $B \subset V^-$, то их объемные плотности являются финитными функциями в $V^-$. Следовательно, выражения (3) принадлежат пространству $L_2(V^-)$. Таким образом, решение краевой задачи (1), (2) существует и единственно.

2. Метод решения поставленной задачи (1), (2) состоит в следующем. Вначале с помощью леммы Лоренца сводим краевую задачу (1), (2) к интегральному уравнению

$$(4)\qquad \int\limits_{\Sigma\cup S} \left\{ [\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_2] - [\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_1]\,\mathbf{n}\, d\sigma = \right. \\ = \frac{4\pi}{c} \int\limits_{V^-} (\mathbf{E}_1\mathbf{j}_2^{(\text{э})} - \mathbf{E}_2\mathbf{j}_1^{(\text{э})} - \mathbf{H}_1\mathbf{j}_2^{(\text{м})} + \mathbf{H}_2\mathbf{j}_1^{(\text{м})})\, dV^-,$$

где $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{H}_1$ – искомые поля; $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{H}_2$ – вспомогательные поля, создаваемые электрическими и магнитными $\mathbf{j}_2^{(\text{э})}$, $\mathbf{j}_2^{(\text{м})}$; $S$ – поверхность сферы бесконечно большого радиуса; $\mathbf{n}$ – нормаль к сверхпроводящей поверхности $\Sigma$ и к сфере бесконечно большого радиуса $S$. Так как рассматриваемые поля удовлетворяют условию излучения, то интеграл по $S$ обращается в нуль. Пусть $\mathbf{J}$ – вектор плотности сверхпроводящего квазиповерхностного тока, который связан с обычной (объемной) плотностью тока $\mathbf{j}$ соотношением

$$(5)\qquad \mathbf{J} = \int\limits_0^{Nd} \mathbf{j}\,d\mathbf{n}.$$

Здесь интегрирование производится по нормали от поверхности тела до глубины $Nd$, ниже которой токами и полями можно уже пренебречь ($d$ – толщина скин-слоя).

Согласно [4, 6] для плотности сверхпроводящего квазиповерхностного тока справедливо соотношение

(6) $\mathbf{J} = [\mathbf{n}\mathbf{H}_1]$.

Подставляя (6) в (2), получим

(7) $[\mathbf{n}\mathbf{E}_1] = \hat{Z}[\mathbf{n}\mathbf{J}]$.

Рассмотрим интегральное уравнение (4). Используя известные соотношения векторной алгебры, а также (2), (6), имеем

(8) $$\int_{\Sigma} \{\mathbf{E}_2 - \hat{Z}[\mathbf{n}\mathbf{H}_2]\}\,\mathbf{J}d\sigma = f.$$

Граничное условие (2) запишем в виде

$$[\mathbf{n}, \mathbf{H}_1]|_{\Sigma} = \hat{Z}[\mathbf{n}[\mathbf{n}\mathbf{E}_1]]|_{\Sigma}.$$

Тогда для касательной составляющей квазиповерхностной плотности сверхпроводящего тока получим уравнение вида

(9) $$\int_{\Sigma} \{\hat{Z}\mathbf{H}_2 - [\mathbf{E}_2\mathbf{n}]\}\,\tilde{\mathbf{J}}d\sigma = f,$$

$$\tilde{\mathbf{J}} = [\mathbf{n}\mathbf{J}], \quad f = \frac{4\pi}{c}\int_{V^-}(\mathbf{E}_1\mathbf{j}_1^{(э)} - \mathbf{E}_2\mathbf{j}_1^{(э)} - \mathbf{H}_1\mathbf{j}_2^{(м)} + \mathbf{H}_2\mathbf{j}_1^{(м)})\,dV^-.$$

Следовательно, получим два интегральных уравнения (8), (9) для векторов $\mathbf{J}$ и $\tilde{\mathbf{J}}$. Предположим, что вспомогательные источники не входят в область $V$, тогда

$$\int_{V^-}\{\mathbf{E}_1\mathbf{j}_2^{(э)} - \mathbf{H}_1\mathbf{j}_2^{(м)}\}\,dV^- = 0,$$

а значит, интегральные уравнения (8), (9) являются интегральными уравнениями Фредгольма первого рода. Возникает вопрос о корректности решения. Известно [5], что необходимо выполнение трех основных условий: 1) для всякого элемента $u \in U$ существует решение $Z$ из пространства $F$; 2) решение определяется однозначно; 3) задача устойчива на пространствах $(F, U)$. Первые два требования выполняются в силу рассуждений, приведенных выше. Выполнения третьего условия необходимо добиться путем выбора вспомогательного поля $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{H}_2$, которое определяет ядра и правую часть интегральных уравнений при заданном импедансе $\hat{Z}$ и $\mathbf{j}_1^{(э)}$, $\mathbf{j}_1^{(м)}$.

3. Ядра уравнений (8) $\mathbf{K}_1 = \mathbf{E}_2 - \hat{Z}[\mathbf{n}\mathbf{H}_2]$ и (9) $\mathbf{K}_2 = \hat{Z}\mathbf{H}_2 - [\mathbf{E}_2\mathbf{n}]$ удовлетворяют следующим соотношениям на поверхности сверхпроводящего тела вращения:

(10) $$[\mathbf{K}_1\mathbf{n}] = -\mathbf{K}_2 + \hat{Z}\mathbf{n}(\mathbf{n}, \mathbf{H}_2), \quad [\mathbf{K}_2\mathbf{n}] = \mathbf{K}_1 - \mathbf{n}(\mathbf{n}, \mathbf{E}_2).$$

Существенным критерием выполнения условия 3) является сравнение дифференцируемости ядра $\mathbf{K}_1$ и $\mathbf{K}_2$ интегральных уравнений первого рода и их правых частей (ядра должны быть менее гладкими функциями, чем правые части). Перейдем к скалярной записи уравнений (8), (9) относительно проекции векторов искомого сверхпроводящего тока на оси системы. Используем системы координат: цилиндрическую $(z, R, \varphi)$ и систему вращения $(\psi, \tau, \varphi)$ [1]. Уравнение (8) запишется в виде

(11) $$\int_S \{(E_{2\psi} - \hat{Z}H_{2\varphi})J_\psi + (E_{2\varphi} + \hat{Z}H_{2\psi})J_\varphi\}\,d\sigma = \int_B (H_{2\psi}\,j_{1\psi}^{(м)} + H_{2\varphi}\,j_{1\varphi}^{(м)} - E_{2\psi}\,j_{1\psi}^{(э)} - E_{2\varphi}\,j_{1\varphi}^{(э)})\,dB.$$

Предполагается, что составляющие токов сторонних источников в направлении $\tau$ равны 0, так как всегда можно выбрать координатную линию $\psi$, совпадающую по направлению с линиями тока. В случае выбора простого вспомогательного источника поле от него записывается в цилиндрической системе координат [1]:

$$E_{\psi}^{\text{вр}} = E_z^{\text{у}} \sin\alpha - E_R^{\text{у}} \cos\alpha, \quad H_{\psi}^{\text{вр}} = H_z^{\text{у}} \sin\alpha - H_R^{\text{у}} \cos\alpha,$$
$$E_{\varphi}^{\text{вр}} = E_{\varphi}^{\text{у}}, \quad H_{\varphi}^{\text{вр}} = H_{\varphi}^{\text{у}}, \tag{12}$$

где $\alpha$ – угол между осями $z$ и $\tau$. Используя эту связь, получаем

$$\int_{\Sigma} \{(E_{2z} \sin\alpha - E_{2R} \cos\alpha - \hat{Z}H_{2\varphi}) J_{\varphi} + [E_{2\varphi} + \hat{Z}(H_{2z} \sin\alpha -$$
$$- H_{2R} \cos\alpha)] J_{\varphi}\} \, d\sigma = \int_{B} \{H_{2z} \sin\alpha - H_{2R} \cos\alpha\} j_{1\psi}^{(\text{м})} +$$
$$+ H_{2\varphi} j_{1\varphi}^{(\text{м})} - (E_{2z} \sin\alpha - E_{2R} \cos\alpha) j_{1\psi}^{(\text{э})} - E_{2\varphi} j^{(\text{э})}\} \, dB. \tag{13}$$

Верхние индексы опущены. Аналогичным образом преобразовывается уравнение (9):

$$\int_{\Sigma} \{\hat{Z}H_{2z} \sin\alpha - \hat{Z}H_{2R} \cos\alpha - E_{2\varphi}) \widetilde{J}_{\psi} + (\hat{Z}H_{2\varphi} + E_{2z} \sin\alpha -$$
$$- E_{2R} \cos\alpha) \widetilde{J}_{\varphi}\} \, d\sigma = \int_{B} \{H_{2z} \sin\alpha - H_{2R} \cos\alpha) j_{1\psi}^{(\text{м})} + H_{2\varphi} j_{1\varphi}^{(\text{м})} -$$
$$- (E_{2z} \sin\alpha - E_{2R} \cos\alpha) j_{1\psi}^{(\text{э})} - E_{2\varphi} j_{1\varphi}^{(\text{э})}\} \, dB. \tag{14}$$

Импеданс $Z$ комплексный, поэтому ядра $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_2$ являются несимметричными, что приводит к определенным трудностям в рассмотрении уравнений (8), (9).

Ядра $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2$ запишем в виде

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} E_{2z} \sin\alpha - E_{2R} \cos\alpha - \hat{Z}H_{2\varphi} \\ E_{2\varphi} + \hat{Z}(H_{2z} \sin\alpha - H_{2R} \cos\alpha \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} \hat{Z}(H_{2z} \sin\alpha - H_{2R} \cos\alpha) - E_{2\varphi} \\ \hat{Z}H_{2\varphi} + E_{2z} \sin\alpha - E_{2R} \cos\alpha \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} J_{\psi} \\ J_{\varphi} \end{pmatrix}.$$

4. Так как $\mathbf{K}_1$ и $\mathbf{K}_2$ принадлежат пространству $L_2(V^-)$, то из физических соображений следует, что решение поставленной задачи существует и единственно. Согласно утверждению Пикара [7] ядра $\mathbf{K}_1$ и $\mathbf{K}_2$ полные в $L_2$. Для простоты будем предполагать, что $\Sigma$ – отрезок оси $[a, b]$. Исследуем

$$M_1^{(1)} = \int_a^b \overline{K_1(\rho, s)} \, K_1(\rho, t) \, d\rho, \quad M_2^{(2)} = \int_a^b K_1(\rho, \tau) \overline{K_1(t, \rho)} \, d\rho. \tag{15}$$

Анализ проводится для ядра $\mathbf{K}_1$. Аналогичное исследование можно провести для ядра $\mathbf{K}_2$. В нашем случае ядра являются векторными величинами. Не уменьшая общности рассуждений, предположим, что ядра являются скалярными функциями. В векторном случае ядра рассматривается покомпонентно. Ядра $M_1^{(1)}, M_1^{(2)}$ являются симметричными и положительными. Из (10) следует их представление в виде

$$M_1^{(1)}(s, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_k^{(1)}(s) \, u_k^{(1)}(t)}{\Lambda_k^2}, \quad M_1^{(2)}(s, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{l_k^{(1)}(s) \, l_k^{(1)}(t)}{\Lambda_k^2}, \tag{16}$$

где $u_k^{(1)}$ – собственные функции $M_1^{(1)}$, а $l_k^{(1)}$ – собственные функции $M_1^{(2)}$. Нетрудно убедиться в том, что

$$l_k^{(1)}(s) = \Lambda_k \int_a^b K_1(s,t)\, u_k^{(1)}(t)\, dt.$$

Тогда для ядра $K_1(s,t)$ получим представление

$$(17) \quad K_1(s,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_k^{(1)}(s)\, l_k^{(1)}(t)}{\Lambda_k}, \qquad \Lambda_k > 0.$$

Из равенства (17) следует обобщение теоремы Гильберта–Шмидта [7] на случай несимметричного ядра (10):

$$(18) \quad \forall h(t) \in L_2(\Sigma), \quad (\Sigma \equiv [a,b]); \quad \int_a^b K(s,t)\, h(t)\, dt = \sum_{k=1}^{\infty} a_k u_k(s),$$

$$a_k = \frac{1}{\Lambda_k} \int_a^b h(t')\, l_k(t)\, dt = \frac{h_k}{l_k},$$

где $h_k$ – коэффициенты Фурье относительно ортонормированной системы $l_k(t)$. Будем иметь решение в виде

$$(19) \quad \mathrm{J}(\psi,\varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathrm{J}_m(\psi)\, e^{im\varphi}, \quad \mathrm{J}(\psi,\varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{\mathrm{J}}_m(\psi)\, e^{im\varphi},$$

$$\mathrm{j}^{im}(\tau,\psi,\varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathrm{j}_m(\psi,\tau)\, e^{im\varphi}.$$

Если теперь также все поля, определяющие ядра и правые части, запишутся в виде ряда Фурье по координате $\varphi$, то, используя свойства ортогональности системы $e^{im\varphi}$

$$(20) \quad \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)\varphi}\, d\varphi = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 2\pi, & m = n, \end{cases}$$

получим систему одномерных интегральных уравнений, интегрирование в которых ведется по образующей тела вращения. Ядра этих интегральных уравнений удовлетворяют условиям, изложенным выше, поэтому к ним и применим подход, рассмотренный ранее. Физически такое разложение можно трактовать как представление искомых и сторонних токов в виде бесконечного дискретного спектра волн, распространяющихся по $\varphi$ и $-\varphi$ с волновыми числами $m$.

5. Успех решения в предлагаемой методике во многом зависит от правильного физического выбора вспомогательных источников. Процедура определения вспомогательных источников имеется в [1]. Следовательно, решение интегральных уравнений (8), (9) свелось к определению коэффициентов разложения функции Грина в ряд Фурье по $\varphi$-й компоненте. В дальнейшем многое зависит от представления ядра интегрального уравнения в виде, удобном для вычислений. В п. 4 указан способ сведения двумерного интегрального уравнения к одномерному относительно гармоник плотности токов. Конкретный вид этих ядер приведен в п. 4.

6. В работе получен вывод интегральных уравнений (8), (9), связывающих наведенные квазиповерхностные сверхпроводящие токи и возбуждающие их падающие поля. Поскольку практический интерес представляют физические величины, наблюдаемые в дальней зоне, решение интегральных уравнений представляет собой

лишь промежуточный этап. Необходимо установить прямую связь определенных наведенных источников с измеряемыми величинами. Ввиду того, что в большинстве случаев в дальней зоне вычисляется либо рассеянное поле, либо сечение рассеяния, для иллюстрации метода ограничимся этими величинами. Поле в дальней зоне рассеяния, создаваемое ограниченной поверхностью $\Sigma$, может быть определено через вспомогательные источники с помощью уравнений (8), (9), в которых точки наблюдения устремлены к бесконечности.

Таким образом, предложенный и полностью обоснованный в данной работе метод интегральных уравнений первого рода применительно к возбуждению и рассеянию электромагнитных волн на импедансных телах (сверхпроводящих и нормально проводящих), имеющих симметрию вращения, может быть использован для определения радиолокационного сечения рассеяния (например, коническая поверхность, усеченная коническая поверхность, цилиндрическая поверхность, конус–сфера–конус), а также многослойных структур.

**Поступило**
**12 VIII 1988**

ЛИТЕРАТУРА

1. *Васильев Е.Н.* Возбуждение тел вращения. М.: Радио и связь, 1987. 271 с. 2. *Андрусенко А.М., Боголомов А.С., Кравченко В.Ф., Менде Ф.Ф.* – РЭ, 1979, т. 24, с. № 6, с. 1078–1083. 3. *Кравченко В.Ф.* – Докл. АН УССР. Сер. А, 1982, № 1, с. 63–66. 4. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М., 1959. 532 с. 5. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 6. *Шенберг Д.* Сверхпроводимость. М.: ИЛ, 1955. 288 с. 7. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. М.: Наука, 1974, т. 4, ч. 1. 336 с.

УДК 519.6 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

© А.А. ФОМИН

# ДИФРАКЦИЯ НА КОНЕЧНОЙ ПЛОСКОЙ СИСТЕМЕ ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩИХ ЭКРАНОВ

*(Представлено академиком А.Н. Тихоновым 14 VI 1988)*

Анализ и расчет рассеяния электромагнитных волн на системе произвольно расположенных тонких, идеально проводящих лент различных размеров имеет большое практическое и теоретическое значение. В работах [1–3] эта задача сведена к интегральному уравнению Фредгольма второго рода. В [4] приближенно рассматривается дифракция на ограниченной ленточной решетке. Реализация точно поставленных краевых задач на ЭВМ порождает специфические проблемы, связанные как с погрешностями и устойчивостью получаемых решений, так и с необходимостью снижения трудоемкости вычислительного процесса. Целесообразно при формулировке задачи учесть, что полученное решение будет приближенным. В настоящей работе краевая задача формулируется как задача оптимизации некоторого функционала, что позволяет стабилизировать решение путем регуляризации и получить приближенные результаты для различных областей изменения параметров задачи. В основе алгоритма лежит быстрое преобразование Фурье, это позволило получить высокое быстродействие.