Б. М. Гуревич, Вариационный принцип для одномерных решетчатых гиббсовских случайных полей со счетным числом состояний, *Докл. АН СССР*, 1978, том 241, номер 4, 749–752

Доклады Академии наук СССР
1978. Том 241, № 4

УДК 519.21+517.4.5 МАТЕМАТИКА

Б. М. ГУРЕВИЧ

ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП ДЛЯ ОДНОМЕРНЫХ РЕШЕТЧАТЫХ ГИББСОВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ СО СЧЕТНЫМ ЧИСЛОМ СОСТОЯНИЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 31 III 1978)

1. Гиббсовские случайные поля. Пусть S — конечное или счетное множество и $U(x, y)$, $x, y\in S$, — функция, принимающая значения в $R\cup\{+\infty\}$. Последовательность случайных величин $\{\xi_n, -\infty<n<\infty\}$ со значениями в S называется одномерным решетчатым гиббсовским случайным полем с потенциалом U (ср. [1]), если для любых целых k, l и любых $x_i\in S$, $0\leqslant i\leqslant l$, таких, что вероятность события $\{\xi_k=x_0, \xi_{k+l}=x_l\}$ положительна, выполняется равенство

$$P\{\xi_{k+1}=x_1, \xi_{k+2}=x_2, \ldots, \xi_{k+l-1}=x_{l-1}|\xi_k=x_0, \xi_{k+l}=x_l\}=$$

$$=Z_l^{-1}(x_0, x_l)\exp\left[-\sum_{i=0}^{l-1}U(x_i, x_{i+1})\right], \tag{1}$$

где P — вероятность, а $Z_l^{-1}(x_0, x_l)$ — нормирующий множитель (здесь и ниже мы полагаем $\exp(-\infty)=0$).

Нетрудно проверить, что всякое гиббсовское поле является марковским (последнее означает, что совместное условное распределение случайных величин ξ_i, $k+1\leqslant i\leqslant k+l-1$, при условии σ-алгебры, порожденной остальными величинами, зависит лишь от ξ_k и ξ_{k+l}). В широком классе случаев справедливо и обратное утверждение (см., например, [2]).

Будем называть потенциал U неразложимым, если для любых $x, y\in S$ найдутся такие $x_1, x_2, \ldots, x_n\in S$, что $x_1=x$, $x_n=y$ и $U(x_i, x_{i+1})<\infty$ при $i=1, 2, \ldots, n-1$.

В статье дается описание множества $\mathcal{G}(U)$ всех стационарных гиббсовских полей с заданным неразложимым потенциалом U.

Для ряда частных случаев решение этой задачи известно. Так, если S конечно, то $\mathcal{G}(U)$ непусто (что вытекает из соображений компактности) и содержит единственный элемент — стационарную цепь Маркова (см. ниже). Для бесконечного S множество $\mathcal{G}(U)$ может оказаться пустым. Кестен [3] дал необходимые и достаточные условия его непустоты в случае, когда потенциал U принимает только конечные значения, и показал (подтвердив гипотезу Спитцера [4]), что при выполнении этих условий $\mathcal{G}(U)$ устроено так же, как в случае конечного S. Из работ автора [5, 6] вытекают аналогичные результаты для потенциалов, принимающих лишь значения 0 и $+\infty$. Гиббсовское поле с подобным потенциалом характеризуется тем, что условное распределение (1) является равномерным на множестве тех последовательностей $x_1, \ldots, x_{l-1}$, для которых

$$\sum_{i=0}^{l-1}U(x_i, x_{i+1})<\infty.$$

Метод, применявшийся в [5, 6], оказался эффективным и в общем случае.

Введем функцию $Q(x, y)=\exp[-U(x, y)]$, $x, y\in S$. Рассматривая Q как матрицу, обозначим через $Q_n(x, y)$ элемент матрицы Q^n с индексами x, y. Вследствие неразложимости U радиус сходимости степенного ряда $\sum_n Q_n(x, y)t^n$ не зависит от x, y; обозначим его $R(U)$. Матрица Q называется $R(U)$-положительной, если

$$Q_n(x,y)[R(U)]^n \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$$

(это свойство не зависит от x, y). Для $R(U)$-положительной матрицы Q существуют такие положительные векторы $\alpha=\{\alpha_x, x\in S\}$ и $\beta=\{\beta_x, x\in S\}$ (определенные с точностью до множителя), что

$$Q\alpha=\lambda(U)\alpha, \quad \beta Q=\lambda(U)\beta, \quad \sum_{x\in S}\alpha_x\beta_x=1,$$

где $\lambda(U)=1/R(U)$ (перечисленные свойства неотрицательных матриц изложены в [7]).

Следующее утверждение служит непосредственным обобщением упомянутых выше результатов, полученных при дополнительных ограничениях на потенциал.

Теорема 1. *Для существования стационарного гиббсовского поля с неразложимым потенциалом U необходимо и достаточно, чтобы матрица Q была $R(U)$-положительна. При выполнении этого условия стационарное гиббсовское поле единственно и представляет собой цепь Маркова со стационарным распределением $\{\pi_x, x\in S\}$ и переходной функцией $\{p_{x,y}, x, y\in S\}$, где*

$$\pi_x=\alpha_x\beta_x, \quad p_{x,y}=Q(x, y)\alpha_y/\lambda(U)\alpha_x. \tag{2}$$

Доказательство теоремы 1 основано на вариационном принципе, представляющем и самостоятельный интерес. С помощью этого принципа удается выделить гиббсовские поля с данным потенциалом среди всех стационарных случайных полей, принимающих значение в S.

2. Вариационный принцип. Будем отождествлять одномерные решетчатые случайные поля, принимающие значения в S, с отвечающими им вероятностными мерами на пространстве последовательностей $\Omega=\prod_{-\infty}^{\infty} S_i$, $S_i=S$, $-\infty<i<\infty$. Стационарным случайным полям отвечают меры, инвариантные относительно сдвига T, определенного на Ω соотношениями

$$T\omega=\omega', \quad \omega=(\ldots,\omega_{-1}, \omega_0, \omega_1,\ldots), \quad \omega'=(\ldots,\omega_{-1}', \omega_0', \omega_1',\ldots),$$
$$\omega_i'=\omega_{i+1}, \quad -\infty<i<\infty.$$

Пусть x — произвольный элемент множества S и γ — последовательность вида $x, x_1,\ldots,x_{l-1}, x$, где $x_i\in S$, $x_i\neq x$ при $1\leqslant i\leqslant l-1$. Множество всех таких последовательностей обозначим через $\Gamma(x)$. Положим

$$A_\gamma^k(x)=\{\omega\in\Omega\colon \omega_{-k}=x, \omega_{-k+1}=x_1,\ldots, \omega_{-k+l-1}=x_{l-1}, \omega_{-k+l}=x\},$$
$$0\leqslant k\leqslant l-1,$$

$$A(x)=\bigcup_{\substack{\gamma\in\Gamma(x)\\ 0\leqslant k\leqslant l-1}} A_\gamma^k(x), \quad l=l(\gamma), \quad B(x)=\{\omega\in\Omega\colon \omega_0=x\}.$$

Очевидно, множества $A_\gamma^k(x)$ и $A_{\gamma'}^{k'}(x)$ пересекаются лишь при $\gamma'=\gamma$, $k'=k$, когда они совпадают.

Обозначим через $\mathscr{E}(\Omega)$ совокупность вероятностных мер на Ω, инвариантных относительно T и эргодических. Пусть $\mathscr{E}(\Omega, x)$ — множество тех $\mu\in\mathscr{E}(\Omega)$, для которых $\mu(B(x))>0$. Очевидно, $\mathscr{E}(\Omega)=\bigcup_{x\in S}\mathscr{E}(\Omega, x)$. Если $\mu \in \mathscr{E}(\Omega, x)$, то, как вытекает из теоремы Пуанкаре о возвращении, $\mu(A(x))=1$ и счетное семейство множеств $A_\gamma^k(x)$, $\gamma \in \Gamma(x)$, $0 \leqslant k \leqslant l(\gamma)-1$, можно рассматривать как разбиение пространства Ω. Занумеруем в произвольном порядке последовательности из $\Gamma(x)$ и обозначим через $\eta_n(x)$ разбиение пространства Ω, элементами которого служат множества $A_\gamma^k(x)$ при $\gamma=\gamma_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $0 \leqslant k \leqslant l(\gamma_i)-1$, и дополнение $A(x, n)$ к объединению этих множеств. Определим на Ω функцию e со значениями в $R \cup \{+\infty\}$ равенством

$$e(\omega)=U(\omega_0, \omega_1), \quad \omega=(\ldots, \omega_{-1}, \omega_0, \omega_1, \ldots),$$

и положим

$$\mathscr{P}(U, \mu, x)=\varlimsup_{n\to\infty}\left[h_\mu(T, \eta_n(x))-\int\limits_{\Omega \setminus A(x,n)} e(\omega)\cdot d\mu\right], \tag{3}$$

$$\mathscr{P}(U, x)=\sup_{\mu \in \mathscr{E}(\Omega, x)} \mathscr{P}(U, x),$$

где h_μ — энтропия, вычисленная по мере μ (логарифм в определении энтропии будем считать натуральным). Меру $\mu \in \mathscr{E}(\Omega, x)$, для которой $\mathscr{P}(U, \mu, x)=\mathscr{P}(U, x)$, назовем максимальной (обоснование этого термина см. ниже). Рассмотрим несколько частных случаев.

а) Пусть сначала множество S конечно и потенциал принимает лишь конечные значения. Тогда, очевидно, при любых $x \in S$ и $\mu \in \mathscr{E}(\Omega, x)$ каждое из двух выражений, стоящих в квадратных скобках в правой части (3), имеет конечный предел, причем

$$\lim_{n\to\infty} h_\mu(T, \eta_n(x))=h_\mu(T), \quad \lim_{n\to\infty}\int\limits_{\Omega \setminus A(x,n)} e(\omega)\, d\mu=\int\limits_{\Omega} e(\omega)\, d\mu.$$

Из соображений, связанных со статистической физикой (см. ([8]), § 7, 4), величину $\mathscr{P}(U, \mu)=h_\mu(T)-\int\limits_{\Omega} e(\omega)\, d\mu$, имеющую смысл для любой T-инвариантной вероятностной меры μ на Ω, естественно называть давлением относительно меры μ. Спитцер ([9]) доказал существование и единственность меры, максимизирующей давление, которая оказалась не чем иным, как гиббсовской мерой с потенциалом U. Последнее вытекает также из более общих результатов Ланфорда и Рюэля (см. ([10]), Приложение), касающихся гиббсовских полей с конечным числом состояний на решетках любой размерности.

б) Пусть S, по-прежнему, конечно, а потенциал U, оставаясь неразложимым, может принимать значение $+\infty$. Максимизируя давление, теперь можно ограничиться мерами, сосредоточенными на множестве

$$\Omega(U)=\{\omega=(\ldots, \omega_{-1}, \omega_0, \omega_1, \ldots) \in \Omega: U(\omega_i, \omega_{i+1})<\infty, -\infty<i<\infty\},$$

совпадающем в случае а) со всем пространством Ω. Это множество компактно в естественной топологии и T-инвариантно, причем T есть его гомеоморфизм, а функция e на нем непрерывна. Задаче о максимизации давления в такой ситуации (когда T уже не обязательно сдвиг в пространстве последовательностей) посвящена довольно обширная литература. Комбинируя известные результаты, легко обобщить утверждение из п. а) на случай а) (возможность подобного обобщения отмечена и в ([9])).

в) Пусть S счетно, а потенциал U неразложим и принимает лишь значения 0 и $+\infty$. Ограничившись мерами, сосредоточенными на $\Omega(U)$, мы приходим к равенству $\mathscr{P}(U, \mu, x)=h_\mu(T)$, $\mu \in \mathscr{E}(\Omega, x)$, справедливому при любом $x \in S$. Его правая часть имеет смысл для любой T-инвариантной вероятностной меры μ на $\Omega(U)$. Задача о максимизации энтропии $h_\mu(T)$ на множестве таких мер рассматривалась в ([5]).

Отметим, наконец, работу Ито и Мори ([11]), в которой понятие давления относительно меры μ обобщается (иначе, чем это сделано выше) на случай, когда S счетно, а U принимает значения в $R \cup \{+\infty\}$, но при весьма существенных дополнительных ограничениях, среди которых (в принятой нами терминологии) $R(U)$-положительность матрицы Q (см. п. 1) и конечность энтропии $h_\mu(T)$.

Перейдем к общему случаю.

Теорема 2. *Если U — неразложимый потенциал, то*

$$\mathscr{P}(U, x) = \ln \lambda(U)$$

при любом $x \in S$.

Теорема 3. *Пусть U — неразложимый потенциал с $\lambda(U) < \infty$ и x — произвольный элемент множества S.*

Тогда для существования в $\mathscr{E}(\mathfrak{U}, x)$ максимальной меры необходимо и достаточно, чтобы матрица Q была $R(U)$-положительна. Если это условие выполнено, то максимальная мера единственна, не зависит от x и является марковской мерой, стационарное распределение и переходная функция которой определяются формулами (2).

Следствие. *В условиях теоремы 3 максимальная мера является гиббсовской с потенциалом U.*

Переход от результатов этого пункта к теореме 1 осуществляется с помощью следующего утверждения, которое доказывается независимо от теоремы 1.

Теорема 4. *Если для некоторого $x \in S$ существует T-инвариантная гиббсовская мера $\mu \in \mathscr{E}(\Omega, x)$, отвечающая неразложимому потенциалу U, то $\lambda(U) < \infty$ и мера μ максимальна.*

Теоремы 3 и 4 дают информацию о множестве T-инвариантных гиббсовских мер (стационарных гиббсовских случайных полей), отвечающих данному неразложимому потенциалу и обладающих свойством эргодичности. Разлагая любую T-инвариантную гиббсовскую меру на эргодические компоненты (также являющиеся T-инвариантными гиббсовскими мерами), можно доказать теорему 1 полностью.

Замечание 1. Легко привести пример неразложимого потенциала U, для которого выполняются условия теоремы 3 и существует максимальная мера μ с $h_\mu(T) = \infty$. Этот пример показывает, что при определении давления необходима регуляризация, подобная той, которая фигурирует в правой части соотношения (3).

Замечание 2. С помощью результатов п. 2, относящихся к бесконечному S, можно изучать максимум функционала $h_\mu(T) - \int f\, d\mu$ для конечного S и некоторых функций f, определенных на Ω и зависящих (в отличие от рассмотренной выше функции e) от бесконечного числа координат ω_i. На этом пути, в частности, легко получить все теоремы о существовании, единственности и свойствах максимальной меры из работы Хофбауера ([12]).

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
30 III 1978

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Р. Л. Добрушин,* Функц. анализ и его прилож., т. 2, в. 4 (1968). [2] *М. Б. Аверинцев,* Пробл. передачи информ., т. 11, № 4 (1975). [3] *H. Kesten,* Ann. Prob., v. 4, № 4 (1976). [4] *F. Spitzer,* J. Funct. Anal., v. 20, № 3 (1975). [5] *Б. М. Гуревич,* ДАН, т. 192, № 5 (1970). [6] *Б. М. Гуревич,* УМН, т. 33, в. 3 (1978). [7] *D. Vere-Jones,* Pacific J. Math., v. 22, № 2 (1967). [8] *Д. Рюэль,* Статистическая механика, М., «Мир», 1971. [9] *F. Spitzer,* Ann. Math. Statist., v. 43, № 1 (1972). [10] *O. E. Lanford, D. Ruelle,* Comm. Math. Phys., v. 13, № 3 (1968). [11] *S. Ito, M. Mori,* Publ. Res. Inst. Math. Sci., v. 13, № 1 (1977). [12] *F. Hofbauer,* Trans. Am. Math. Soc., v. 228 (1977).