

## ТЕОРИЯ ПЕРКОЛЯЦИИ И НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

М. В. Меньшиков, С. А. Молчанов, А. Ф. Сидоренко

## ВВЕДЕНИЕ

**Физические предпосылки.** Теория перколяции (протекания) возникла первоначально в физике твердого тела, но в последние годы находит все более широкие применения в самых различных естественных науках (физика, механика, геофизика, астрофизика, химия полимеров, коллоидная химия и т. п.). Основной объект этой теории — случайные однородные множества на графах, решетках, группах, евклидовых пространствах. При этом, в отличие от локальной теории (см., скажем, книгу Матерона [12]), перколяция изучает глобальные свойства таких множеств (проблема связности, статистика ограниченных компонент и т. п.). Именно такой подход позволяет рассмотреть широкий класс своеобразных (геометрических) фазовых переходов.

Не ставя своей целью обзор весьма значительной прикладной литературы по перколяции, опишем, тем не менее, некоторые наиболее принципиальные физические модели, приводящие к перколяционным задачам.

1°. **Фазовый переход Мотта в легированных полупроводниках.** Хорошо известный экспериментальный факт состоит в том, что при легировании полупроводникового кристалла (скажем, кремния или германия), атомы которого имеют валентность 4, пятивалентными атомами (скажем, мышьяка), при достаточно высокой концентрации  $\lambda > \lambda_{cr}$  последних, возникает металлическая проводимость. Качественная модель этого явления (см. [28, 52]) состоит в следующем. Основное состояние каждого примесного электрона в кристалле изображается некоторой поверхностью (поверхность Ферми). Эти поверхности  $S_i$  одинаковы, одинаково ориентированы и жестко связаны со случайно расположенными примесными атомами, локализованными в точках  $x_i$ . Их множество  $US_i$  естественно распадается на связанные компоненты  $K_j$ . Металлизация кристалла при легировании примесью отождествляется с появлением (с вероятностью 1) бесконечного связанного кластера, т. е. перколяцией (протеканием)  $US_{\lambda} = S_0$ .

В итоге, мы приходим к следующей математической задаче. В пространстве  $R^v$ ,  $v \geq 2$ , имеется пуассоновский ансамбль точек  $\{x_i\}$  с интенсивностью  $\lambda$  (имеющей смысл концентрации) и фиксированное множество  $S_0$ , содержащее начало координат  $x_0=0$ . Пусть  $S_i = S_0 - x_i$  и  $S = \bigcup_i S_i$ . Требуется описать топологическую структуру множества  $S$ , в частности, выяснить, при каких  $\lambda$  имеется бесконечная связная компонента в  $S$ . Из соображений размерности ясно, что ответ на этот вопрос зависит от величины безразмерной константы  $\beta = \lambda \text{Vol}(S_0)$ , именно при фиксированном  $S$  и малых  $\lambda < \lambda_0(S)$  перколяция отсутствует, а при  $\lambda > \lambda_0(S)$  она имеет место. Последнее утверждение является строгим математическим фактом и (по модулю того, что модель сильно упрощена) оно может служить объяснением фазового перехода диэлектрик—металл.

2°. Концентрационная модель разрушения Журкова. Современная концепция разрушения однородных материалов [22, 5, 6] основана на следующих представлениях. При действии на образец одноосной нагрузки в его толще возникают микротрещины (микросколы), которые можно представить в виде плоских дисков. «Близко расположенные» трещины объединяются, происходит их укрупнение. Простейший критерий укрупнения (не учитывающий взаимную ориентацию микротрещин) состоит в следующем. Окружим каждую трещину сферой  $S_i$ , диаметр которой в 3 раза превосходит диаметр соответствующего диска и имеющей тот же самый центр  $x_i$ . Если сферы, связанные с двумя микротрещинами, пересекаются, то последние сливаются. Образование магистральной трещины (т. е. разрушение образца) эквивалентно тем самым появлению связного (практически бесконечного) кластера сфер, т. е. перколяции «дефектного» множества  $\bigcup S_i$ . Не удивительно, что критерий разрушения, как и в задачах п. 1°, формулируется в терминах безразмерной величины  $\beta = \lambda \langle \text{Vol } S_i \rangle$ , имеющей смысл среднего числа сфер, пересекающихся с данной сферой — так называемого координационного числа. По данным численного моделирования и прямым наблюдениям за разрушением блоков бетона, стекла и т. п. установлено, что  $\beta_{cr} \approx 3 \div 3,5$ .

Отметим, что, в отличие от моделей физики полупроводников, сферы  $S_i$  имеют случайные размеры, даже для самых однородных материалов, хотя, по-видимому, в этом случае разброс размеров микротрещин не слишком велик. Попытки применить концентрационную идеологию разрушения к геофизической среде, характеризующейся ярко выраженной многомасштабностью [24], показали, что здесь требуются серьезные коррективы и критерий, выраженный в терминах координационного числа  $\beta_{cr}$ , уже не годится.

Многомасштабным схемам перколяции и разрушения посвящены работы [27, 32, 37]. Другие геофизические приложения перколяции см. в [2, 17].

3°. **Старение полимерных покрытий.** В процессе эксплуатации изоляционных полимерных покрытий (кабели, провода и т. п.) в них развивается сеть микродефектов или пор, появление которых может быть связано либо со структурными перестройками полимера, либо, что бывает чаще, с термодиффузией низкомолекулярной компоненты (наполнителя полимерной матрицы). Для многих типов полимеров (ПВХ, эмали и т. п.) элементарные микропоры, подобно дыркам в сыре, имеют сферическую форму  $S_i$ . Подобно 1°, 2°, в этом случае дефектное множество описывается пуассоновской моделью сфер случайного радиуса. Важная особенность задач п. 3° состоит в том, что здесь нас интересует не только вопрос о возникновении перколяции дефектного множества  $S = \cup S_i$  в бесконечном пространстве, но и проблема больших уклонений, которые обуславливают протекание через конечный слой вещества еще до достижения перколяционного порога (по концентрации  $S$ ). По поводу этих моделей см. [1, 15, 25].

4°. **Линии уровня случайных полей.** Одна из центральных проблем гидродинамики и магнитогидродинамики — описание топологии линии тока и магнитных силовых линий в различных, в частности, рандомизированных моделях. В качестве примера рассмотрим двумерную модель магнитного случайного и однородного поля [7]. Такое поле  $H(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^2$ , определяется как ротор скалярного однородного потенциала

$$\vec{H}(x) = \text{rot } \Phi(x) = \left( -\frac{\partial}{\partial x_2} \Phi(x), \frac{\partial}{\partial x_1} \Phi(x) \right), \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Очевидно, магнитные силовые линии совпадают с линиями уровня поля  $\Phi$ . Поэтому физически важный вопрос о существовании уходящих на бесконечность силовых линий сводится к аналогичной проблеме для линий уровня  $\Phi$ . Предполагается, что скалярное однородное в  $\mathbb{R}^2$  поле с быстроубывающими корреляциями и гладкими реализациями имеет лишь замкнутые линии уровня, но соответствующая математическая теорема доказана лишь для достаточно высоких (низких) линий уровня (подробнее см. ниже).

Общий вопрос о глобальном строении множеств уровня скалярных однородных полей  $A_h^+ = \{x \in \mathbb{R}^v : \Phi(x) > h\}$  важен для многих приложений и может рассматриваться как один из центральных в теории перколяции.

5°. **Теория осреднения и перколяция.** Во многих задачах теории осреднения случайных сред также возникают перколяционные мотивы. Приведем два примера:

а) Распространение волны в случайных средах. Пусть  $n(x)$  — коэффициент преломления света в точке  $x$ , тогда в надлежащей системе единиц

$$t_{x,y} = \inf_{\gamma: x \rightarrow y} \int n(\gamma_s) ds, \quad x, y \in \mathbb{R}^3, \quad (1)$$

представляет время, за которое световой фронт, исходящий из  $x$ , достигнет точки  $y$ . Очевидно,  $t_{x,y}$  — метрика в  $R^3$ . Пусть  $x = (0, 0, a)$ ,  $y = (0, 0, b)$ , тогда  $f_{a,b} = t_{x,y}$  — субаддитивный процесс,  $f_{a,b} \leq f_{a,c} + f_{c,b}$ . Если поле однородно, то он, очевидно, и стационарен. По эргодической теореме Кингмана [51] существует п. н. (возможно, бесконечный)

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{f_{0,a}}{a} = \mu. \quad (3)$$

Задача о выяснении условий конечности  $\mu$  или о предельном поведении волнового фронта, т. е. функции  $t_{0,x}$ ,  $|x| \rightarrow \infty$ , называется проблемой перколяции до первого достижения (first passage percolation). Подробнее см. [46, 53].

б) Близкие проблемы возникают при изучении случайных сетей сопротивлений. Представим, например, квадратную сетку  $N \times N$ , состоящую из  $N^2$  случайных сопротивлений  $\xi_i$  (для простоты одинаково распределенных и независимых). Если верхний и нижний ряды шунтированы, то при прохождении тока между шунтами сетка будет иметь некоторое случайное сопротивление  $\rho_N$ . Нетрудно показать, что  $\rho_N \rightarrow \rho_{эфф}$  (п. н.). Предельную

величину  $\rho_{эфф}$  можно рассматривать как эффективное среднее сопротивление одного звена сетки. Определение  $\rho_{эфф}$  можно рассматривать как задачу усреднения некоторой системы разностных уравнений со случайными коэффициентами (представляющей попросту запись законов Кирхгофа для узлов и элементарных ячеек сетки). Перколяционная природа проблемы станет ясной, если мы рассмотрим тот крайний случай, когда

$$\xi_i = \begin{cases} 0 & \text{с вероятностью } p; \\ +\infty & \text{с вероятностью } 1-p. \end{cases}$$

Тогда, как нетрудно понять,  $\rho = 0$  или  $+\infty$ , в зависимости от того, существует или не существует бесконечный связный кластер хорошо проводящих сопротивлений. Точнее говоря, это верно по модулю теоремы о совпадении различных определений перколяционного порога для задачи связей на решетке (подробнее см. ниже). Детальный анализ задач о случайных сетях сопротивлений см. в [45].

Среди других важных приложений теории перколяции отметим, не вдаваясь в подробности, коллоидную химию (образование гелей и т. п.) и физику полимеров. См. по этому поводу монографию [4].

**Базовые модели перколяции, контурный метод.** Простейшими, и в то же самое время наиболее важными, являются введенные Хаммерсли модели узлов и связей на целочисленной решетке  $Z^v$ ,  $v \geq 2$  (случай  $v=1$  не интересен, так как при этом в моделях перколяция невозможна). Эти модели описаны во мно-

гих статьях и книгах, включая популярные [29], наиболее подробное изложение см. [45].

Напомним, что в задаче узлов на решетке  $Z^v$  определена случайная бернуллиевская функция  $\xi(x)$ , принимающая в каждой точке значения  $+1$  или  $-1$  с вероятностями  $p$  и  $q=1-p$ , соответственно. Множества  $D^+ = \{x: \xi(x) = +1\}$ ,  $D^- = \{x: \xi(x) = -1\}$  образуют разбиение  $Z^v$ . Они распадаются на связанные компоненты  $D_i^+: D^+ = \cup D_i^+$ ;  $D_j^-: D^- = \cup D_j^-$  по отношению к стандартной связности (соседство по ребрам). Говорят, что « $+1$ » протекают на бесконечность (перколируют), если среди компонент  $D_i^+$  есть бесконечные. Аналогичное определение относится к « $-1$ ». По закону  $0-1$  Колмогорова, последние события имеют вероятность  $0$  или  $1$ . Поскольку два поля  $\xi$ , отвечающие различным значениям параметра  $p$  ( $p', p'': p' > p''$ ), можно реализовать на одном вероятностном пространстве так, что  $D^{+'} \supset D^{+''}$  (обозначения очевидны) и при замене  $+1$  на  $-1$  и  $p$  на  $q$  картина статистически воспроизводится, то на отрезке  $[0, 1]$  можно указать две точки  $0 \leq p_{cr} \leq 1$ ,  $q_{cr} = 1 - p_{cr}$  такие, что при  $p > p_{cr}$  протекание « $+1$ » имеется п. н., при  $p < p_{cr}$  его п. н. нет; при  $q < q_{cr}$  п. н. перколируют « $-1$ », а при  $q > q_{cr}$  протекания « $-1$ » нет п. н.

Эти рассуждения применимы к любому бесконечному счетному графу, без всяких предположений однородности. Априори возможны случаи  $p_{cr} = 1$ ,  $p_{cr} = 0$ . (Например, на решетке  $Z^1$ , очевидно,  $p_{cr} = 1$ , а на полном бесконечном неориентированном графе  $p_{cr} = 0$ .)

В задаче связей бинарное бернуллиевское поле  $\xi(x)$  определено на ребрах решетки  $Z^v$ . Все определения и простейшие замечания, относившиеся выше к задаче узлов, очевидным образом применимы и к задаче связей. Конечно, вообще говоря,  $p_{cr}^{(св)} \neq p_{cr}^{(уз)}$ , однако  $p_{cr}^{(уз)} \geq p_{cr}^{(св)}$ . Мы не будем, как правило, усложнять обозначения указаниями на тип перколяционной проблемы (узлы или связи). Ниже, главным образом, будет анализироваться задача узлов.

Основное достижение первого этапа развития теории перколяции (Хаммерсли [41]) состояло в установлении того факта, что при  $v \geq 2$  на решетках  $Z^v$  и в задаче связей и в задаче узлов

$$0 < p_{cr} < 1; \quad 0 < q_{cr} < 1.$$

Тем самым, при изменении параметра  $p$  в системе происходит, по крайней мере, одна (если  $p_{cr} = q_{cr} = 1/2$ ), а при  $p_{cr} \neq q_{cr}$  даже две качественные перестройки множеств уровня поля  $\xi(x)$ . Эти перестройки в физических приложениях интерпретируются как фазовые переходы. Отметим, что эти переходы не термодинамические и связаны с параметрами типа концентрации.

Хаммерсли применил к перколяционным задачам на  $Z^v$  контурный метод, который хорошо известен в статистической физике спиновых систем (модель Изинга и пр.). Воспроизведем соответствующие классические рассуждения (для задачи узлов на  $Z^v$ ,  $v \geq 2$ ).

Покажем, что  $p_{cr} > 0$ . Допустим, что множество «+1» перколюрует на  $\infty$ . Из однородности модели и счетности  $Z^v$  следует, что тогда

$$P(B) = P\{\exists \text{ бесконечному кластеру «+1»}\} > 0.$$

На множестве  $\omega \in B$  существует бесконечный связный путь  $\gamma$  из «+1», уходящий из точки  $x_0 = 0$  на бесконечность. Можно считать, что  $\gamma$  самонепересекается. Тем более, для любого  $n$  происходит событие  $B_n = \{\text{существует путь длины } n \text{ без самопересечений, составленный из «+1» и выходящий из } x_0 = 0\}$ . Но

$$\begin{aligned} P\{B_n\} &\leq \sum_{\gamma: x_0 \rightarrow |\gamma|=n} P\{\gamma \text{ покрыт «+»}\} < \\ &\leq p^n |\{\gamma: |\gamma|=n, \gamma: x_0 \rightarrow\}| \leq p^n \cdot 2v(2v-1)^n. \end{aligned}$$

Здесь  $\gamma$  — пути без самопересечений, выходящие из  $x_0 = 0$ ,  $|\gamma|$  — длина пути. Из леммы Бореля—Кантелли следует, что при  $p < 1/(2v-1)$  происходит п. н. лишь конечное число событий  $B_n$ , т. е.  $P(B) = 0$ . Итак,  $p_{cr} \geq 1/(2v-1)$ .

Покажем, что  $p_{cr} < 1$ . Из элементарных топологических соображений (формальное доказательство см. [45]) вытекает, что при отсутствии протекания «+1» на бесконечность, существует бесконечное число «запирающих», т. е. составленных из «-1» связных гиперповерхностей, охватывающих начало координат.

Если быть более точным, каждая такая «запирающая» поверхность должна порождаться конечным подмножеством множества  $D^-$  (составленного из «-1»), допускать триангуляцию на элементарные тетраэдры с вершинами в этих точках и не иметь самопересечений. Элементарным тетраэдром при этом мы называем тетраэдр, образованный любыми  $v$  вершинами кубической ячейки  $Z^v$ .

В простейшем случае  $v=2$ , «запирающая» поверхность превращается в контур без самопересечений, охватывающий начало координат и образованный ребрами и диагоналями единичных квадратов.

Если  $C_n$  — событие, состоящее в том, что существует «запирающая» поверхность, порожденная  $n$  «отрицательными» узлами, то легко показать, что

$$P(C_n) \leq q^n \cdot n \cdot C^n, \quad (3)$$

где  $C = C(v)$  — некоторая комбинаторная постоянная. Можно, например, считать, что  $C(v) = 3^v - 2$ , множитель  $n$  появился из-за

того, что поверхность не проходит в точности через точку  $x_0=0$ . Поэтому при

$$q < 1/C(v) \quad (4)$$

по той же лемме Бореля—Кантелли происходит п. н. лишь конечное число событий  $S_n$ , т. е. п. н. «+1» протекают на бесконечность. Это значит, что  $p_{cr} \leq 1-1/C(v)$ . Итак, скажем, в случае  $v=2$  мы установили, что  $1/3 \leq p_{cr} \leq 6/7$ .

Один из путей уточнения этой оценки — чисто комбинаторный. Можно попытаться найти лучшие границы для числа самонепересекающихся путей длины  $n$  или для числа запирающих  $n$ -поверхностей. Легко, например, понять, что если в решетке  $Z^v$ ,  $N_n(v)$  — число самонепересекающихся путей длины  $n$ , идущих по ребрам решетки и выходящих из фиксированной точки  $x_0=0$ , то существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{N_n(v)} = a(v) \quad (5)$$

— так называемая константа связности решетки. Методам ее оценки было посвящено много работ (см., например [51]). Установлено, в частности, что  $2,5 < a(2) < 2,7$ .

Просматривая приведенные выше контурные рассуждения, убеждаемся, что

$$p_{cr} \geq 1/a(v) > 1/(2v-1). \quad (6)$$

Точно так же может быть уточнена и верхняя оценка, хотя соответствующая комбинаторика сложнее.

Заметим, что нижние оценки  $p_{cr}$ , выведенные ниже для  $Z^v$  с очевидными видоизменениями, применимы к любому однородному графу. Что касается верхних оценок, то здесь ситуация сложнее, поскольку строение «запирающих» множеств в общем случае может быть весьма экзотическим.

Методы оценок  $p_{cr}$ , основанные, в частности, на дальнейшем развитии контурного метода (метод поколений) — см. ниже, — там же будут приведены и данные по точно решаемым моделям.

Базовые модели допускают многочисленные и более реалистичские, с точки зрения приложений, обобщения. Перечислим простейшие из них.

а) Бернуллиевская перколяция на однородных графах (при этом допускаются как задачи связей, так и узлов).

б) Отказ от бернуллиевости для  $Z^v$ . Здесь очень интересны гиббсовские модели  $\xi(x)$  с финитным потенциалом взаимодействия.

в) Пуассоновские модели в  $R^v$ ,  $v \geq 2$ . Они определяются однородным пуассоновским множеством точек  $\{x_i\}$  с параметром  $\lambda$  и набором, вообще говоря, случайных и случайно ориентированных множеств  $S_i$ , отнесенных каждому «дефектному

центру»  $x_i$ . Качественный анализ этих моделей проводится обычно с помощью «дискретизации», т. е. редукции к моделям а).

г) Случайные однородные поля  $\xi(x)$  с непрерывными или гладкими реализациями в  $R^v$ . Типичные задачи: строение линий уровня, перколяция первого достижения и прочее. Как и в пункте в) решающим обстоятельством является возможность сведения к решетчатым схемам протекания.

д) Многomasштабные модели. Их можно понимать, как гибрид моделей пункта в) и классических базовых моделей.

Обзору исследований по этим моделям посвящена статья. Ее основу составляют работы, выполненные участниками семинара по теории перколяции и ее приложениям, который уже несколько лет работает на механико-математическом факультете МГУ. Отметим, что в работах на русском языке отсутствовало мало-мальски подробное изложение основных понятий и результатов этой теории\* на математическом уровне строгости. Правда, намеченная на 1986 год публикация перевода монографии Кестена [45] в определенной степени восполнит этот пробел. Следует, однако, подчеркнуть, что эта монография в основном посвящена углубленному изучению сравнительно узкого класса моделей: задач узков и связей на двумерных решетках и многие предложенные там методы с трудом поддаются обобщениям.

Мы старались, чтобы наш обзор по возможности не дублировал книгу Кестена. Изложение сравнительно подробное, многие результаты приведены с доказательствами или же их доказательства намечены. Особенно это относится к тем из них, которые ранее публиковались лишь в виде кратких замечаний.

**Краткое содержание обзора.** В § 1 введена общая схема перколяции на счетном однородном графе (вообще говоря, ориентированном), даны определения различных параметров, характеризующих модели узлов и связей (пороги протекания  $p_u$ ,  $p_s$  и т. п.)

В § 2 собран материал по точно решаемым перколяционным моделям (однородные деревья, классические двумерные решетки). Изложение очень краткое, поскольку именно эти вопросы основные в цитированной монографии Кестена.

В §§ 3, 4 развиваются методы получения верхних и нижних оценок критических порогов протекания на графах. Подобно тому, как контурный метод связан с аппроксимацией процесса развития дефектного кластера ветвящимся процессом с одним типом частиц, излагаемый в § 3 метод поколений вводит более тонкую аппроксимацию ветвящимися процессами с несколькими типами частиц.

Метод проектирования (§ 4), основанный на сравнении порогов протекания для двух графов (один из которых получает-

ся из другого определенной склейкой вершин), позволяет, в частности, установить, что в высоких размерностях порог протекания (и в задаче связей и в задаче узлов), мал и имеет асимптотику (на решетке  $Z^v$ )

$$p_{cr} = O(1/v).$$

В § 5 приведен обзор наиболее важных результатов технического аппарата перколяционной теории, полученных школой Кестена (формула Руссо, FKG-неравенство, его обращение, полученное Ван-ден-Бергом и т. п.).

В § 6 содержится доказательство центрального результата обзора — теорема М. В. Меншикова о совпадении критических порогов протекания  $p_H$ ,  $p_S$ ,  $p_T$  для очень широкого класса графов. Для сравнения заметим, что аналогичный результат Кестена относился лишь к двумерным мозаикам и не покрывал даже класса планарных однородных графов.

В § 7 (главным образом, по работам Кестена и его учеников, включая новейшие) перечисляются математические строгие результаты, относящиеся к поведению дефектного кластера вблизи критической точки. Физическая теория, основанная на идеологии подобия (скейлинга), вводит в перколяцию целый ряд критических индексов, характеризующих степенные законы изменения вблизи  $p_{cr}$  таких величин, как средний объем конечного кластера (при  $p < p_{cr}$ ) или плотность бесконечного кластера при  $p > p_{cr}$ . и т. п. Несмотря на сложность этих вопросов, первые шаги к обоснованию скейлинговой программы сделаны.

В § 8 результаты предыдущих §§ 3—6 перенесены на случай непрерывных пуассоновских моделей типа, обсуждавшихся в первой части введения. Перенос основан на идее дискретизации, сводящей задачу шаров в  $R^v$  к задаче узлов на некотором графе, который получается из  $Z^v$  введением «далеких связей». Уже этот пример показывает, насколько полезны теоремы о графах общего вида.

Здесь же содержится обсуждение (правда лишь для двумерного случая) физической гипотезы об универсальности координатной константы  $\beta_{cr}$ , дающей среднее число соседей на пороге просачивания. Доказано, что для одинаковых фигур  $S_i$  эта величина заключена между двумя абсолютными границами.

В § 9 обсуждается вопрос о строении линий уровня однородных непрерывных полей в  $R^v$ ,  $v \geq 2$ . Для широкого класса таких полей установлено, что всплески поля над достаточно высоким уровнем распадаются на непересекающие компакты (т. е. не перколируют), а их дополнение просачивается на бесконечность.

Здесь же приведены простейшие результаты по перколяции первого достижения, играющей важную роль в теории осреднения случайных сред (см. первую часть введения).

Заключительный § 10 содержит обзор результатов по много-масштабным схемам перколяции, которые показывают, что попытки применить к сложно организованным случайным средам (типа геофизических) результаты простейших (базовых) моделей протекания могут приводить к грубым ошибкам.

## § 1. Постановка дискретных задач теории перколяции

Рассматриваются ориентированные бесконечные связные графы  $G$  без петель со счетным множеством вершин (узлов)  $V = \{v\}$  и дуг  $\Sigma = \{e\}$ . Допускаются и неориентированные графы, это графы, у которых  $(v_i, v_j) \in \Sigma$  тогда и только тогда, когда  $(v_j, v_i) \in \Sigma$ . Для таких графов вместо пары дуг  $(v_i, v_j), (v_j, v_i)$  удобно рассматривать ребро  $\{v_i, v_j\}$ . Относительно графа  $G$  предполагаются выполненными еще два условия.

Условие I. (вершинная симметричность). Граф  $G$  имеет  $k$  типов вершин, т. е.  $V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_k$ ;  $V_i \cap V_j = \emptyset$  при  $i \neq j$ , и для каждой пары вершин  $v, v' \in V_i$  существует автоморфизм, переводящий  $v$  в  $v'$ , сохраняющий подмножества  $V_1, V_2, \dots, V_k$ .

Условие II. Степень каждой вершины графа  $G$  конечна.

Пример 1 (Периодические решетки в  $\mathbb{R}^d$ ). В [43] рассматривается перколяция на графе  $G$ , который удовлетворяет следующим четырем условиям:

1)  $G$  вложен в  $\mathbb{R}^d$  так, что каждый координатный вектор  $\mathbb{R}^d$  является периодом графа;

2) Существует такое конечное  $z$ , что степень каждой вершины (т. е. число ребер графа, из нее выходящих) не превышает  $z$ ;

3) Все ребра графа  $G$  имеют конечную длину и всякий компакт в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^d$  содержит лишь конечное число ребер графа;

4)  $G$  — связный граф.

Как легко видеть, понятие периодических решеток вкладывается в более общее построение, описанное выше, и все основные результаты данной работы автоматически переносятся на периодические решетки.

Пример 2 (Направленная перколяция). Рассматриваются периодические решетки, в которых каждому ребру приписано направление, что также вписывается в понятие ориентированного графа, введенное выше.

Пример 3 (Решетки Бете). Рассматривается бесконечное дерево с коэффициентом ветвления  $r$  (т. е. степень каждой вершины равна  $r+1$ ). Очевидно, что условие I (при  $k=1$ ) и условие II для такого графа выполнены.

Рассмотрим на множестве  $V$  вершин графа  $G$  независимое случайное поле. Каждой вершине  $v \in V$  припишем одно из двух значений либо  $+1$ , либо  $-1$ . Тогда пространством элементарных событий будет

$$\Omega_V = \prod_{v \in V} \{+1, -1\}.$$

Произвольную точку или конфигурацию из  $\Omega_V$  будем обозначать через  $\omega = \{\omega(v)\}_{v \in V}$ . В качестве  $\sigma$ -алгебры  $B_V$  возьмем  $\sigma$ -алгебру, порожденную цилиндрическими множествами в  $\Omega_V$

$$\{\omega: \omega(v_1) = e_1, \omega(v_2) = e_2, \dots, \omega(v_n) = e_n\}; \quad v_i \in V, \quad e_i = \pm 1.$$

Вероятностная мера на  $B_V$  задается произведением

$$P_V = \prod_{v \in V} \mu_v,$$

где  $\mu_v(\omega(v) = +1) = p(v)$ ,  $\mu_v(\omega(v) = -1) = 1 - p(v)$ . Если  $\omega(v) = +1$ , то вершину  $v$  назовем занятой (дефектной), а в противном случае — свободной. Для занятой вершины  $v \in V$  кластером  $W(v)$  назовем множество занятых узлов  $v' \in V$ , достижимых из  $v$  по цепочкам занятых узлов  $v_1, v_2, \dots, v_n$ , где  $(v, v_1), (v_1, v_2), \dots, (v_{n-1}, v_n), (v_n, v')$  являются дугами графа. Через  $|W(v)|$  будем обозначать число узлов в этом кластере (возможен случай, когда  $|W(v)| = \infty$ ).

Пример 4 (Задача связей). Иногда вероятности вводят не на вершинах, а на дугах графа  $G$ . Две дуги являются при этом связанными, если конец одной совпадает с началом другой. Легко видеть, что эта задача сводится к рассматриваемой: достаточно перейти к графу  $G^*$ , вершинами которого являются ребра графа  $G$ , а дугами — пары связанных дуг графа  $G$ .

Пример 5 (Смешанная задача). Вероятности можно задавать одновременно и на вершинах и на дугах. Ясно, что и в этом случае задача сводится к исходной.

Важной перколяционной характеристикой данного графа является вероятность принадлежности точки  $v$  бесконечному кластеру

$$\theta(v) = P_{P_V} \{ |W(v)| = \infty \}. \quad (1.1)$$

Относительно меры  $P_V$  будем предполагать, что для всех вершин  $v \in V$ :  $p_i = p_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ . Вектор  $\vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_k) \in [0, 1]^k$  задает, таким образом, вероятностное распределение  $P_{\vec{p}}$ .

В [45] доказано, что для любой фиксированной вершины  $v$  неравенство  $\theta(v) = \theta(\vec{p}, v) > 0$  справедливо тогда и только тогда, когда  $\theta(\vec{p}, v) > 0$  для всех  $v \in V$ . А из равенства  $E_{\vec{p}} \{ |W(v')| \} < \infty$  для некоторой вершины  $v'$  следует, что  $E_{\vec{p}} \{ |W(v)| \} < \infty$  для любой вершины  $v \in V$ .

Определим множество

$$H = \{ \vec{p} \in [0, 1]^k \mid \theta(\vec{p}, v) = 0, \forall v \in V \}.$$

Оно обладает тем свойством, что при  $\vec{p} \in H$  бесконечного кластера почти наверное нет, а при  $\vec{p} \in [0, 1]^k \setminus H$  бесконечный кластер почти наверное существует (при этом говорят, что имеет место протекание).

Введем также множество

$$T = \{ \vec{p} \in [0, 1]^k \mid E_{\vec{p}} \{ |W(v)| < \infty \} \},$$

где  $E_{\vec{p}}(\cdot)$  — математические ожидания по мере  $p_{\vec{v}}$ .

Для графов, которые являются периодическими решетками, в  $\mathbb{R}^d$  определяется множество  $S$ .

Пусть  $\sigma_{\vec{p}}(B(n, i))$  — вероятность того, что в параллелепипеде  $B(n, i) = [0, 3n] \times [0, 3n] \times \dots \times [0, n] \times \dots \times [0, 3n]$  (здесь  $[0, n]$  стоит в  $i$ -й компоненте декартового произведения) существует кластер, пересекающий  $B(n, i)$  в направлении  $i$ -й координаты, т. е. от грани  $[0, 3n] \times \dots \times \{0\} \times \dots \times [0, 3n]$  до грани  $[0, 3n] \times \dots \times \{n\} \times \dots \times [0, 3n]$ .

Пусть

$$S = \{ \vec{p} \in [0, 1]^k \mid \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{\vec{p}}(B(n, i)) = 0, 1 \leq i \leq d \}.$$

Легко видеть, что  $T \subseteq H$ . Фундаментальный результат Кестена [45] состоит в том, что  $T = S$ . В однопараметрическом случае ( $\vec{p} = (p, p, \dots, p)$ ) этот результат можно сформулировать в терминах трех критических точек:  $p_T = p_S \leq p_H$ , где

$$\begin{aligned} p_T &= \sup \{ p \in [0, 1] \mid E_p \{ |W(v)| < \infty \} \}, \\ p_S &= \sup \{ p \in [0, 1] \mid \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_p(B(n, i)) = 0, 1 \leq i \leq d \}, \\ p_H &= \sup \{ p \in [0, 1] \mid \theta(p, v) = 0 \}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Причем, критические точки  $p_T$  и  $p_H$  определены для однопараметрической задачи протекания на произвольном вершинно-симметричном графе  $G$ , а точка  $p_S$  — лишь для решеток, вложенных в  $\mathbb{R}^d$ .

Рассмотрение трех критических точек  $p_T$ ,  $p_S$ ,  $p_H$  объясняется следующим. С помощью численного моделирования получают приближенные значения порога  $p_S$ . Излагаемый ниже метод поколений дает теоретически сколь угодно точную оценку для  $p_T$ . Наконец, наибольший теоретический интерес представляет точка  $p_H$ , как точка фазового перехода в задаче перколяции.

Одним из основных результатов, изложенных в настоящей работе, является теорема о совпадении критических точек  $p_H = p_T$  для введенных вершинно-симметричных графов (в том числе и для периодических решеток, вложенных в  $\mathbb{R}^d$ ).

## § 2. О точных значениях критических вероятностей

Как ни удивительно, первые действительно строгие доказательства точных равенств для критических вероятностей были получены только в 80-е годы. Графы, для которых это удалось сделать, принадлежат к числу мозаик. Под мозаикой мы понимаем периодическую решетку, уложенную на плоскости без пересечений ребер (т. е. отрезки прямых, соединяющие соседние вершины, не пересекаются). Такая укладка порождает разбиение плоскости на многоугольники, т. е. мозаику. Естественно, что среди перколяционных задач внимание исследователей в первую очередь привлекли решетки, соответствующие регулярной укладке на плоскости правильных многоугольников — квадратов, треугольников, шестиугольников.

Кестен в 1980 г. [44] доказал, что в задаче связей для квадратной решетки

$$p_H = p_T = p_S = 1/2. \quad (2.1)$$

Он же [45] доказал, что для любой периодической мозаики, разбивающей плоскость на треугольники и имеющей ось симметрии,

$$p_H = p_T = p_S = 1/2. \quad (2.2)$$

Виерман [55] доказал, что в задаче связей для правильной треугольной мозаики

$$p_H = p_T = p_S = 2 \sin \frac{\pi}{10} \approx 0,347, \quad (2.3)$$

а в задаче связей для правильной шестиугольной мозаики

$$p_H = p_T = p_S = 1 - 2 \sin \frac{\pi}{10} \approx 0,653. \quad (2.4)$$

Более ранние доказательства результатов (2.1), (2.3), (2.4) в работе [51] не были строгими. Некоторые другие точные результаты см. в [49, 57].

В действительности, результаты (2.1) и (2.2) являются частными случаями более общего утверждения, использующего понятие дуальности графов. Назовем мозаичным графом периодическую решетку, полученную из мозаики на плоскости дополнительным проведением в некоторых ее многоугольниках всех диагоналей. Тогда дуальным к мозаичному графу будет граф, полученный из той же мозаики проведением всех диагоналей в остальных многоугольниках. Кестен [45] доказал, что для пары дуальных графов  $G$  и  $G^*$ , чье изображение на плоскости симметрично относительно оси абсцисс, справедливо соотношение

$$p_H(G) = p_T(G) = p_S(G) = 1 - p_H(G^*) = 1 - p_T(G^*) = 1 - p_S(G^*). \quad (2.5)$$

В частности, если графы  $G$  и  $G^*$  изоморфны (в таком случае граф  $G$  называется самодуальным), то

$$p_H(G) = p_T(G) = p_S(G) = 1/2. \quad (2.6)$$

Соотношения (2.1) и (2.2) являются частными случаями (2.6), но можно привести и другие примеры самодуальных мозаичных графов.

Обобщение понятия дуальности на ориентированные графы см. в [58].

Давно известен другой класс графов (не являющихся периодическими решетками в  $R^d$ ), для которых могут быть точно вычислены не только критические вероятности, но и другие перколяционные характеристики. Это — решетки Бете, т. е. бесконечные деревья, удовлетворяющие условиям I и II (см. § 1). Нахождение их перколяционных характеристик оказывается возможным, благодаря наличию рекуррентных соотношений для них. Например, для решетки Бете с коэффициентом ветвления  $r$  (степень каждой вершины равна  $r+1$ ) нетрудно найти, что

$$p_H = p_T = 1/r,$$

$$E_p\{|W|\} = \frac{p(1+p)}{1-rp} \text{ при } p < 1/r,$$

а плотность бесконечного кластера  $\theta(p) = P_p\{|W| < \infty\}$  удовлетворяет уравнению

$$\theta(p) = p(1 - (1 - \theta(p))^r),$$

откуда

$$\theta(p) \approx \frac{2r}{r-1} (p - 1/r) \text{ при } p \gg 1/r.$$

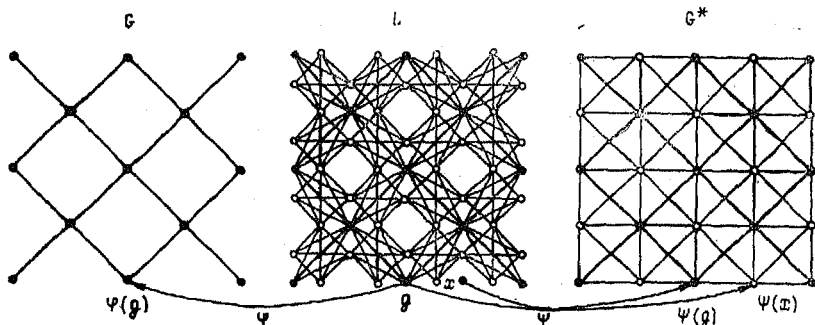
Также благодаря наличию рекуррентных соотношений, можно точно находить перколяционные характеристики и для других вершинно-симметричных графов, получаемых из бесконечных деревьев добавлением новых связей.

Кроме некоторых мозаичных графов и графов, близких к деревьям, ни для каких других графов (удовлетворяющих условиям I и II) не удалось пока найти точное значение критической вероятности. Так, наилучшим достижением для квадратной решетки на плоскости является результат работы [54]:

$$P_H > 0,503478. \quad (2.7)$$

Его доказательство мы сейчас приведем.

Рассмотрим перколяционную задачу на графе  $L$  (см. рис.), где вероятность занятости черного узла равна  $P$ , а белого узла —  $p' = 1 - (1 - p)^{1/4}$ . По каждой конфигурации свободных и занятых узлов на  $L$  построим конфигурации на двух других графах  $G$  и  $G^*$ , согласно следующим правилам (см. рис.).



1) На  $G$ : узел  $\varphi(g)$  занят тогда и только тогда, когда занят узел  $g$  или заняты не менее 3 из 4 ближайших к нему белых узлов. Таким образом,  $\varphi(g)$  занят независимо от других узлов графа  $G$  с вероятностью  $p + (1-p)(4-3p')(p')^3$ .

2) На  $G^*$ : черный узел  $\Psi(g)$  занят тогда и только тогда, когда узел  $g$  занят; белый узел  $\Psi(x)$  занят тогда и только тогда, когда занят хотя бы 1 из 4 окружающих точку  $x$  белых узлов. Таким образом, любой узел графа  $G^*$  занят независимо от других с вероятностью  $p$ .

Заметим теперь, что бесконечному кластеру на  $G$  соответствует бесконечный кластер на  $L$ , а бесконечному кластеру на  $L$  — бесконечный кластер на  $G^*$ . Следовательно, протекание на  $G$ , где вероятность занятости узла равна

$$f(p) = p + (1-p)(4-3(1-(1-p)^{1/4}))(1-(1-p)^{1/4})^3,$$

влечет и протекание на  $G^*$ , где вероятность занятости узла равна  $p$ . Стало быть, если  $p < p_H(G^*)$ , то  $f(p) \leq p_H(G)$ . Отсюда  $f(p_H(G^*)) \leq p_H(G)$ . Поскольку  $G$  и  $G^*$  — пара дуальных графов, то в силу соотношения (2.5),  $p_H(G^*) = 1 - p_H(G)$ . Окончательно получаем

$$f(1 - p_H(G)) - p_H(G) \leq 0,$$

откуда и вытекает оценка (2.7).

Для сравнения укажем, что по данным численного моделирования для квадратной решетки  $p_H \approx 0,59$ . (см. [29]).

### § 3. Метод поколений

В этом параграфе мы изложим метод, позволяющий теоретически получать сколько угодно точные нижние оценки для  $p_T$ , а следовательно, с учетом, что  $p_T = p_H$ , и для  $p_H$ . Кратко этот метод изложен в [13].

Свяжем с вершиной  $v \in V$  следующий марковский процесс  $\psi_v(t)$ ,  $t=0, 1, 2, \dots$ . Вершине  $v$  припишем индекс поколения 0 и значение  $\omega(v) = +1$  с вероятностью  $p$  и  $\omega(v) = -1$  с вероятностью  $q=1-p$ . Если  $\omega(v) = -1$ , то построение процесса за-

кончено ( $v$  — поглощающее состояние). Если же  $\omega(v) + 1$ , то всем вершинам  $v_i \in V$ , связанным с  $v$ , припишем индекс поколения 1 и каждой независимо припишем значение  $\omega(v_i) = +1$  с вероятностью  $p$  и  $\omega(v_i) = -1$  с вероятностью  $q$ . Пусть процесс  $\Psi_v(t)$  уже построен до момента  $t = n$ . Пусть  $Y_i$  — множество вершин с индексом поколения  $i$ . Тогда множество всех помеченных вершин  $Y^n = v \cup Y_1 \cup Y_2 \cup \dots \cup Y_n$ . Через  $Y_{n+1}$  обозначим множество вершин  $u$  графа  $G$ , связанных с занятыми вершинами из  $Y_n$  и не принадлежащих  $Y^n$ . Этим вершинам приписываем индекс поколения  $n+1$  и одно из значений  $+1$  или  $-1$  описанным выше способом. Если  $Y_n$  не пусто, а  $Y_{n+1} = \emptyset$ , то состояние  $Y^n$  является поглощающим. Состоянием  $E$  этой цепи Маркова является допустимый набор вершин с пометками (индекс поколения и значения  $+1$  или  $-1$ ). Отметим, что в любом непоглощающем состоянии процесс  $\Psi_v(t)$  находится не более одного раза. Множество поглощающих состояний обозначим через  $B$ .

Следующая лемма показывает эквивалентность положительности  $\theta_v(p)$  для задачи перколяции на графе  $G$  и непоглощаемость процесса  $\Psi_v(t)$  с положительной вероятностью.

Лемма 3.1.  $\theta_v(p) > 0$  тогда и только тогда, когда  $\lim_{t \rightarrow \infty} P(\Psi_v(t) \in B) < 1$ . Доказательство автоматически следует из независимости случайного поля, заданного на графе  $G$ .

Обозначим через  $\xi^m(v)$  случайную величину, равную числу занятых вершин, которым приписан индекс  $m$ -го поколения. Тогда

$$\xi^m(v) = \xi_1^m(v) + \xi_2^m(v) + \dots + \xi_k^m(v),$$

где  $\xi_i^m(v)$  — число занятых вершин  $i$ -го типа  $m$ -го поколения процесса  $\Psi_v(t)$ . Из вершинной симметричности графа  $G$  следует, что распределения случайных величин  $\xi_j^m(v)$  одинаковы для всех  $v$ , принадлежащих одному типу при фиксированных  $m$  и  $i$ . Обозначим:  $M_{ij}^m = E_p \{ \xi_j^m(v) \}$ , где  $v \in V_i$ . Другими словами,  $M_{ij}^m$  — среднее число потомков  $j$ -го типа в  $m$ -ом поколении при условии, что начальная вершина  $i$ -го типа. Таким образом, при фиксированном  $m$  мы имеем матрицу размера  $k \times k$ :

$$M^m = \begin{pmatrix} M_{11}^m & M_{12}^m & \dots & M_{1k}^m \\ M_{21}^m & M_{22}^m & \dots & M_{2k}^m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_{k1}^m & M_{k2}^m & \dots & M_{kk}^m \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

В дополнение к критическим вероятностям  $p_H$  и  $p_T$  введем

$$p_M = p_M(G) = \sup \{ p : p \in [0, 1], \inf_{m \in \mathbb{Z}_+} \lambda_m < 1 \}, \quad (3.2)$$

где  $\lambda_m$  — максимальное собственное значение матрицы  $M^m$ .

Теорема 3.1.  $p_T = p_M$ .

Доказательство. Набору случайных величин  $\{\xi_j^n(v)\}$  и матрице  $M^n$  при фиксированном  $n$  можно сопоставить ветвящийся процесс с  $k$  типами частиц, где  $\xi_j^n(v)$ ;  $v \in V_i$  обозначает случайное число потомков  $j$ -го типа у частицы  $i$ -го типа в  $i$ -ом поколении, и деление частиц происходит независимо. В теории ветвящихся процессов с несколькими типами частиц известен следующий результат (см. [25]): если максимальное собственное значение соответствующей матрицы, описанной выше, меньше или равно 1, то ветвящийся процесс вырождается с вероятностью 1, независимо от начальных условий.

Возьмем произвольное  $p < p_M$ . Тогда существует такое  $n$ , что наибольшее собственное значение  $\lambda_n$  матрицы  $M^n$  меньше 1. Следовательно, соответствующий ветвящийся процесс вырождается с вероятностью 1. Кроме того, этот ветвящийся процесс мажорирует процесс  $\Psi_v(t)$  в том смысле, что из его вырождения с вероятностью 1 следует, что  $\lim_{t \rightarrow \infty} P(\Psi_v(t) \in B) = 1$ . Мало того,  $E_p(\xi^n(v)) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  экспоненциально по  $n$ , т. е. существуют  $a, \alpha > 0$ , что для любого  $n$

$$E_p\{\xi^n(v)\} < a \exp\{-\alpha n\}. \quad (3.3)$$

Учитывая, что  $|W(v)| = \sum_{i=1}^{\infty} \xi^i(v)$  и неравенство (3.3), заключаем что для  $p < p_M$

$$E_p\{|W(v)|\} = \sum_{i=1}^{\infty} E_p(\xi^i(v)) < \infty,$$

и, следовательно,  $p_M \leq p_T$ .

Если же взять  $p > p_M$ , то ряд  $\sum_{i=1}^{\infty} E_p(\xi^i(v))$  оказывается расходящимся, что приводит к неравенству  $p_M \geq p_T$ . Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Теоретически величину  $p_M$  можно вычислить сколь угодно точно, так как элементы матрицы математических ожиданий числа занятых вершин  $m$ -го поколения выписываются явно в виде многочлена от  $p$ . Однако для больших  $m$  эта задача очень трудоемка. Наиболее эффективен метод для графов, где все вершины симметричны. В этом случае процесс перколяции мажорируется ветвящимся процессом с одним типом частиц. К таким графам можно отнести, например, обычную квадратную решетку или решетку с диагоналями и т. д. С помощью ЭВМ для обычной квадратной решетки был найден явный вид  $M^7(p)$ , что позволило получить оценку:  $p_H \geq 0,464$ . Дальнейший подсчет требовал очень большого машинного вре-

мени. На сегодняшний день известна оценка  $p_H > 0,503$  (см. § 2). Эта оценка получена довольно тонкими комбинаторными методами, опирающимися на симметричность решетки. Метод же поколений универсален и он применим к любым графам, независимо от их вложимости в  $R^d$ .

#### § 4. Метод проектирования

Опишем метод, позволяющий сравнивать точки перколяций для различных решеток, а также получать верхние оценки для перколяционных задач. Кратко этот метод изложен в [13]. Ранее в [16] применен метод получения асимптотики перколяционного порога в задаче направленного протекания, идейно похожий на излагаемый в данной работе. В 1985 году этот метод переоткрыли в [36]. Описание метода проведем на примере гиперкубической решетки  $G_n$ . Результатом применения этого метода будут оценки перколяционного порога  $p_H(G_n)$ .

Теорема 4.1.

$$p_H(G_3) \leq 1/2, \quad (4.1)$$

$$p_H(G_4) < 1/2, \quad (4.2)$$

$$c_2/n \leq p_H(G_n) \leq c_1/n, \quad (4.3)$$

где  $c_1$  и  $c_2$  — константы, не зависящие от  $n$ .

Доказательство. Рассмотрим трехмерную решетку  $G_3$  в  $R^3$ . Поместим начало координат естественной системы координат в вершину  $v$ . Проведем прямую  $z = x/k_1 = y/k_2$  ( $k_1$  и  $k_2$  — целые). Из каждой вершины  $G_3$  проведем прямую, параллельную построенной. Проведем построение процесса  $\tilde{\Psi}_v(t)$ , аналогичного процессу  $\Psi_v(t)$  из предыдущего параграфа, но с дополнительными ограничениями: каждой прямой, проведенной выше, принадлежит не более одной вершины с приписанным индексом. В дальнейшем нижний индекс  $v$  будем опускать. Пусть  $\tilde{\Psi}_v(t)$  построен до момента времени  $t = m$ . Индекс  $(m+1)$ -го поколения припишем тем вершинам решетки  $G_3$ , которые 1) являются соседними к занятым вершинам  $m$ -го поколения; 2) не принадлежат  $Y^m$ ; 3) не принадлежат ни одной прямой, описанной выше, инцидентной вершинам  $Y^m$ ; 4) если одновременно несколько вершин удовлетворяют условиям 1)–3) и инцидентны одной прямой, то мы припишем индекс  $m$ -го поколения лишь одной из них (например, рандомизацией). Остальное построение аналогично процессу  $\Psi(t)$ .

Обозначим  $B$  и  $\tilde{B}$ , соответственно, множество поглощающих состояний процессов  $\Psi(t)$  и  $\tilde{\Psi}(t)$ .

Лемма 4.1. Пусть  $\lim_{t \rightarrow \infty} P(\tilde{\Psi}(t) \in \tilde{B}) < 1$ . Тогда  $\lim_{t \rightarrow \infty} P(\Psi(t) \in B) < 1$ .

Введем в  $\mathbb{R}^3$  новую систему координат, направив ось  $z_1$  вдоль прямой  $z = x/k_1 = y/k_2$ , а оси  $x$  и  $y$  оставив прежними. Масштаб по оси  $z_1$  можно ввести любой. Одновременно с процессом  $\tilde{\Psi}(t)$  в  $\mathbb{R}^3$  рассмотрим его проекцию  $\tilde{\Psi}_\perp(t)$  на плоскость  $(x, y)$  вдоль оси  $z_1$ . При этом множеству вершин  $Y^m$  в  $\mathbb{R}^3$ , соответствующих состоянию процесса  $\tilde{\Psi}(t)$  при  $t=m$ , однозначно соответствует множество вершин  $Y_\perp^m$  в  $\mathbb{R}^2$ , т. е. состояние процесса  $\tilde{\Psi}_\perp(t)$  при  $t=m$ . Отметим следующий важный факт. Положение проекции  $\tilde{\Psi}_\perp(t)$  в момент времени  $t=m+1$  зависит лишь от положения проекции  $\tilde{\Psi}_\perp(t)$  при  $t=m$ , т. е.

$$\mathbf{P}(\tilde{\Psi}_\perp(m+1) = E_\perp / \tilde{\Psi}(m)) = \mathbf{P}(\tilde{\Psi}_\perp(m+1) = E_\perp / \tilde{\Psi}_\perp(m)), \quad (4.4)$$

где  $E_\perp$  — проекция произвольного состояния  $E$  цепи  $\tilde{\Psi}(t)$  при  $t=m+1$ .

Для процесса  $\tilde{\Psi}(t)$  аналогично введем множество поглощающих состояний  $\tilde{B}_\perp$ .

Лемма 4.2. Пусть  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\tilde{\Psi}_\perp(t) \in \tilde{B}_\perp) < 1$ . Тогда

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\tilde{\Psi}(t) \in \tilde{B}) < 1.$$

Процесс  $\tilde{\Psi}_\perp(t)$  соответствует перколяционной задаче на квадратной решетке с двумя дополнительными связями. Две вершины  $(i, j)$  и  $(i', j')$  соединены ребром, если либо  $|i - i'| + |j - j'| = 1$ , либо  $\begin{cases} i - i' = k_1, \\ j - j' = k_2, \end{cases}$  либо  $\begin{cases} i - i' = -k_1, \\ j - j' = -k_2. \end{cases}$  Если положить  $k_1 = k_2 = 1$ , то получим обычную квадратную решетку с одной диагональю, для которой  $p_H = p_T = 1/2$ . Таким образом, если взять  $p > 1/2$ , тогда  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\tilde{\Psi}_\perp(t) \in \tilde{B}_\perp) < 1 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\tilde{\Psi}(t) \in \tilde{B}) < 1 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\Psi(t) \in B) < 1 \Rightarrow \theta(p) > 0 \Rightarrow p_H(G_3) \leq 1/2$ . Первое утверждение теоремы 4.1 доказано.

Доказательство верхней оценки для  $p_H(G_n)$  при  $n \geq 4$  проводится вполне аналогично. Для этого, одновременно с процессом  $\tilde{\Psi}^n(t)$ , в  $\mathbb{R}^n$  рассматривается процесс  $\tilde{\Psi}_\perp^{n-1}(t)$  в  $\mathbb{R}^{n-1}$ , который получается проектированием процесса  $\tilde{\Psi}^n(t)$  на подпространство размерности  $n-1$  вдоль прямой

$$x_n = x_1/k_1 = x_2/k_2, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 0, \dots, x_{n-1} = 0.$$

Меняя константы  $k_1$  и  $k_2$ , проводим проектирование вдоль соответствующих прямых на подпространства меньших размерностей  $n-2$  раза. В результате получим процесс  $\tilde{\Psi}_\perp^2(t)$  в  $\mathbb{R}^2$ , отвечающий перколяционной задаче на квадратной решетке с  $2n-4$  дополнительными связями (ребрами) у каждой вершины. Подбирая соответствующие прямые проектирования, можно добиться, что для вершины  $(i, j)$  соседними будут все вершины, лежащие внут-

ри квадрата со стороной  $[\sqrt{2n}-1]$  и с центром в точке  $(i, j)$ . В частности, при  $n=4$  приходим к квадратной решетке с двумя диагоналями, для которой  $p_H = p_T < 1/2$  (см. [43, 45]), откуда следует (4.2).

Нижняя оценка в неравенстве (4.3) непосредственно получается при применении метода поколений. Перейдем к доказательству верхней оценки неравенства (4.3). Построим в  $\mathbb{R}^2$  квадратную решетку с более редкими ячейками. Проведем образующие квадратной решетки параллельно осям  $x$  и  $y$ , но так, чтобы они не проходили через целочисленные прямые  $y=k$  и  $x=m$ ,  $k, m \in \mathbb{Z}$ , а длина ребра квадратной решетки  $a = [\sqrt{2n}-1/2]$ . В центр каждого квадрата поместим новый узел, при этом получим решетку  $\tilde{G}$ , конгруэнтную ранее построенной. Определим на ней случайное поле, индуцированное полем на квадратной решетке с  $2n$  связями, следующим образом: вершине  $v' \in \tilde{G}$  припишем значение  $+1$ , если в квадрате, в центр которого эта вершина помещена, содержится хотя бы одна вершина  $v \in G$  со значением  $+1$ . Пусть  $N$  — число вершин, лежащих внутри квадрата, описанного выше. Тогда  $p' = \mathbf{P}(\omega(v') = +1) = 1 - (1-p)^N$ ,  $q' = \mathbf{P}(\omega(v') = -1) = (1-p)^N$ . Вновь индуцированное поле по построению является независимым и для него существует критическая вероятность  $\tilde{p}_H$ :  $0 < \tilde{p}_H < 1$ .

Из существования бесконечного кластера на решетке  $\tilde{G}$  следует существование бесконечного кластера на решетке  $G$ . Следовательно, выполняется неравенство

$$\tilde{p}_H \geq 1 - (1-p_H)^N. \quad (4.5)$$

Из (4.5) после несложных выкладок получаем

$$p_H \leq \tilde{p}_H / N.$$

Учитывая, что  $N > c \cdot n$ , где константа  $c$  не зависит от размерности решетки  $n$ , доказываем верхнюю оценку неравенства (4.3). Заметим, что аналогичные в идейном плане соображения использовались при доказательстве теоремы 3.1 в [8].

Изложенный метод понижения размерности применим не только к гиперкубическим, но и к произвольным  $n$ -мерным решеткам, а также решеткам, где значение  $+1$  или  $-1$  приписывается ребрам (задача связей).

## § 5. Возрастающие события. Базовые неравенства. Формула Руссо

Рассмотрим вероятностное пространство  $(\Omega_V, B_V, P_V)$ , введенное в § 1.

Определение.  $B_V$  — измеримая функция  $f(\omega) : \Omega_V \rightarrow \mathbb{R}$  называется возрастающей (убывающей), если она возрастает

(убывает) в каждой  $\omega(v)$ ,  $v \in V$ . Событие  $A \subset B_V$  назовем возрастающим (убывающим), если ее характеристическая функция возрастает (убывает).

Примеры. 1)  $|W(v)|$  — есть возрастающая функция, так как замена  $-1$  на  $+1$  в какой либо  $v_1 \in V$  может лишь увеличить  $|W(v)|$ .

2)  $A = \{\text{существует путь из занятых вершин на } G \text{ от } v_1 \text{ до } v_2\}$  есть возрастающее событие.

3)  $D_n(v) = \{\text{существует путь из занятых вершин на } G \text{ от вершины } v \text{ до сферы } S_n(v)\}$  — возрастающее событие.

Для монотонных функций и событий мы сейчас приведем давно известное *FKG*-неравенство. В более общем случае оно изложено в статье [40] 1971 г.

*FKG*-неравенство. Если  $f$  и  $g$  — две ограниченные функции на  $\Omega_V$ , которые зависят лишь от конечного числа координат  $\omega$ , и обе являются возрастающими или убывающими функциями, тогда

$$E_V\{f(\omega) \cdot g(\omega)\} \geq E_V\{f(\omega)\} \cdot E_V\{g(\omega)\}. \quad (5.1)$$

В частности, если  $A$  и  $B$  — два возрастающих события, или два убывающих события, которые зависят лишь от конечного числа координат  $\omega$ , тогда

$$P_V\{A \cap B\} \geq P_V\{A\} \cdot P_V\{B\}. \quad (5.2)$$

Доказательство этих неравенств несложно и можно прочитать, например, в [45].

Приведем пример на применение *FKG*-неравенства

$$\begin{aligned} P\{|W(v_1)| \geq n\} &\geq P\{\text{существует путь из занятых вершин из } v_1 \text{ в } v_2 \\ &\text{и } |W(v_2)| \geq n\} \geq P\{\text{существует путь из занятых вершин} \\ &\text{из } v_1 \text{ в } v_2\} \cdot P\{|W(v_2)| \geq n\}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Для связного графа  $G$  и  $P(v) > 0$  для всех  $v$  выполняется неравенство

$$P\{\text{существует путь из занятых вершин из } v_1 \text{ в } v_2\} > 0. \quad (5.4)$$

Выполнение неравенств (5.3) и (5.4) приводит к следующему:

$$\begin{aligned} \text{из } \Theta(v_2) > 0 \text{ следует } \Theta(v_1) > 0, \\ \text{из } E\{|W(v_2)|\} = \infty \text{ следует } E\{|W(v_1)|\} = \infty. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Откуда следует, что критические точки  $p_T$ ,  $p_H$ , введенные в § 1, не зависят от выбора вершины  $v$ .

Мы сейчас приведем неравенство, обратное к *FKG*-неравенству для так называемых событий с «раздельной» реализацией. В более общей постановке это изложено в [35]. А в [33] дано красивое прямое доказательство для частного случая. Это доказательство проходит и для случая, исследуемого в § 6.

Пусть  $\Omega = \{-1, 1\}^n$ . Для произвольных событий  $A$  и  $B \in \Omega$  определим событие  $A \square B$ . Для конфигурации  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) \in \Omega$  ( $\omega_i = \pm 1$ ) и  $K \in \{1, 2, \dots, n\}$  положим  $C(K, \omega)$  — цилиндрическое событие  $\{\omega' : \omega' \in \Omega \text{ и } \omega'_i = \omega_i \text{ для всех } i \in K\}$ . Положим  $\bar{K} = \{1, 2, \dots, n\} \setminus K$ . Тогда  $A \square B = \{\omega : \exists K \in \{1, 2, \dots, n\} \text{ такой, что } C(K, \omega) \subset A, C(\bar{K}, \omega) \in B\}$ .

Теорема. Если  $A, B \in \Omega$  — возрастающие события, тогда

$$\mu(A \square B) \leq \mu(A) \cdot \mu(B). \quad (5.6)$$

Пример 1. Пусть  $v_1, v_2, v_3, v_4$  — различные вершины графа  $G$ . Тогда

$$\begin{aligned} P\{\exists \text{ непересекающиеся пути из занятых вершин из } v_1 \text{ в } v_2 \\ \text{ и из } v_3 \text{ в } v_4\} = P\{\exists \text{ путь из } v_1 \text{ в } v_2 \square \exists \text{ путь из } v_3 \text{ в } v_4\} \leq \\ \leq P\{\exists \text{ путь из } v_1 \text{ в } v_2\} \cdot P\{\exists \text{ путь из } v_3 \text{ в } v_4\}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Последнее неравенство автоматически получается из (5.6), если мы рассматриваем лишь пути не длинее заданной величины  $l$ . Далее, устремляя  $l$  к бесконечности, доказываем неравенство (5.7).

Вторым примером применения неравенства (5.6) является неравенство (6.11) из § 6.

Определение. Пусть  $E \in B_V$  — некоторое событие и  $\omega \in \Omega_V$  — конфигурация. Вершину  $v \in V$  мы будем называть существенной для  $(E, \omega)$ , если изменение занятости этой вершины в конфигурации  $\omega$  порождает поляризацию  $\omega'$ , где  $\omega' \notin E$  при  $\omega \in E$  или  $\omega' \in E$  при  $\omega \notin E$ .

Формула Руссо. Пусть  $E \in B_V$  — возрастающее событие, тогда

$$\frac{\partial}{\partial p(v)} P_V(E) = P_V\{v \text{ является существенной для } (E, \omega)\}. \quad (5.8)$$

Пусть теперь  $p'$  и  $p''$  — две функции, определенные на  $V$  и принимающие значения в  $[0, 1]$  и

$$\begin{aligned} \mu_{vt}\{\omega(v) = 1\} &= 1 - \mu_{vt}\{\omega(v) = -1\} = \\ &= (1-t)p'(v) + tp''(v), \quad v \in V, \quad 0 \leq t \leq 1, \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$P_{Vt} = \prod_{v \in V} \mu_{vt}. \quad (5.10)$$

Если  $p'(v) \leq p''(v)$  для всех  $v \in V$  и  $E$  является возрастающим событием, которое зависит лишь от занятости конечного числа вершин  $W \in V$ , тогда

$$\frac{d}{dt} P_{Vt}\{E\} = \sum_{v \in V} \{p''(v) - p'(v)\} P_{Vt}\{v \text{ — существенна для } E\} \geq$$

$$\inf_{v \in W} \{p''(v) - p'(v)\} E_{Vt} \{N(E)\}, \quad (5.11)$$

где  $N(E)$  — число существенных точек события  $E$  и  $\omega$ ,  $E_{Vt}(\cdot)$  — математическое ожидание по мере  $P_{Vt}$ .

Доказательство неравенств (5.8) и (5.11) мы приводить не будем. Простое доказательство содержится, например, в [45], впервые изложено в [50].

В случае, если  $\inf_{v \in W} \{p''(v) - p'(v)\} = \alpha > 0$ , неравенство (5.11) можно переписать

$$\frac{d}{dt} P_{Vt} \{E\} \geq \alpha E_{Vt} \{N(E)\}. \quad (5.12)$$

В дальнейшем это неравенство будет использовано при доказательстве теоремы о совпадении критических точек  $p_T = p_H$ .

## § 6. Совпадение критических точек

Мы, по-прежнему, будем рассматривать ориентированные бесконечные связные графы, введенные выше. Относительно графа  $G$ , кроме условий I, II (см. § 1), будем предполагать выполненным условие III, которое мы сейчас сформулируем.

Зафиксируем в графе  $G$  вершину  $v$ . Обозначим через  $R_m(v)$  множество вершин, достижимых из  $v$  не более чем за  $m$  шагов; положим также  $S_m(v) = R_m(v) \setminus R_{m-1}(v)$  ( $m = 2, 3, \dots$ );  $S_1(v) = R_1(v)$ .

Условие III. Существуют такие  $c_1, a_1 > 0$  и  $0 < \gamma_1 < 1$ , что  $R_n(v) < c_1 \exp\{a_1 n^{\gamma_1}\}$  для  $\forall v \in V, n = 1, 2, \dots$

З а м е ч а н и е. Периодические решетки в  $R^n$ , рассматриваемые практически во всех перколяционных задачах, удовлетворяют всем условиям, наложенным нами на граф  $G$ .

На графе  $G$  мы будем рассматривать однопараметрическую задачу узлов, для которой выше введены критические вероятности  $p_H$  и  $p_T$ .

Обозначим через  $D_n(v)$  событие, состоящее в том, что существует путь из занятых вершин, соединяющий  $v$  с одной из вершин, принадлежащей  $S_n(v)$  (будем говорить, что произошло протекание до сферы  $S_n(v)$ ).

Теорема 6.1. Пусть граф  $G$  удовлетворяет условиям I, II и  $p < p_H$ . Тогда существует такое  $\alpha_1 = \alpha_1(p) > 0$ , что при всех  $n$

$$P_p \{D_n(v)\} < \exp\{-\alpha_1 n / \ln n\}. \quad (6.1)$$

Теорема 6.2. Пусть граф  $G$  удовлетворяет условиям I, II, III. Тогда для любого  $p < p_H$  существует  $a_2 > 0$ , что при всех  $n$  и  $v \in V$

$$P_p \{D_n(v)\} < \exp\{-a_2 n\}. \quad (6.2)$$

Теорема 6.3. Для графа  $G$ , удовлетворяющего условиям I, II, III, критические точки перколяций  $p_H$  и  $p_T$  совпадают:  $p_H = p_T$ .

Доказательство основной теоремы 6.1 будет разбито на ряд лемм.

Множество существенных точек данной конфигурации  $\omega$  и события  $D_n(v)$  будем обозначать через  $N(D_n(v), \omega)$ . Легко проверяется, что событие  $D_n(v)$  — возрастающее. Следовательно, для семейства событий  $D_n(v)$  можно применить формулу Руссо.

Возьмем произвольные  $\bar{p}_0, \bar{p}_1$ ;  $0 < \bar{p}_1 < \bar{p}_0 \leq 1$ ,

$$p(t) = t \cdot \bar{p}_0 + (1-t) \bar{p}_1, \quad 0 \leq t \leq 1; \quad p(0) = \bar{p}_1; \quad p(1) = \bar{p}_0. \quad (6.3)$$

Тогда вероятность события  $D_n(v)$  при фиксированном  $n$  и узле  $v$  является функцией от  $t$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) и удовлетворяет неравенству

$$\frac{d}{dt} P_{p(t)}(D_n(v)) \geq \alpha E_{p(t)}\{N(D_n(v))\}, \quad t \in (0, 1), \quad (6.4)$$

где  $\alpha$  — константа, зависящая от точек  $\bar{p}_0$  и  $\bar{p}_1$ . Выразив  $E_p\{N(D_n(v))\}$  через условное математическое ожидание и проинтегрировав, получим следующие два неравенства:

$$\frac{d}{dt} P_{p(t)}(D_n(v)) \geq \alpha E_{p(t)}\{N(D_n(v))/D_n(v)\} \cdot P_{p(t)}(D_n(v)), \quad (6.5)$$

$$P_{\bar{p}_1}(D_n(v)) \leq P_{\bar{p}_0}(D_n(v)) \exp \left\{ -\alpha \int_0^1 E_{p(t)}\{N(D_n(v))/D_n(v)\} dt \right\}. \quad (6.6)$$

Основные трудности доказательства теоремы 6.1 состоят в оценке  $E_{p(t)}\{N(D_n(v))/D_n(v)\}$ .

Лемма 6.1. Для любого  $p < p_H$ ,  $v \in V$   $\lim_{n \rightarrow \infty} P_p(D_n(v)) = 0$  и существует величина  $\alpha_2 = \alpha_2(p)$ , зависящая от  $p$  и независящая от  $n$ , такая, что

$$P_p(D_n(v')) \leq \alpha_2 P_p(D_n(v''))$$

для любых  $v', v'' \in V$ .

Доказательство. Пусть  $v' \in V_i$ , а  $v'' \in V_j$ . Существует такое  $k$ , не зависящее от  $i$  и  $j$  и такие две вершины  $v_i \in V_i$  и  $v_j \in V_j$ , между которыми существует путь длины  $k$ . Тогда

$$P_p(D_n(v_i)) \geq p^k P_p(D_{n+k}(v_j)), \quad (6.7)$$

$$P_p(D_n(v_j)) \geq p^k P_p(D_{n+k}(v_i)). \quad (6.8)$$

Откуда и следует утверждение леммы 6.1.

Пусть для некоторой конфигурации событие  $D_n(v)$  произошло. И пусть  $a_1, a_2, \dots, a_m$  — все существенные точки этой конфигурации. Следующая лемма дает геометрическую картину этой ситуации.

Лемма 6.2. Существенные точки можно занумеровать так, что все пути из занятых вершин от  $v$  до  $S_n(v)$  пересекают эти точки в порядке их нумерации (по одному разу каждую) и для двух точек с соседними номерами существуют, по крайней мере, два непересекающихся на отрезке между ними пути.

Доказательство. Пусть для конфигурации  $\omega$  событие  $D_n(v)$  произошло. Тогда существует путь из вершины  $v$  до сферы  $S_n$ , проходящий все существенные точки; пусть  $a_1, a_2, \dots, \dots, a_m$  расположены в порядке их прохождения. Но тогда и любой другой путь из занятых вершин проходит их в том же порядке. (Если предположить, что после  $a_i$  этот второй путь попадает в  $a_j$ , где  $j > i+1$ , то это означает, что вершина  $a_{i+1}$  не существенная.) Существование двух непересекающихся подпутей между двумя соседними существенными точками докажем по индукции. Без потери общности, пусть мы рассматриваем участок от  $v$  до  $a_1$ . Так как событие  $D_n(v)$  для данной конфигурации произошло, то существует путь из занятых вершин от  $v$  до  $S_n$ , и пусть  $(v, b_1, b_2, \dots, b_r, a_1)$  — его участок от  $v$  до первой существенной точки. Так как  $b_1$  — не существенная точка, то существует путь из  $v$  в  $a_1$ , не проходящий через  $b_1$ , и пусть  $b_h$  — первая из точек  $\{b_i\}$ , которая принадлежит этому пути. Если  $b_h = a_1$  — то это означает, что существует хотя бы два пути из занятых вершин из  $v$  в  $a_1$ . Пусть  $b_h \neq a_1$ . Это означает, что существуют два пути из  $v$  в  $a_1$ , совпадающие на участке от  $b_h$  до  $a_1$  и не пересекающиеся на участке от  $v$  до  $b_h$ .  $b_h$  не существенная точка, а следовательно, существует путь из  $v$  в  $a_1$ , не проходящий через  $b_h$ . Из этого пути и двух ранее построенных образуем два новых пути из  $v$  в  $a_1$ , которые не пересекаются до точки  $l$ , где  $l \geq k+1$  и совпадают на участке  $b_l, b_{l+1}, \dots, b_r, a_1$ . Лемма доказана.

Пусть  $a_1 \in S_{i_1}(v)$ ;  $a_2 \in S_{i_2}(v)$ ,  $\dots$ ,  $a_m \in S_{i_m}(v)$ . Положим  $\xi_1 = i_1$ ;  $\xi_2 = \max(i_2 - i_1, 0)$ ,  $\dots$ ,  $\xi_m = \max(i_m - i_{m-1}, 0)$ . Пусть  $d_1, d_2, \dots, d_k$  — натуральные числа и  $\sum_{l=1}^k d_l \leq n$ .

Лемма 6.3. Существует такое  $\alpha_2 > 0$ , не зависящее от  $n$ , что

$$\begin{aligned} P_p(\xi_k > d_k / D_n(v), \xi_1 \leq d_1, \xi_2 \leq d_2, \dots, \xi_{k-1} \leq d_{k-1}) \leq \\ \leq \alpha_2 P_p(D_{d_k}(v)). \end{aligned} \quad (6.9)$$

Докажем сперва лемму 6.3 для случая  $k=1$ , т. е. докажем неравенство

$$P_p(\xi_1 > d_1 / D_n(v)) \leq P_p(D_{d_1}(v)). \quad (6.10)$$

Очевидно следующее вложение множеств  $\{\omega: \xi_1 > d_1; D_n(v)\} \subset \subset \{\omega: \text{существуют пути из занятых вершин из } v \text{ до сферы } S_n(v), \text{ и из } v \text{ до сферы } S_{d_1} \text{ и эти пути не имеют общих вершин}\}$ .

Следуя обозначениям § 5, имеем

$$\begin{aligned} P_p\{\omega: \xi_1 > d_1; D_n(v)\} &\leq P_p\{D_{d_1}(v) \square D_n(v)\} \leq \\ &\leq P_p(D_{d_1}(v)) \cdot P_p(D_n(v)). \end{aligned} \quad (6.11)$$

Здесь мы использовали то, что  $D_{d_1}(v)$  и  $D_n(v)$  — возрастающие события, и вероятность их «раздельной» реализации удовлетворяет неравенству (5.6) из § 5.

Перейдем к доказательству общего случая леммы 6.3, когда  $k > 1$ . Пусть  $\omega' \in \{D_n(v) \cap \xi_1 \leq d_1, \xi_2 \leq d_2, \dots, \xi_{k-1} \leq d_{k-1}\}$  и пусть  $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}$  — первые  $k-1$  существенные точки события  $D_n(v)$  и конфигурации  $\omega'$ . Обозначим через  $B_{k-1}(\omega')$  все занятые вершины графа  $G$ , которые достижимы из  $v$  по путям из занятых вершин, не содержащих вершину  $a_{k-1}$ . Через множество  $[B_{k-1}(\omega')]$  обозначим объединение множества  $B_{k-1}(\omega')$  со множеством граничных свободных вершин, т. е. тех вершин, которые достижимы из множества  $B_{k-1}(\omega')$  за один шаг. Тогда множество всех конфигураций  $\omega \in \{D_n(v) \cap (\xi_1 \leq d_1, \dots, \xi_{k-1} \leq d_{k-1})\}$  разобьется на классы, у которых одинаковая «предыстория»  $[B_{k-1}(\omega')]$ . При этом

$$\begin{aligned} P\{D_n(v) \cap (\xi_1 \leq d_1, \dots, \xi_{k-1} \leq d_{k-1})\} &= \\ &= \sum_{[B_{k-1}]} P_p([B_{k-1}]) \cdot P\{\exists \text{ путь из занятых вершин от } a_{k-1} \end{aligned}$$

до сферы  $S_n(v)$ , не имеющий общих вершин со множеством

$$[B_{k-1}], \quad (6.12)$$

где суммирование ведется по всем возможным «предысториям»  $[B_{k-1}]$ .

Аналогично равенству (6.12), имеем

$$\begin{aligned} P\{\xi_k > d_k \cap (D_n(v), \xi_1 \leq d_1, \xi_2 \leq d_2, \dots, \xi_{k-1} \leq d_{k-1})\} &\leq \\ &\leq \sum_{[B_{k-1}]} P_p([B_{k-1}]) \cdot P\{\exists \text{ путь из занятых вершин от } a_{k-1} \end{aligned}$$

до  $S_n(v)$ ,  $\exists$  путь от  $a_{k-1}$  до  $S_{d_k}(a_{k-1})$  и эти пути не имеют

общих вершин между собой и с  $[B_{k-1}] \leq$

$$\leq \sum_{[B_{k-1}]} P_p([B_{k-1}]) \cdot P\{\{\exists \text{ путь из занятых вершин от } a_{k-1}$$

до  $S_n(v)$ , не имеющих общих вершин с  $[B_{k-1}]\} \square$

$\square \{\exists \text{ путь из } a_{k-1} \text{ до } S_{d_k}(a_{k-1})\} \leq \alpha_2 P_p(D_{d_k}(v)) \times$

$$\times P_p\{D_n(v) \cap (\xi_1 \leq d_1, \xi_2 \leq d_2, \dots, \xi_{k-1} \leq d_{k-1})\}. \quad (6.13)$$

Из неравенства (6.13) автоматически следует утверждение леммы 6.3. При выводе (6.13) мы использовали лемму 6.1 и неравенство (5.6) § 5.

Лемма 6.4. Для любого  $k \leq n$  при  $d_2 P_p D_{[n/k]}(v) \leq 1$ :

$$P_p \{N(D_n(v)) \geq k/D_n(v)\} \geq (1 - \alpha_2 P_p(D_{[n/k]}(v)))^k. \quad (6.14)$$

Доказательство. В обозначениях предыдущей леммы имеем:

$$\begin{aligned} P_p \{N(D_n(v)) \geq k/D_n(v)\} &\geq P_p \{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_k \leq n/D_n(v)\} \geq \\ &\geq P_p \left\{ \bigcap_{i=1}^k \xi_i \leq n/k/D_n(v) \right\} = P_p \{\xi_1 \leq n/k/D_n(v)\} \times \\ &\times P_p \{\xi_2 \leq n/k/D_n, \xi_1 \leq n/k\} \dots P_p \{\xi_k \leq n/k/D_n(v), \\ &\xi_1 \leq n/k \dots \xi_{k-1} \leq n/k\}. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Из леммы 6.3 следует, что каждый из сомножителей правой части неравенства (6.15) не меньше, чем  $(1 - \alpha_2 P_p(D_{[n/k]}(v)))$ . Из леммы 6.4 непосредственно вытекает

Лемма 6.5. Для любого  $k \leq n$

$$E_p \{N(D_n(v))/D_n(v)\} \geq k(1 - \alpha_2 P_p(D_{[n/k]}(v)))^k. \quad (6.16)$$

Вероятность  $P_p(D_n(v))$  не возрастает при росте  $n$ . Поэтому  $\varphi_n(k) = k \cdot P_p(D_{[n/k]}(v))$  при фиксированном  $n$  есть возрастающая функция по  $k$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ). Пусть  $k_n$  определяется из соотношений

$$k_n \cdot P_p(D_{[n/k_n]}(v)) \leq 1; \quad (k_n + 1) \cdot P_p(D_{[n/k_n+1]}(v)) > 1. \quad (6.17)$$

Лемма 6.6. Существует  $d > 0$ , что для всех  $n$

$$E_p \{N(D_n(v))/D_n(v)\} \geq d \cdot k_n. \quad (6.18)$$

Доказательство. В неравенство (6.16) вместо  $k$  подставим  $k_n$ , определяемое из соотношений (6.17); получим

$$\begin{aligned} E_p \{N(D_n(v))/D_n(v)\} &\geq k_n (1 - \alpha_2 P_p(D_{[n/k_n]}(v)))^{k_n} \geq \\ &\geq k_n (1 - \alpha_2/k_n)^{k_n} \geq k_n d. \end{aligned}$$

Замечание. Если  $p < p_n$ , то  $P_p(D_n(v)) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Из определения числа  $k_n$  следует, что  $k_n = k_n(p) \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ . Следовательно, и  $E_p \{N(D_n(v))/D_n(v)\} \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ . Однако только этого факта недостаточно для доказательства теоремы 6.1. Пока лишь, с учетом неравенства (6.6), для  $\bar{p}_1 < \bar{p}_0 < p_n$  справедливо

$$P_{\bar{p}_1}(D_n(v))/P_{\bar{p}_0}(D_n(v)) \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Продолжим доказательство теоремы 6.1.

Положим

$$f_p(n) = f_p(D_n(v)) = 1/P_p(D_n(v)). \quad (6.19)$$

Лемма 6.7. Для любого  $c_2 > 0$  существует  $a_1 > 0$  и последовательность чисел  $\{n_i\}$  ( $n_i \rightarrow \infty$ ), что

$$f_{\bar{p}_1}(n_i) \geq a_1(n_i)^{c_2}. \quad (6.20)$$

Доказательство. Перепишем неравенство (6.6) в новых обозначениях:

$$f_{\bar{p}_1}(n) \geq f_{\bar{p}_0}(n) \exp \left\{ \alpha \int_0^1 E_{p(t)} \{N(D_n(v)) / D_n(v)\} dt \right\}. \quad (6.21)$$

Пусть  $0 \leq t'' < t' \leq 1$ ;  $p(t') = p'$ ;  $p(t'') = p''$ , где  $p(t)$  определено в (6.3). Тогда  $p_1 \leq p'' < p' \leq p_0$  и  $t' - t'' = p' - p'' / p_0 - p_1$ .

Интегрируя неравенство (6.5) в пределах от  $t'$  до  $t''$  и сделав замену  $P_p(D_n(v))$  на  $f_p(D_n)$ , получаем

$$f_{p''}(n) \geq f_{p'}(n) \exp \left\{ \alpha \int_{t''}^{t'} E_{p(t)} \{N(D_n(v)) / D_n(v)\} dt \right\}. \quad (6.22)$$

Определим рекуррентно три последовательности:  $\{p_i\}$ ;  $\{n_i\}$ ;  $\{f_i\}$ ;  $i = 0, 1, 2, \dots$ .

$$p_0 = \bar{p}_0; \quad f_0 = f_{p_0}(n_0); \quad n_0 - \text{любое натуральное,}$$

$$f_i = f_{p_i}(n_i); \quad n_{i+1} = n_i [f_i]; \quad \Delta_i = p_{i+1} - p_i = c \ln f_i / f_i. \quad (6.23)$$

Тогда  $[f_i]$  является корнем уравнения

$$x = [f_{p_i}(n_{i+1} / x)].$$

По лемме 6 получаем

$$E_{p_i} \{N(D_{n_{i+1}}(v)) / D_{n_{i+1}}(v)\} \geq dk_{n_{i+1}}(p_i) = d \cdot [f_i]. \quad (6.24)$$

Далее из неравенства (6.22) следует

$$f_{i+1} = f_{p_{i+1}}(n_{i+1}) \geq f_{p_i}(n_{i+1}) \exp \{ \alpha \cdot \Delta_i \cdot d [f_i] \} \geq f_i^{c_1}, \quad (6.25)$$

где за счет выбора константы  $c$  в (6.23) можно добиться сколь угодно большого  $c_1$ . Отметим, что при выводе (6.25) мы использовали тот факт, что для  $p'' < p'$  справедливо неравенство

$$k_{p''}(D_n(v)) \geq k_{p'}(D_n(v)) \text{ при любом } n.$$

Выбрав  $c_1$  достаточно большим, получаем сходящийся ряд  $\sum_{i=1}^{\infty} \Delta_i$ .

Взяв  $n_0$  достаточно большим, что приводит к тому, что и  $f_0$  достаточно велико, добиваемся того, что  $\sum_{i=1}^{\infty} \Delta_i < \bar{p}_0 - \bar{p}_1$ , т.е. все

$p_i \in [\bar{p}_1, \bar{p}_0]$ .

Из (6.23) и (6.25) следует:  $n_m = [f_{m-1}] \cdot [f_{m-2}] \dots [f_0] \cdot n_0$ ;  $f_m \geq f_{m-1}^{c_1-1} \cdot f_{m-2}^{c_1-1} \dots f_1^{c_1-1} \cdot f_0$ . Поскольку  $f_{\bar{p}_1}(n) \geq f_{p_m}(n)$  при любом  $n$ , то можно указать такое  $a$ , что

$$f_{\bar{p}_1}(n_i) \geq f_{p_i}(n_i) \geq a_1(n_i)^{c_1-1}. \quad (6.26)$$

Лемма 6.7 доказана.

Хотя основные технические трудности в доказательстве теоремы 6.1 можно считать преодоленными, нам еще необходимо устранить недостаток неравенства (6.20).

Оно доказано лишь для некоторой подпоследовательности  $\{n_i\}$  ( $n_i \rightarrow \infty$ ).

Лемма 6.8. Для любого  $\gamma_1 \in (0, 1)$  можно указать такое  $a_2 > 0$ , что

$$f_{\bar{p}_1}^-(n) > a_2 n^{\gamma_1}. \quad (6.27)$$

Доказательство. Пусть  $\{p_i\}$ ,  $\{n_i\}$ ,  $\{f_i\}$  — уже введенные ранее последовательности и  $\lim_{i \rightarrow \infty} p_i = p > \bar{p}_1$ . Возьмем  $n$  такое, что  $n_{m-1} \leq n < n_m$ . Выпишем последовательность очевидных неравенств

$$f_{\bar{p}_1}^-(n) \geq f_{\bar{p}}^-(n) \geq f_{p_{m-1}}^-(n) \geq f_{p_{m-1}}(n_{m-1}) = f_{m-1}. \quad (6.28)$$

Учитывая неравенство (6.26), получаем

$$f_{m-1}^{c_1} = f_{m-1}^{c_1-1} \cdot f_{m-1} \geq a_1 \cdot f_{m-1}^{c_1-1} \cdot n_{m-1}^{c_1-1} = a_1 (f_{m-1} \cdot n_{m-1})^{c_1-1} \geq a_1 \cdot n_m^{c_1-1},$$

$$f_{m-1} \geq a_1^{1/c_1} \cdot n_m^{(c_1-1)/c_1},$$

откуда следует, что

$$f_{\bar{p}_1}^- \geq f_{\bar{p}}^-(n) \geq f_{m-1} \geq a_1^{1/c_1} \cdot n_m^{(c_1-1)/c_1} \geq a_1^{1/c_1} \cdot n^{(c_1-1)c_1}. \quad (6.29)$$

Учитывая, что за счет выбора начального  $n_0$  можно добиться сколь угодно большого  $c_1$  (лемма 6.7), из неравенства (6.29) следует утверждение леммы 6.8.

Лемма 6.9. Существуют такие  $\alpha_2, \gamma_2 > 0$ , что

$$f_{\bar{p}_1}^-(n) \geq \exp\{\alpha_2 \cdot n^{\gamma_2}\}. \quad (6.30)$$

Доказательство. Пусть  $\bar{p} = \lim_{i \rightarrow \infty} p_i$ , как и в лемме 6.8, и  $\bar{p}_1 > \bar{p}$ . Тогда неравенство (6.22) можно переписать

$$f_{\bar{p}_1}^-(n) \geq f_{\bar{p}}^-(n) \exp\left\{\alpha \int_{\bar{p}}^1 E_{p(t)}\{N(D_n(v))/D_n(v)\} dt\right\}. \quad (6.31)$$

Оценим подынтегральную функцию в (6.31) при  $p(t) \in (\bar{p}, \bar{p}_1)$

$$E_{(t)}\{N(D_n(v))/D_n(v)\} \geq d \cdot k_n(p(t)) \geq d \cdot k_n(\bar{p}),$$

где  $k_n(\bar{p})$  определено в (6.17). Из (6.17) также следует, что

$$k_n(\bar{p}) + 1 > f_{\bar{p}}^- \left[ \frac{n}{k_n(\bar{p}) + 1} \right] \geq a_2 \left[ \frac{n}{k_n(\bar{p}) + 1} \right]^{\gamma_1}. \quad (6.32)$$

Отсюда получаем, что для некоторого  $\beta > 0$   $k_n(\bar{p}) \geq \beta \cdot n^{\gamma_1/(1+\gamma_1)}$ . Таким образом,

$$f_{\bar{p}_1}^-(n) \geq f_{\bar{p}}^-(n) \exp\{\alpha \cdot d \cdot \beta \cdot n^{\gamma_1/(1+\gamma_1)}\}.$$

Положив  $\gamma_2 = \gamma_1 / (\gamma_1 + 1)$ ,  $\alpha_2 = \alpha \cdot d \cdot \beta$ , завершаем доказательство леммы 6.9.

Проведя аналогичные выкладки, как и в лемме 6.9, но уже используя неравенство (6.30), вместо неравенства (6.27), доказываем следующую лемму.

Лемма 6.10. Существует такое  $\alpha_3 > 0$ , что

$$f_{p_1}^-(n) \geq \exp\{\alpha_3 n / \ln n\}, \quad (6.33)$$

или, что то же самое,

$$P_{p_1}^-(D_n(v)) \leq \exp\{-\alpha_3 n / \ln n\}. \quad (6.34)$$

Теорема 6.1 доказана.

Прямое доказательство теоремы 6.2 мы опускаем. Оно будет следовать из теоремы 6.3, так как известно (см., например, [45]), что если  $p < p_T$ , то для распределения «хвостов» размера кластера существуют экспоненциальные оценки.

Доказательство теоремы 6.3. Из условия III следует, что можно указать такое  $\gamma_2 \in (0, 1)$  и такое  $N_1$ , что при всех  $n > N_1$   $|R_n(v)| < \exp\{n^{\gamma_2}\}$  для любого  $v \in V$ . Очевидна следующая цепочка неравенств

$$P_p(D_n(v)) \geq P_p(|W(v)| > |R_n(v)|) \geq P_p(|W(v)| > \exp\{n^{\gamma_2}\}). \quad (6.35)$$

Таким образом,

$$P_p(|W(v)| > l) \leq P(D_{[(\ln l)^{1/\gamma_2}]}(v)).$$

По теореме 6.1 для любого  $p < p_H$

$$\begin{aligned} P_p(|W(v)| > l) &\leq P_p(D_{[(\ln l)^{1/\gamma_2}]}(v)) < \\ < \exp\{-\alpha (\ln l)^{1/\gamma_2} / (1/\gamma_2) \ln(\ln l)\} = \exp\{-\alpha \gamma_2 (\ln l)^{1/\gamma_2} / \ln(\ln l)\}. \end{aligned} \quad (6.36)$$

Из этого неравенства следует для  $p < p_H$  существование математического ожидания

$$E_p\{|W(v)|\} = \sum_{l=1}^{\infty} l \cdot P\{|W(v)| = l\} < \infty, \quad (6.37)$$

что и доказывает соотношение  $p_T = p_H$ .

Замечание 6.1. Условие III для рассматриваемых графов, введенное в начале параграфа, можно ослабить. Например, потребовать, чтобы  $|R_n(v)| < \exp\{\beta n / \ln n\}$ , для некоторого  $\beta > 0$ . Однако совсем избавиться от условия III пока не удастся.

Замечание 6.2. Основное неравенство (6.1) (теорема 6.1) также можно усилить, но доказательство чистого экспоненциального убывания для  $P_p\{D_n(v)\}$  получить не удалось.

Замечание 6.3. Условия I и II в теореме 6.3 являются существенными. Так, в [56] приведен пример не удовлетворяющего этим условиям графа, для которого  $p_T = 1/2$ , а  $p_H = 1$ .

Теорема 6.3, доказанная нами для однопараметрического случая, обобщается на многопараметрический. Пусть  $H$  и  $T$  — множества, введенные в § 1.

Теорема 6.4. Пусть граф  $G$  удовлетворяет условиям I, II, III, тогда

$$[H] = [T], \quad (6.38)$$

где  $[\cdot]$  — замыкание множества.

Доказательство теоремы 6.4 мы опускаем. Идеино оно повторяет доказательство теоремы 6.1 и 6.3.

## § 7. Другие перколяционные характеристики

Кроме критического значения вероятности  $p = p_H = p_T = p_S$ , во многих работах активно исследуются структура бесконечного кластера, а также другие перколяционные характеристики, описывающие распределение размеров конечного кластера и поведение функции плотности бесконечного кластера  $\theta(p) = P_p\{|W| = \infty\}$ .

Харрис [42] доказал, что для квадратной решетки при  $p > p_H$  почти наверное (п. н.) существует только один бесконечный кластер; это доказательство распространяется на любой мозаичный граф, у которого существует дуальный граф. Ньюман и Шульман [47, 48] показали, что число бесконечных кластеров для периодических решеток в  $R^d$  при  $p > p_H$  п. н. равняется единице или бесконечности. Они же исследовали плотностные свойства бесконечных кластеров в случае, когда реализуется бесконечное число таких кластеров. Имеются эвристические аргументы в пользу того, что в высоких размерностях ( $d \geq 6$ ) вероятность реализации бесконечного числа бесконечных кластеров положительна.

В [34] доказано, что разность между функцией  $\theta(p)$  в точке  $p$  и левым ее пределом в этой точке равна вероятности того, что фиксированный узел принадлежит бесконечному кластеру, причем сам этот кластер (как подграф рассматриваемого графа) имеет критическую вероятность, равную единице. Отсюда вытекает, что если при  $p > p_H$  вероятность реализации бесконечного числа бесконечных кластеров равна нулю, то функция  $\theta(p)$  непрерывна.

Кестен [45] доказал, что если граф, вложенный как решетка в  $R^2$ , удовлетворяет некоторому условию симметрии, является мозаичным и имеет дуальный граф, то функция  $\theta(p)$  бесконечно дифференцируема при  $p > p_H$ .

Важнейшими характеристиками поведения функций  $\theta(p)$  и  $E_p\{|W| \mid |W| < \infty\}$  вблизи точки  $p = p_T = p_H$  являются критические индексы  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\gamma'$ , задаваемые соотношениями

$$\theta(p) = P_p\{|W| = \infty\} \sim C(p - p_H)^\beta \text{ при } p \searrow p_H,$$

$$E_p\{|W|\} \sim C_-(p_H - p)^{-\gamma} \text{ при } p \nearrow p_H,$$

$$E_p\{|W| \mid |W| < \infty\} \sim C_+(p - p_H)^{-\gamma'} \text{ при } p \searrow p_H;$$

или, что более точно,

$$\beta = \lim_{p \searrow p_H} \frac{\ln \theta(p)}{\ln(p - p_H)},$$

$$\gamma = \lim_{p \nearrow p_H} \frac{\ln E_p\{|W|\}}{\ln(p_H - p)},$$

$$\gamma' = \lim_{p \searrow p_H} \frac{\ln E_p\{|W| \mid |W| < \infty\}}{\ln(p - p_H)}$$

(отметим, что даже существование пределов отнюдь не является доказанным).

Кестен [45] для квадратной решетки, а также для задачи связей на квадратной решетке доказал наличие таких констант  $c_1, c_2, c_3, c_4, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$ , что

$$c_1(p - p_H)^{\beta_1} \leq \theta(p) \leq c_2(p - p_H)^{\beta_2} \text{ при } p > p_H,$$

$$c_3|p - p_H|^{-\gamma_1} \leq E_p\{|W| \mid |W| < \infty\} \leq c_4|p - p_H|^{-\gamma_2} \text{ при } p \neq p_H.$$

Другие оценки критических индексов см. в [30, 38, 39].

## § 8. Непрерывные модели перколяции

Зададимся некоторым семейством множеств  $\mathcal{D} = \{D(\alpha)\}_{\alpha \in A}$ , где  $A$  — некоторое пространство параметров с вероятностной мерой  $\mu$  на стандартной борелевской  $\sigma$ -алгебре  $\sigma(A)$ . Относительно всех элементов  $D(\alpha)$  предположим выполнение следующих условий: 1)  $D(\alpha)$  — компакт в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^d$ ; 2)  $D(\alpha)$  звездчато относительно нуля, т. е.  $\forall x \in D(\alpha)$ , сегмент  $[0, x]$  также принадлежит  $D(\alpha)$ . Элементы  $\mathcal{D}$  мы будем называть дефектами. Из определения следует, что все множества  $D(\alpha)$  суть связные. Через  $D(x, \alpha)$  обозначим дефект, полученный параллельным переносом  $D(\alpha)$  на вектор  $x \in \mathbb{R}^d$ ; при этом  $x$  будем называть центром дефекта  $D(x, \alpha)$ .

Рассмотрим в  $\mathbb{R}^d$  множество точек, образующим пуассоновское поле интенсивности  $\lambda$ . Каждой такой точке  $x$  независимо от других припишем дефект  $D(x, \alpha)$  с центром в этой точке. Параметр  $\alpha$  определяется вероятностным распределением на  $A$ , так что  $\mu$ -вероятность иметь в фиксированной точке  $x_0$  пуассоновского поля дефект  $D(x_0, \alpha)$ , где  $\alpha \in B \in \sigma(A)$ , равна  $\mu(B)$ .

Простейшим примером непрерывной задачи является задача шаров. Дефектами здесь являются шары фиксированного радиуса, центры которых образуют в  $\mathbb{R}^d$  пуассоновское поле. Пространство  $A$  в этом случае тривиально. Другим примером является

задача шаров случайного радиуса: радиус распределен с плотностью  $\rho(r)$ , так что  $\int_0^{\infty} \rho(r) dr = 1$ . Здесь  $A = [0, \infty)$ , а вероятностная мера задается обобщенной функцией  $\rho(r)$ . Еще один пример — задача со случайной ориентацией дефектов. Дефекты — конгруэнтные между собой фигуры. Помимо центра, свяжем с дефектом единичный вектор  $\vec{n}$  — направление. Рассматривается задача, в которой центры образуют пуассоновский ансамбль в  $\mathbb{R}^d$ , а направления распределены с плотностью  $\varphi(\vec{n})$ , где  $\varphi$  — обобщенная функция на сфере  $S^{d-1}$  и  $\int_{S^{d-1}} \varphi(\vec{n}) d\vec{n} = 1$ .

Назовем путем  $S$  множество дефектов  $\{D_0, D_1, \dots\}$ , удовлетворяющее условию  $D_i \cap D_{i+1} \neq \emptyset$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$ . Два дефекта  $D'$  и  $D''$  называются связанными, если существует конечный путь  $\{D_0, D_1, \dots, D_n\}$  такой, что  $D_0 = D'$  и  $D_n = D''$ . Максимальное по включению множество связанных дефектов называется кластером. Максимальность понимается в том смысле, что все дефекты, связанные хотя бы с одним дефектом из этого множества, также принадлежат этому множеству. Мощностью  $|W|$  кластера  $W$  называется количество входящих в него дефектов. Кластер называется бесконечным, если  $|W| = \infty$ .

Разобьем  $\mathbb{R}^d$  на равные кубы  $K_\xi$  с ребром длины  $\xi$ ,  $\theta_\xi(\lambda)$  — вероятность того, что существует точка  $x \in K_\xi$ , принадлежащая бесконечному кластеру. Из однородности следует, что  $\theta_\xi(\lambda)$  не зависит от положения  $K_\xi$  в  $\mathbb{R}^d$ . Пусть  $\lambda_H = \sup \{\lambda \mid \theta_\xi(\lambda) = 0\}$ . Тогда, поскольку число кубов счетно, то при  $\lambda < \lambda_H$  бесконечного кластера п. н. нет, и при  $\lambda > \lambda_H$  бесконечный кластер п. н. существует. При этом говорят, что имеет место протекание или перколяция. Заметим, что  $\theta_\xi(\lambda) = 0$  влечет  $\theta_\eta(\lambda) = 0$  для всех  $\eta \leq \xi$ . Поскольку любой куб  $K_\zeta$  для  $\zeta > \xi$  содержится в объединении конечного числа кубов  $K_\xi$ , то  $\theta_\xi(\lambda) = 0$  влечет и  $\theta_\zeta(\lambda) = 0$  для всех  $\zeta > \xi$ . Следовательно, определение  $\lambda_H$  от  $\xi$  не зависит. В частности,

$$\lambda_H = \sup \{\lambda \mid \theta(\lambda, x) = 0\},$$

где  $\theta(\lambda, x)$  — вероятность того, что фиксированная точка  $x \in \mathbb{R}^d$  принадлежит бесконечному кластеру. Примем последнее равенство за определение  $\lambda_H$ .

Назовем пересечением параллелепипеда  $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_d, b_d]$  в  $i$ -м направлении событие, при котором существует путь  $\{D_1(x_1), \dots, D_n(x_n)\}$  такой, что  $[x_i]_i \leq a_i$ ,  $[x_n]_i \geq b_i$  и  $\bigcup_{j=1}^n D_j(x_j)$  содержится в полосе  $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_{i-1}, b_{i-1}] \times \mathbb{R} \times [a_{i+1}, b_{i+1}] \times \dots \times [a_d, b_d]$  ( $[x]_i$  обозначает  $i$ -ю компоненту вектора  $x \in \mathbb{R}^d$ ).

Введем также следующие величины:

$$\lambda_T = \sup \{ \lambda | E_\lambda \{ |W(x)| \} < \infty \},$$

где  $|W(x)|$  — мощность кластера  $W$ , содержащего точку  $x$ , и

$$\lambda_S = \sup \{ \lambda | \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(n, \lambda, i) = 0, 1 \leq i \leq d \},$$

где  $\sigma(n, \lambda, i)$  — вероятность пересечения в  $i$ -м направлении параллелепипеда  $[0, 3n] \times [0, 3n] \times \dots \times [0, n] \times \dots \times [0, 3n]$  (множитель  $[0, n]$  соответствует  $i$ -му координатному вектору).

Пусть  $L(\vec{r})$  —  $\mu$ -вероятность того, что точка, сдвинутая от центра дефекта на вектор  $\vec{r}$ , накрывается этим дефектом.  $V = \int L(\vec{r}) d\vec{r}$  — средний объем дефекта. Пуассоновская вероятность отсутствия центра дефекта в элементарном объеме  $d\vec{r}$  равна  $\exp\{-\lambda d\vec{r}\}$ . Поэтому вероятность точки  $\vec{s}$  не быть накрытой дефектом с центром в  $d\vec{r}$  вблизи точки  $\vec{r}$  равна  $\exp\{-L(\vec{s} - \vec{r}) \lambda d\vec{r}\}$ . Вероятность того, что точка  $\vec{s}$  не будет накрыта ни одним дефектом, следовательно, равна

$$\exp\left\{ \int -L(\vec{s} - \vec{r}) \lambda d\vec{r} \right\} = \exp\left\{ -\lambda \int L(\vec{r}) d\vec{r} \right\} = \exp\{-\lambda V\}.$$

Таким образом, критические величины могут быть описаны также в терминах объемной концентрации дефектов  $C = 1 - \exp\{-\lambda V\}$ .

**8.1. Теорема о критических точках.** В этом разделе будет доказано, что для весьма широкого класса моделей критические концентрации  $\lambda_T, \lambda_S, \lambda_H$  совпадают. При доказательстве мы будем использовать аналогичное равенство ( $\rho_T = \rho_S = \rho_H$ ) для периодических решеток в  $R^d$ , полученное выше в § 6.

Мы приведем вначале доказательство для простейшей непрерывной модели — задачи шаров равного радиуса, а затем поясним, как оно обобщается на более сложные случаи.

**Теорема 8.1.** Для задачи конгруэнтных шаров в  $R^d$  справедливо соотношение  $\lambda_T = \lambda_S = \lambda_H$ .

**Доказательство.** Обозначим через  $\lambda_H(l), \lambda_T(l), \lambda_S(l)$  критические значения плотности пуассоновского поля для задачи шаров диаметра  $l$ . Обозначим также  $\lambda_H = \lambda_H(1), \lambda_T = \lambda_T(1), \lambda_S = \lambda_S(1)$ . Легко видеть, что  $\lambda_H(l) = \lambda_H l^{-d}, \lambda_T(l) = \lambda_T l^{-d}, \lambda_S(l) = \lambda_S l^{-d}$ . Поэтому достаточно рассмотреть случай  $l = 1$ .

Идея доказательства будет состоять в том, чтобы представить непрерывную задачу протекания как предел дискретных, для которых аналогичное равенство выполнено. Для этого свяжем с ансамблем центров дефектов, распределенных в  $R^d$  по закону Пуассона с параметром  $\lambda$ , распределение дефектных узлов в некоторой дискретной перколяционной задаче. Рассмотрим в  $R^d$  граф  $G_n$

с множеством вершин  $V_n = \{(k_1/n, k_2/n, \dots, k_d/n) \mid k_i \in \mathbb{Z}, i = 1, \dots, d\}$ . Пусть  $x_0 = (k_1/n, \dots, k_d/n)$ . Обозначим через  $\Omega_n(x_0)$  множество  $[(k_1 - 1/2)/n, (k_1 + 1/2)/n) \times \dots \times [(k_d - 1/2)/n, (k_d + 1/2)/n)$ . Две вершины  $x_0$  и  $y_0$  графа  $G_n$  соединены ребром, если  $\inf_{x \in \Omega_n(x_0), y \in \Omega_n(y_0)} \|x - y\| \leq 1$ , где  $\|\cdot\|$  — евклидова норма в  $\mathbb{R}^d$ .

Определим на  $G_n$  перколяционную задачу следующим образом: вершина  $x_0 \in V_n$  дефектна, если хотя бы один центр дефекта непрерывной задачи содержится в  $\Omega_n(x_0)$ . Тем самым каждая вершина дефектна с вероятностью  $p = 1 - \exp\{-\lambda/n^d\} = f_n(\lambda)$  и не-дефектна с вероятностью  $1 - p$ , причем для различных вершин  $x_0$  и  $y_0$  эти события независимы, так как  $\Omega_n(x_0) \cap \Omega_n(y_0) = \emptyset$ . Каждому дефекту  $D(x)$  с центром в точке  $x$  соответствует, таким образом, некоторая дефектная вершина  $x_0 \in V_n$  такая, что  $x \in \Omega_n(x_0)$ . Такая вершина всегда существует и единственна. Тем самым определено отображение  $\pi$  центров дефектов непрерывной задачи на множество дефектных вершин графа  $G_n$ .

Рассмотрим два пересекающихся дефекта с центрами в точках  $x$  и  $y$ . Тогда  $\|x - y\| \leq 1$ , и поэтому соответствующие им дефектные вершины графа либо совпадают, либо соединены ребром по построению  $G_n$ . Таким образом, каждому кластеру  $W^{(c)}$  в непрерывной задаче соответствует кластер  $W^{(d)}$  в дискретной (будем называть их для краткости  $c$ -кластерами и  $d$ -кластерами). Поскольку в любом конечном объеме п. н. содержится конечное число центров дефектов, то для каждой реализации пуассоновского поля бесконечному кластеру в непрерывной задаче отвечает бесконечный кластер на  $G_n$ . Следовательно, протекание в непрерывной задаче влечет и протекание на  $G_n$ . Поэтому для любых  $n$  выполнено неравенство  $p_H(G_n) \leq f_n(\lambda_H)$ . Поскольку  $f_n(\lambda)$  возрастающая, то существует обратная функция  $f_n^{-1}(p)$  и  $\lambda_H \geq f_n^{-1}(p_H(G_n))$ .

Докажем, что подобное неравенство выполнено и для  $\lambda_T$ . Нами было определено отображение  $\pi$  центров дефектов на множество дефектных вершин графа  $G_n$ . Рассмотрим полный прообраз  $\pi^{-1}(W^{(d)})$  для каждого кластера  $W^{(d)}$  на  $G_n$ . Все дефекты непрерывной задачи распадаются на непересекающиеся классы, причем по построению  $G_n$  никакой  $c$ -кластер не принадлежит более чем одному классу. Тем самым множество  $c$ -кластеров также распалось на непересекающиеся классы. Обозначим через  $\Gamma(W^{(c)})$  такой класс, содержащий кластер  $W^{(c)}$ . По определению  $|\Gamma| = \sum_{W^{(c)} \in \Gamma} |W^{(c)}|$ . Таким образом, имеем всегда  $|W^{(c)}| \leq |\Gamma(W^{(c)})|$ .

Значит,  $E\{|W^{(c)}|\} \leq E\{|\Gamma(W^{(c)})|\}$ . Пусть  $D(k, l) = D(k, l, x_0, G_n)$  — множество связанных на  $G_n$  подмножеств  $W \subseteq V_n$ , содержащих вершину  $x_0$  и таких, что  $|W| = k$ ,  $|\partial W| = l$ . Пусть элементы

множества  $D(k, l)$  суть  $W_1(k, l), W_2(k, l), \dots, W_{d(k, l)}(k, l)$ , где  $d(k, l) = |D(k, l)|$ . Рассмотрим  $d$ -кластер  $W^{(d)}$ , содержащий вершину  $x_0$ , и обозначим через  $\Gamma = \pi^{-1}(W^{(d)})$  его полный прообраз. Пусть  $A_i(k, l)$  — событие, состоящее в том, что  $W^{(d)} = W_i(k, l)$ . Все такие события несовместны, и

$$\bigcup_{k, l} \bigcup_{i=1}^{d(k, l)} A_i(k, l) = I,$$

где  $I$  — событие вероятности 1. Тогда по формуле полного математического ожидания

$$\begin{aligned} E\{|\Gamma|\} &= \sum_{k, l} \sum_{i=1}^{d(k, l)} E\{|\Gamma| / A_i(k, l)\} \cdot P\{A_i(k, l)\} = \\ &= \sum_{k, l} \sum_{i=1}^{d(k, l)} E\left\{\sum_{j=1}^k \xi_j / \forall j: \xi_j > 0\right\} \cdot P\{W_i(k, l)\}, \end{aligned}$$

где  $\xi_j$  — полный прообраз  $j$ -й вершины  $d$ -кластера  $W_i(k, l)$ . Заметим, что  $\xi_j$  — независимые одинаково распределенные пуассоновские случайные величины, откуда

$$\begin{aligned} E\{\xi_1 + \dots + \xi_k / \xi_1 > 0, \dots, \xi_k > 0\} &= kE\{\xi_1 / \xi_1 > 0\} = \\ &= k \frac{E\xi_1}{P\{\xi_1 > 0\}} = kv, \end{aligned}$$

где  $v = \frac{\lambda}{n^d} \left(1 - \frac{\lambda}{n^d}\right)^{-1}$ . Тогда

$$\begin{aligned} E\{|\Gamma|\} &= \sum_{k, l} \sum_{i=1}^{d(k, l)} kvP\{W_i(k, l)\} = \\ &= \sum_{k, l} kvd(k, l) (f_n(\lambda))^k (1 - f_n(\lambda))^l = vE\{|W^{(d)}|\}. \end{aligned}$$

Таким образом,  $E\{|W^{(c)}|\} \leq vE\{|W^{(d)}|\}$ . Тогда  $\lambda_T \geq f_n^{-1}(p_T(G_n))$  для всех  $n$ .

Аналогично легко убедиться в том, что если есть протекание в 1-м направлении параллелепипеда  $B_{\xi}$  в непрерывной задаче, то есть протекание в 1-м направлении по  $G_n$  параллелепипеда  $[1/2n, \xi - 1/2n] \times [1/2n, 3\xi + 1/2n - 1] \times \dots \times [1/2n, 3\xi + 1/2n - 1]$ , а значит, и параллелепипеда  $[1/2n, \xi - 1/2n] \times [1/2n, 3(\xi - 1/2n)] \times \dots \times [1/2n, 3(\xi - 1/2n)]$ . Тогда поскольку все направления равнозначны,  $p_S(G_n) = \sup_{\xi \rightarrow \infty} \{p \mid \lim_{\xi \rightarrow \infty} P_p \text{ (есть протекание } B_{\xi} \text{ по } G_n) = 0\} = \sup_{\xi \rightarrow \infty} \{p \mid \lim_{\xi \rightarrow \infty} P_p \text{ (есть протекание } B_{\xi-1/n} \text{ по } G_n) = 0\} \leq \leq f_n(\lambda_S)$ . Стало быть, для всех  $n$  имеем  $\lambda_S \geq f_n^{-1}(p_S(G_n))$ . Положим

$$1 \leq L_n = \sup \{\|x - y\| \mid x \in \Omega_n(x_0), y \in \Omega_n(y_0), x_0 G_n y_0\} \leq 1 + 2\sqrt{d/n},$$

где  $d$  — размерность пространства, и опишем вокруг центров дефектов исходной задачи шары диаметра  $l_n$ . Мы получили, таким образом, реализацию непрерывной задачи с дефектами  $\tilde{D}(x)$  — шарами диаметра  $l_n$ . Заметим, что если имеется кластер  $W^{(d)}$  на  $G_n$ , то соответствующее ему множество дефектов

$\bigcup_{x \in \pi^{-1}(W^{(d)})} \tilde{D}(x)$  также составляет кластер  $\tilde{W}^{(c)}$  по выбору  $l_n$ ,

причем  $|\tilde{W}^{(c)}| \gg |W^{(d)}|$ . Отсюда аналогичными рассуждениями легко показать, что  $\lambda_n(l_n) \leq f_n^{-1}(p_H(G_n))$ ,  $\lambda_T(l_n) \leq f_n^{-1}(p_T(G_n))$ ,  $\lambda_S(l_n) \leq f_n^{-1}(p_S(G_n))$  для всех  $n$ .

Таким образом, для каждой критической точки имеем цепочку неравенств:  $\lambda_H \geq f_n^{-1}(p_H(G_n)) \geq \lambda_H l_n^{-d}$ ;  $\lambda_T \geq f_n^{-1}(p_T(G_n)) \geq \lambda_T l_n^{-d}$ ;  $\lambda_S \geq f_n^{-1}(p_S(G_n)) \geq \lambda_S l_n^{-d}$ .

Поскольку  $\lim_{n \rightarrow \infty} l_n = 1$ , то существуют пределы  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n^{-1}(p_H(G_n)) = \lambda_H$ ;  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n^{-1}(p_T(G_n)) = \lambda_T$ ;  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n^{-1}(p_S(G_n)) = \lambda_S$ . Так как для всех графов  $G_n$  имеем (см. § 6)  $p_T(G_n) = p_S(G_n) = p_H(G_n)$ , то следовательно, для всех  $n$  выполнено  $f_n^{-1}(p_T(G_n)) = f_n^{-1}(p_S(G_n)) = f_n^{-1}(p_H(G_n))$ , откуда  $\lambda_T = \lambda_S = \lambda_H$ , что и требовалось доказать.

**З а м е ч а н и е 8.2.** Очевидно, соотношение  $\lambda_T = \lambda_S = \lambda_H$  доказывается тем же способом для всех тех задач, в которых дефекты суть конгруэнтные одинаково ориентированные фигуры ненулевого  $d$ -мерного объема.

Перейдем к рассмотрению более общего случая, а именно случая, когда множество форм дефекта конечно.

**Теорема 8.3.** Для непрерывных задач с множеством дефектов  $\{D_i\}_{i=1, \dots, m}$  выполнено соотношение  $\lambda_T = \lambda_S = \lambda_H$ .

Доказательство аналогично доказательству теоремы 8.1 с той разницей, что рассматриваются графы с  $m$  классами вершин; вершины  $i$ -го класса соответствуют дефектам  $D_i$  и имеют вероятность занятости  $p_i$ .

Для дальнейшего обобщения нам понадобится следующее определение.

**Определение 8.4.** Пусть в одном и том же пространстве  $\mathbb{R}^d$  рассматриваются две непрерывные задачи:  $(Z_1)$  — с множеством дефектов  $\{D_1(a_1)\}_{a_1 \in A_1}$  и  $(Z_2)$  — с множеством дефектов  $\{D_2(a_2)\}_{a_2 \in A_2}$ . В каждой задаче тип дефекта в фиксированной точке пуассоновского поля определяется вероятностной мерой  $\mu_i$  на стандартной  $\sigma$ -алгебре  $\sigma(A_i)$  подмножеств  $A_i$ ,  $i=1, 2$ . Пусть на  $\sigma(A_1)$  задан гомоморфизм  $\Phi: \sigma(A_1) \rightarrow \sigma(A_2)$ , т. е. отображение со свойствами:  $\Phi(\Omega_1 \cup \Omega_2) = \Phi(\Omega_1) \cup \Phi(\Omega_2)$  и  $\Phi(\Omega_1 \cap \Omega_2) = \Phi(\Omega_1) \cap \Phi(\Omega_2) \forall \Omega_1, \Omega_2 \in \sigma(A_1)$ . Будем говорить, что задача  $(Z_2)$  мажорирует задачу  $(Z_1)$  (обозначение:  $(Z_1) \leq (Z_2)$ ), если для любых  $\Omega \in \sigma(A_1)$  имеет место  $\mu_1(\Omega) \leq \mu_2(\Phi(\Omega))$  и  $\bigcap_{a_1 \in \Omega} D_1(a_1) \subseteq \bigcup_{a_2 \in \Phi(\Omega)} D_2(a_2)$ .

Замечание 8.5. Пусть задача  $(Z_2)$  мажорирует задачу  $(Z_1)$  в смысле определения 8.4. Тогда  $\lambda_{cr}^{(1)} \geq \lambda_{cr}^{(2)}$ , где  $\lambda_{cr}^{(i)}$  — одна из критических плотностей  $\lambda_H, \lambda_T, \lambda_S$  для задачи  $(Z_i)$ ,  $i = 1, 2$ .

Определение 8.6. Рассмотрим в  $\mathbb{R}^d$  непрерывную задачу  $(Z)$  с множеством дефектов  $\{D(a)\}_{a \in A}$ , где  $A$  произвольно. Назовем эту задачу аппроксимируемой, если существуют последовательности задач  $(Z'_n): \{D'_n(a)\}_{a \in A_n}$  и  $(Z''_n): \{D''_n(a)\}_{a \in A_n}$  такие, что для всех  $n$  выполнено:

- 1)  $A_n$  конечны;
- 2) при любом  $a \in A_n$  дефект  $D''_n(a)$  получен из  $D'_n(a)$  гомотетией  $\Gamma_{k(n)}$  с постоянным коэффициентом  $k(n) \geq 1$ ;
- 3)  $(Z_n) \leq (Z) \leq (Z''_n)$  в смысле определения 8.4;
- 4) существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} k(n) = 1$ .

Как можно убедиться, очень многие непрерывные задачи являются аппроксимируемыми. Это, например, задачи с непрерывной случайной ориентацией, задача шаров ограниченного случайного радиуса и др. Поэтому итоговая теорема раздела имеет довольно большую общность.

Теорема 8.7. Для аппроксимируемых в смысле определения 8.6 непрерывных задач имеет место соотношение  $\lambda_T = \lambda_S = \lambda_H$ .

Подробное доказательство теорем 8.3 и 8.7 см. в [8].

**8.2. Методы оценок критической концентрации.** Метод поколений. В § 3 был описан метод поколений для дискретных перколяционных задач. Здесь мы перенесем его на непрерывные модели.

Рассмотрим в  $\mathbb{R}^d$  непрерывную задачу протекания, где форма дефекта фиксирована и лишь ориентация может быть случайной. Пусть  $\vec{n}$  — вектор направления дефекта. Ориентация дефекта при фиксированном центре определяется вероятностной мерой  $\mu$  на сфере  $S^{d-1}$ . Ограничимся пока такими мерами, что для двух независимых случайных векторов  $\vec{n}_1$  и  $\vec{n}_2$ , подчиненных распределению на  $S^{d-1}$ , разность  $\vec{n}_2 - \vec{n}_1$  не зависит от  $\vec{n}_1$ . Такие меры мы будем называть симметричными. В частности, равномерное распределение ориентации является симметричным. Фиксированная (неслучайная) ориентация также удовлетворяет определению симметричного распределения.

Назовем дефекты соседними, если они пересекаются. Если распределение ориентации симметрично, то легко видеть, что для любого дефекта математическое ожидание числа его соседей одно и то же и равно  $\lambda B$ , где  $\lambda$  — интенсивность пуассоновского поля центров дефектов,  $B$  — константа для данной задачи.

Выделим некоторый дефект и назовем его дефектом поколения 0. Если мы уже определили дефекты поколения  $0, 1, \dots, k-1$ , то назовем дефектами поколения  $k$  те дефекты, которые соседствуют с дефектами поколениями  $k-1$  и не являются дефектами поколений  $0, 1, \dots, k-1$ . Рассмотрим случайные величины  $\xi_k(\lambda)$  — число дефектов  $k$ -го поколения. Ясно, что  $\xi(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k(\lambda)$  — не что иное, как мощность кластера, содержащего выделенный дефект, а  $E\xi_k(\lambda) = \lambda B^k$ . Поскольку дефекты  $(k+1)$ -го поколения являются соседями дефектов  $k$ -го поколения, то для условного математического ожидания почти наверное справедлива оценка

$$E(\xi_{k+1}(\lambda)/\xi_k(\lambda)) \leq \lambda B \xi_k(\lambda). \quad (8.1)$$

Отсюда вытекает, что  $E\xi_k(\lambda) \leq (\lambda B)^k$  при всех  $k$ . Следовательно, если  $\lambda < 1/B$ , то  $E\xi(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} E\xi_k(\lambda) \leq \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda B)^k = 1/(1-\lambda B) < \infty$ . Согласно определению  $\lambda_T$ , это означает, что

$$\lambda_T \geq 1/B. \quad (8.2)$$

Можно попытаться улучшить этот результат, получив оценку вида  $E(\xi_{k+l}(\lambda)/\xi_k(\lambda)) \leq \gamma(\lambda) \xi_k(\lambda)$  для всех  $k \geq N$ . Тогда, как только  $\gamma < 1$ , имеем  $E\xi < \infty$ , и, следовательно, протекания нет.

Этот метод является общим для всех задач протекания и позволяет получать хорошие нижние оценки даже в тех задачах, для которых единственным пока методом остается метод Монте-Карло. В непрерывных моделях, правда, получение оценок вида  $E(\xi_{k+l}/\xi_k) \leq \gamma \xi_k$  при  $l \geq 2$  связано со значительными техническими трудностями. При  $l=1$  оценки (8.1) и (8.2) можно несколько улучшить.

Пример 8.8. Рассмотрим в  $R^3$  задачу шаров диаметра 1. Здесь объем дефекта  $V = \pi/6$ , а  $B = 4/3 \pi$ . Пусть дефект с центром в точке  $\vec{r}_k$  принадлежит  $k$ -му поколению ( $k \geq 1$ ). Тогда существует дефект  $(k-1)$ -го поколения с центром в некоторой точке  $\vec{r}_{k-1}$ , для которой  $|\vec{r}_k - \vec{r}_{k-1}| \leq 1$ . Центры дефектов  $(k+1)$ -го поколения должны находиться в области точек  $\vec{r}$ , задаваемой неравенствами  $|\vec{r} - \vec{r}_k| \leq 1$ ,  $|\vec{r} - \vec{r}_{k-1}| > 1$ . Объем этой области в  $R^3$  не превышает  $11/12 \pi$ . Поэтому для данной задачи  $E(\xi_{k+1}(\lambda)/\xi_k(\lambda)) \leq 11/12 \pi \lambda \xi_k(\lambda) = 11/16 \lambda B \xi_k(\lambda)$  и

$$\lambda_T \geq \frac{16}{11} \cdot \frac{1}{B}. \quad (8.3)$$

Дальнейшее усиление оценок связано с усложнением метода.

Спектральный метод. Этот метод более общий, чем метод поколений. С его помощью можно получать более точные нижние оценки. Важно также, что он применим ко всем непрерывным моделям.

Напомним, что мы снабжали дефекты параметром  $a$ , который указывал на тип дефекта. Областью изменения параметра было пространство  $A$  с вероятностной мерой. Вместо случайной величины  $\xi_k$  (индекс  $\lambda$  мы будем в дальнейшем опускать) рассмотрим случайную величину  $\eta_k(a) = \xi_k \cdot \theta_k(a)$ , где  $\theta_k(a)$  есть плотность (доля) дефектов  $k$ -го поколения, отмеченных параметром  $a$ . Пусть  $\mathcal{L}_1(A)$  — пространство суммируемых функций на  $A$  с нормой  $\|f\| = \int_A |f(a)| \nu(da)$ . В большинстве задач в качестве  $A$  мы будем выбирать интервал на числовой прямой, а в качестве  $\nu$  — меру Лебега. В некоторых случаях  $A$  будет конечным множеством, а  $\nu$  — считающей мерой. Заметим, что  $\xi_k = \|\eta_k\|$ .

Ищется оценка  $E\eta_1(a) \leq \lambda g(a)$ , где  $g(a)$  не зависит от  $\lambda$  и строится интегральный оператор  $\Omega: \mathcal{L}_1(A) \rightarrow \mathcal{L}_1(A)$  с неотрицательным ядром  $\omega$ , удовлетворяющий при любых  $k$  и  $a$  условию

$$E(\eta_{k+1}(a) | \eta_k) \leq \Omega \lambda [\eta_k](a) = \lambda \int_A \omega(a, b) \eta_k(b) \nu(db). \quad (8.4)$$

Тогда для всякого  $k$  справедлива оценка  $E\eta_k(a) \leq \lambda^k \Omega^{k-1}[g](a)$ , и, следовательно,  $E\xi_k = E|\eta_k| \leq \lambda^k \|\Omega^{k-1}[g]\|$ . Обозначим через  $\sigma$  спектральный радиус оператора  $\Omega$ . Тогда если  $\lambda\sigma < 1$ , то  $E\xi(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} E\xi_k(\lambda) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \|\Omega^{k-1}[g]\| < \infty$ . Поэтому

$$\lambda_T \geq 1/\sigma. \quad (8.5)$$

Отметим, что для интегрального оператора с неотрицательным ядром спектральный радиус совпадает с наибольшим собственным значением (см., например, 10)).

Пример 8.9. Снова рассмотрим задачу шаров диаметра 1. Выберем в качестве параметра  $a$  расстояние от центра данного дефекта до ближайшего центра дефекта предшествующего поколения. Тогда  $A$  есть интервал  $(0, 1]$ . Пусть дефект с центром в точке  $\vec{r}_k$  принадлежит  $k$ -му поколению, а ближайший к нему дефект  $(k-1)$ -го поколения имеет центр в точке  $\vec{r}_{k-1}$ , где  $|\vec{r}_k - \vec{r}_{k-1}| = b$ . Тогда центры дефектов  $(k+1)$ -го поколения, удаленные от  $\vec{r}_k$  на расстояние  $a$ , должны располагаться на поверхности, заданной условиями  $|\vec{r}_k - \vec{r}| = a$ ,  $|\vec{r} - \vec{r}_{k-1}| > 1$ . Эта поверхность в  $\mathbb{R}^3$  имеет площадь  $\pi \frac{a}{b} ((a+b)^2 - 1)$ . Поэтому

$$E(\eta_{k+1}(a) | \eta_k) \leq \lambda \Omega[\eta_k](a) = \lambda \int_{1-a}^1 \pi \frac{a}{b} ((a+b)^2 - 1) \eta_k(b) db.$$

В данном случае спектральный радиус оператора  $\Omega$  оказывается равен  $4\pi/3\sqrt{3} = B/\sqrt{3}$ . Таким образом,  $\lambda_T \geq \sqrt{3}/B$  (ср. с (8.2)). Поскольку здесь  $V = B/8$ , то  $\lambda_T V \geq \sqrt{3}/8$  и  $C_T = 1 - \exp\{-\lambda_T V\} \geq 1 - \exp\{-\sqrt{3}/8\} \approx 0,19467$ .

Покажем, каким образом можно строить оператор  $\Omega$  в более общем случае, когда дефекты могут иметь различную форму или распределение ориентации не является симметричным. Пусть имеется конечное число типов дефектов:  $a_1, \dots, a_n$  и  $p_i$  — вероятность реализации  $i$ -го типа. Обозначим через  $h(a_i, a_j)$  объем области в  $R^d$ , содержащей те векторы  $\vec{r}$ , для которых дефект типа  $a_i$  с центром в  $\vec{r}$  и дефект типа  $a_j$  с центром в  $\vec{0}$  пересекаются. Пусть  $\eta_k(a_i)$  — число дефектов типа  $a_i$  в  $k$ -м поколении. Тогда

$$E(\eta_{k+1}(a_i) | \eta_k(a_1), \dots, \eta_k(a_n)) \leq \lambda \sum_{j=1}^n p_j h(a_i, a_j) \eta_k(a_j).$$

Таким образом, в качестве оператора  $\Omega$  может быть выбран матричный оператор, задаваемый матрицей с элементами  $p_j h(a_i, a_j)$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ).

Пусть теперь тип дефекта задается параметром  $a$ , пробегаящим интервал  $(0, \infty)$ , и  $F(a)$  — функция распределения типа дефекта. В этом случае  $E(\eta_{k+1}(a) | \eta_k) \leq \lambda \int_0^\infty h(a, b) \eta_k(b) dF(b)$  и в качестве  $\Omega$  выступает интегральный оператор.

Пример 8.10. Пусть каждый дефект имеет форму шара, радиус которого — случайная величина с плотностью  $f(a)$ . Тогда  $h(a, b) = 4/3\pi(a+b)^3$ . Оператор  $\Omega$  с таким ядром переводит всякую функцию  $g(b)$  в линейную комбинацию функций  $a^3 f(a)$ ,  $a^2 f(a)$ ,  $a f(a)$  и  $f(a)$ . Поэтому для определения спектрального радиуса  $\Omega$  достаточно рассмотреть в качестве области определения оператора четырехмерное пространство, порожденное этими функциями. Пусть

$$g(b) = \sum_{j=0}^3 c_j b^j f(b), \quad m_i = \int_0^\infty a^i f(a) da = \int_0^\infty a^i dF(a).$$

Тогда

$$\Omega[g](a) = \int_0^\infty \frac{4}{3} \pi (a+b)^3 f(a) g(b) db =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\infty} \frac{4}{3} \pi (a+b)^3 f(a) f(b) \sum_{j=0}^3 c_j b^j db = \\
&= \frac{4}{3} \pi f(a) \sum_{j=0}^3 c_j \int_0^{\infty} (a^3 b^j + 3a^2 b^{j+1} + 3ab^{j+2} + b^{j+3}) f(b) db = \\
&= \frac{4}{3} \pi f(a) \sum_{j=1}^3 c_j (a^3 m_j + 3a^2 m_{j+1} + 3am_{j+2} + m_{j+3}).
\end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что спектральный радиус оператора  $\Omega$  совпадает со спектральным радиусом (наибольшим собственным значением) матрицы

$$4\pi \begin{pmatrix} m_3 & 3m_2 & 3m_1 & m_0 \\ m_4 & 3m_3 & 3m_2 & m_1 \\ m_5 & 3m_4 & 3m_3 & m_2 \\ m_6 & 3m_5 & 3m_4 & m_3 \end{pmatrix},$$

где  $m_i = \int_0^{\infty} a^i dF(a)$  —  $i$ -й момент радиуса шара.

По непрерывности этот результат переносится и на случай разрывной функции распределения  $F$ . Действительно, если функция  $F$  разрывна, то существуют сходящиеся слабо к  $F$  последовательности функций распределения  $\{F'_n\}$  и  $\{F''_n\}$  такие, что для всех  $n$  имеет место  $F'_n \leq F \leq F''_n$ . Далее смотри замечание 8.5.

**Дискретизация.** Этим методом можно получать как верхние, так и нижние оценки критической концентрации. Основной идеей является сведение непрерывной модели к некоторой дискретной. Мы уже использовали выше этот метод при доказательстве теоремы 8.1. Ниже мы воспользуемся им при доказательстве теоремы 8.12.

**8.3. О среднем числе связей в момент перколяции.** Пусть все дефекты имеют одинаковую выпуклую форму  $D$  и симметричное распределение ориентации. Согласно неравенству (8.2), среднее число соседних дефектов  $\lambda_B$  при  $\lambda = \lambda_H (= \lambda_T = \lambda_S)$  ограничено снизу единицей. Результаты численного моделирования на ЭВМ дают основание полагать, что эта величина ограничена и сверху.

**Гипотеза 8.11.** Существует константа  $c_d$ , зависящая только от размерности пространства  $d$  такая, что для любой задачи со случайной симметричной ориентацией справедлива оценка  $1 \leq \lambda_H B \leq c_d$ .

Реально следует ожидать, что  $c_2 \leq 4,5$ ,  $c_3 \leq 3$ .

Можно высказать и более сильную гипотезу, что значение  $\lambda_H B$  примерно одинаково для всех моделей перколяций в  $R^d$ , где дефекты имеют форму выпуклой области, а распределение

их ориентации симметрично. Подтверждение этой гипотезы имело бы большое значение, так как величина  $B$  рассчитывается сравнительно легко, и, зная ее, можно было бы определять и критическую концентрацию.

**Теорема 8.12.** При  $d=2$  утверждение гипотезы 8.11 справедливо.

**Доказательство.** Рассмотрим случай равномерной ориентации (полное доказательство для общего случая см. в [9]). Пусть диаметр области  $D$ , т. е. наибольший отрезок прямой, который она может покрыть, равен  $l$ . Тогда данная задача мажорирует задачу «игл» (отрезков) длины  $l$  с тем же распределением ориентации. Получим оценку сверху для  $\lambda_H$  в задаче игл; в силу замечаний 8.5 она будет являться и оценкой для  $\lambda_H$  в исходной задаче. Воспользуемся методом дискретизации. Наложим на плоскость квадратную сетку из прямых, параллельных осям координат с шагом  $(\sqrt{3}-1)l/8$ . Рассмотрим граф, вершинами которого являются центры квадратов сетки и каждая вершина соединена с восемью вершинами, соответствующими восьми соседним квадратам сетки (граф есть двухдиагональная квадратная решетка). Вершина считается дефектной, если в пределах соответствующего квадрата имеются центры двух «игл», одна из которых наклонена к оси абсцисс, а другая — к оси ординат на угол не более  $\pi/6$ . Тогда из наличия бесконечного кластера в дискретной задаче вытекает и наличие бесконечного кластера в непрерывной. Вероятность того, что вершина графа будет дефектной, оценивается снизу через

$$\left[1 - \exp\left\{-\frac{1}{3}\lambda \times \left(\frac{\sqrt{3}-1}{8}l\right)^2\right\}\right]^2.$$

Стало быть,

$$\left[1 - \exp\left\{-\frac{1}{3}\lambda_H \left(\frac{\sqrt{3}-1}{8}l\right)^2\right\}\right]^2 \leq p_H,$$

где  $p_H$  — критическая вероятность для двухдиагональной квадратной решетки ( $p_H \approx 0,41$ ). Отсюда

$$\lambda_H \leq \frac{96(2 + \sqrt{3})}{l^2} \cdot \ln \frac{1}{1 - p_H}. \quad (8.6)$$

С другой стороны, поскольку диаметр области  $D$  равен  $l$ , она накрывается кругом радиуса  $\sqrt{3}l/3$ . Поэтому

$$B \leq 4\pi \left(\frac{\sqrt{3}}{3}l\right)^2 = \frac{4}{3}\pi l^2 \quad (8.7)$$

и  $\lambda_H B \leq 128(2 + \sqrt{3})\pi \ln\left(\frac{1}{1 - p_H}\right)$ , что и требовалось.

**Теорема 8.13.** Пусть плоская выпуклая фигура  $D$  имеет диаметр  $l$ , а ее проекция на прямую, перпендикулярную диамет-

ру, равна  $a$ . Тогда для задачи со случайной симметричной (не фиксированной) ориентацией справедливы оценки:  $c'a/l \leq C_{cr} \leq c''a/l$ , где  $C_{cr} = 1 - \exp\{-\lambda_H V\}$  — критическая объемная концентрация, а  $c'$ ,  $c''$  — абсолютные константы.

Доказательство. Согласно неравенству (8.6),  $\lambda_H \leq c/l$ . Очевидно, что площадь  $D$  не меньше, чем  $1/2la$ , поэтому  $C_{cr} \leq 1 - \exp\left\{-\frac{c}{l^2} \frac{1}{2} la\right\} \leq \frac{1}{2} c \frac{a}{l}$ . С другой стороны, согласно (8.7),  $B \leq 4/3\pi l^2$ . Из неравенства (8.2) вытекает, что  $\lambda_T \geq 1/B \geq \geq 3(4\pi l^2)$ . Площадь  $D$  не превосходит  $la$ . Так как  $a/l \leq 1$ , то  $C_{cr} \geq 1 - \exp\left\{-\frac{3}{4\pi l^2} la\right\} = 1 - \exp\left\{-\frac{3}{4\pi} \frac{a}{l}\right\} \geq \left(1 - \exp\left\{-\frac{3}{4\pi}\right\}\right) \frac{a}{l}$ , что и требовалось доказать.

Перейдем к случаю, когда размерность пространства равна 3. Если линейные размеры области  $D$  равны  $l \times l \times a$  ( $l \gg a$ ), то, используя тот же метод, можно доказать оценку, аналогичную (8.6):

$$\lambda_H \leq \frac{\bar{c}_1}{l^3} \ln \frac{1}{1 - \sqrt[3]{q_H}}$$

где  $q_H$  — критическая вероятность для кубической решетки. Аналогично (8.7), имеет место оценка  $B \leq \bar{c}_2 l^3$  и, значит,  $1 \leq \lambda_H B \leq \leq \bar{c}_3$ . Отсюда, аналогично теореме 8.13, вытекает, что  $c'a/l \leq \leq C_{cr} \leq c''a/l$ . Если же линейные размеры области  $D$  равны  $l \times a \times a$  ( $l \gg d$ ), то мы не можем получить приемлемой оценки сверху для  $\lambda_H$ . В этом случае можно показать, что  $B \approx \bar{c}_4 a l^2$ . Если гипотеза 8.11 справедлива в размерности  $d=3$ , то отсюда следует, что  $\lambda_H \approx \bar{c}_5 \frac{1}{a l^2}$ ,  $V \approx \bar{c}_6 a^2 l$ ,  $C_{cr} = 1 - \exp\{-\lambda_H V\} \approx c_7 a/l$ .

**8.4. О числе бесконечных кластеров.** В [9] доказано, что в непрерывных перколяционных моделях (так же, как это имеет место в дискретных) число бесконечных кластеров при  $\lambda > \lambda_H$  равняется единице или бесконечности.

## § 9. Просачивание случайных полей

а) Начнем с рассмотрения задач просачивания на решетках  $Z^v$ ,  $v \geq 2$ , со стандартной связностью. Пусть  $\xi(x)$ ,  $x \in Z^v$ , — одно-родное поле,  $h$  — некоторый уровень. Введем множества уровня

$$A_h^+ = \{x: \xi(x) \geq h\}, \quad A_h^- = \{x: \xi(x) < h\},$$

т. е. множества  $A_h^+$  «всплесков» поля над уровнем  $h$  и оставшиеся множества  $A_h^-$ . В идеале нас интересуют топологические свойства множеств  $A_h^+$ ,  $A_h^-$  во всем интервале изменения  $h$ , но поскольку даже для бернуллиевского поля эта задача очень трудна, мы ограничимся результатами типа: найдется уровень  $h^+$

такой, что при  $h > h^+$  множество  $A_h^-$  протекает на  $\infty$ , а множество  $A_h^+$  распадается на конечные связанные компоненты и аналогичными двойственными утверждениями, получающимися при замене «+» на «-» и неравенства  $h > h^+$  на  $h < h^-$ . Даже эти простейшие результаты (особенно с точными оценками  $h^+$ ,  $h^-$ ) полезны для многих приложений.

Следующий результат [19] доказывается дословным повторением контурных рассуждений из введения.

Теорема 9.1. Допустим, что найдется функция  $g(h)$ ,  $g(h) \searrow 0$  при  $h \rightarrow +\infty$  и постоянная  $c > 0$  такие, что для любых различных точек  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{Z}^v$ ,  $n = 1, 2, \dots$

$$(PF) \mathbf{P} \{ \xi(x_1) > h, \dots, \xi(x_n) > h \} \leq c \cdot g^n(n). \quad (9.1)$$

Тогда найдется постоянная  $h^+ < \infty$  такая, что при  $h > h^+$  п. н. множество  $A_h^+$  не протекает, а  $A_h^-$  протекает на бесконечность. В качестве  $h^+$  можно взять корень уравнения

$$g(h) = C^{-1}(v),$$

где  $C(v)$  — комбинаторная константа из формулы (3) во введении.

Аналогичная теорема о просачивании  $A_h^+$  и непросачивании  $A_h^-$  получится, если удастся установить оценку

$$(PF) \mathbf{P} \{ \xi(x_1) < h, \dots, \xi(x_n) < h \} \leq C f^n(h), \quad (9.2)$$

$$f(h) \searrow 0 \text{ при } h \rightarrow -\infty.$$

(мы предполагаем для простоты, что одномерное распределение  $\xi(\cdot)$  сосредоточено на всей оси  $\mathbb{R}^1$ ).

Для симметрично распределенных полей, например гауссовских, оценка (9.2) получается из (9.1) при замене  $\xi(x) \rightarrow -\xi(x)$ . Проблема получения  $PF$ -неравенств типа (9.1) не вполне традиционна для теории однородных полей, так как здесь речь идет об оценках с экспоненциальной точностью. В частности, традиционные условия сильного перемешивания (по Розенблатту, по Ибрагимову и пр.) для этих целей не подходят.

Ситуацию можно грубо описать так.  $PF$ -оценка справедлива при очень слабых условиях на моменты  $\xi(x)$ , если очень быстро убывают корреляции. Ослабление корреляционных ограничений должно сопровождаться усилением моментных условий. Приведем два типичных результата [19]:

Теорема 9.2. Если поле  $\xi(x)$  имеет конечный радиус корреляции, то справедлива  $PF$ -оценка.

Напомним, что  $R_0$  называется радиусом корреляции для  $\xi(x)$ , если для любых множеств  $A_1, \dots, A_n$ :  $\rho(A_i, A_j) > R_0$  независимы  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{F}_{A_1}, \dots, \mathcal{F}_{A_n}$ , порожденные значениями  $\xi(\cdot)$  на этих множествах.

Теорема 9.3. Допустим, что  $\xi(x) = \sum_{y \in Z^v} C(x-y)\eta(y)$ , где  $\eta(y)$  — независимы, одинаково распределены и  $|\langle \exp z\eta \rangle| < C$  при  $|z| < \delta$  (условие Крамера), а  $\sum_{y \in Z^v} |C(y)| < \infty$ . Тогда условие  $PF$  имеет место.

В теореме 9.2 отсутствовали моментные ограничения, но корреляции были финитны; в теореме 9.3, наоборот, корреляции (скажем бинарные) могут убывать лишь по степенному закону, зато требуется существование экспоненциальных моментов. Возможны и промежуточные результаты (см. [19]).

Остановимся на важном случае гауссовских полей.

Теорема 9.4. Если гауссовское однородное поле  $\xi$  имеет ограниченную спектральную плотность  $f(\lambda)$ , то оно класса  $PF$  (т. е. действует неравенство (9.1)). Самое короткое доказательство основано на теории тёплицевых форм [19]. Имеем

$$\begin{aligned} P\{\xi(x_1) > h, \dots, \xi(x_n) > h\} &= P\{\xi^2(x_1) > h^2, \dots, \xi^2(x_n) > h^2\} \ll \\ &\ll P\left\{\sum_{i=1}^n \xi^2(x_i) > nh^2\right\} \ll P\left\{\sum_{i=1}^n \lambda_i^{(n)} \zeta_i^2 > nh^2\right\} \ll \\ &\ll P\left\{\sum_{i=1}^n \zeta_i^2 > \frac{nh^2}{\Lambda}\right\} \ll \frac{\langle \exp\left\{\sum_{i=1}^n \zeta_i^2\right\} \rangle}{\exp\frac{znh^2}{\Lambda}} = \\ &= \exp\left\{-\frac{n}{2} \ln(1-4z) - \frac{znh^2}{\Lambda}\right\} \ll \exp\{-C(\Lambda)nh^2\}. \end{aligned}$$

Здесь  $\Lambda = \sup f(\lambda)$  — верхняя грань спектральной плотности  $\xi$ ,  $\lambda_1^{(n)}, \lambda_2^{(n)}, \dots, \lambda_n^{(n)}$  — собственные числа матрицы ковариаций вектора  $\{\xi(x_i), i=1, 2, \dots\}$  и использована важная теорема [3] о том, что  $\lambda_i^{(n)}$  при любых  $i, n$  оцениваются сверху и снизу, соответственно, через  $\sup f(\lambda)$  и  $\inf f(\lambda)$ .

Другой метод доказательства утверждений типа теоремы 9.4 может быть основан на теории полиномов Вика от гауссовских случайных величин (определения и основные свойства см. [11], гл. II и, особенно, § 3). Здесь основную роль играет следующая фундаментальная лемма Малышева.

Лемма  $M$  (теорема 4, § 3, гл. II, [11]). Пусть  $\xi_{t\alpha}, t \in T, \alpha \in A$  — двухпараметрическое гауссовское семейство,  $\langle \xi_{t\alpha} \rangle = 0$ ,

$$\sum_{t': t' \neq t} \sum_{\alpha' \in A} |\langle \xi_{t\alpha} \xi_{t'\alpha'} \rangle| < d < \infty. \quad (9.3)$$

Положим

$$:\xi_t^y: = : \prod_{\alpha \in A} \xi_{t\alpha}^{m(\alpha)} : \text{ — виковский моном,}$$

$$|\gamma_l| = \prod_{\alpha \in A} m(\alpha), \quad |\gamma| = \prod_{\alpha \in A} m(\alpha)!, \quad N = \sum |\gamma_l| = \sum_{l, \alpha} m_l(\alpha).$$

Тогда совместный момент  $n$  полиномов Вика допускает оценку

$$|\langle : \xi_{l_1}^{\gamma_{l_1}} : \dots : \xi_{l_n}^{\gamma_{l_n}} : \rangle| \leq d^{N/2} \prod_{l=1}^n |\gamma_l|. \quad (9.4)$$

Подробное обсуждение леммы Малышева и ее приложений к перколяции см. [18].

Продемонстрируем применение леммы на примере теоремы 9.4'.

**Теорема 9.4'.** Пусть  $\xi(x)$  — однородное гауссовское поле на  $Z^v$  и  $\sum_{y \neq 0, y \in Z^v} |b(y)| = \sum_{y \neq 0} |\langle \xi(0) \xi(y) \rangle| = d < \infty$ . Тогда поле  $\xi(x)$  принадлежит классу  $PF$ .

**Доказательство.** Предположим сначала, что  $d < \sigma^2 = b(0)$ . Нормированные полиномы Вика  $\frac{:\xi^n:}{\sqrt{n! \sigma^n}}$ , где  $\sigma^2 = \langle \xi^2 \rangle$ , образуют полную ортонормированную (относительно гауссовского веса) систему в  $L^2(\mathbb{R})$ . Поэтому

$$\chi_{(h, \infty)}(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{:\xi^n:}{\sqrt{n! \sigma^n}}.$$

Стало быть, по лемме  $M$ :

$$\begin{aligned} P\{\xi(x_1) > h, \dots, \xi(x_n) > h\} &= \langle \prod_{i=1}^n \chi_{(h, \infty)}(\xi(x_i)) \rangle = \\ &= \sum_{k_1, \dots, k_n} a_{k_1} \dots a_{k_n} \frac{\langle : \xi^{k_1}(x_1) : \dots : \xi^{k_n}(x_n) : \rangle}{\sqrt{k_1!} \dots \sqrt{k_n!} \sigma^{k_1 + \dots + k_n}} \leq \\ &\leq \sum_{k_1, \dots, k_n} \left( \frac{d}{\sigma^2} \right)^{\frac{k_1 + k_2 + \dots + k_n}{2}} |a_{k_1}| \dots |a_{k_n}| \leq \\ &\leq \left( \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{d}{\sigma^2} \right)^{k/2} |a_k| \right)^n \leq \left( \sum_{l=0}^{\infty} \left( \frac{d}{\sigma^2} \right)^l \sum_{l=0}^{\infty} a_l^2 \right) \leq (A(h))^{n/2}. \end{aligned}$$

$$\text{Но } \sum_{l=1}^{\infty} a_l^2 = \|\chi_{(h, \infty)}\|^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \int_h^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx \xrightarrow{h \rightarrow \infty} 0.$$

Поэтому при  $h > h^+$  мы получаем, что  $A(h) < 1$ , и нужная оценка получена. От условия  $d < \sigma^2$  легко избавиться процедурой «прореживания» величин  $\xi(x_i)$ .

Хотя утверждение теоремы 9.4' несколько слабее, чем теоремы 9.4, но зато ее метод намного более универсален. Почти

дословно повторяя предыдущие рассуждения, можно установить следующие результаты (уже для негауссовских полей).

**Теорема 9.5.** Пусть  $F(x_1, \dots, x_N)$  — измеримая функция  $N$  переменных,  $\xi(x)$ ,  $x \in Z^v$ , — однородное гауссовское поле с абсолютно суммируемыми корреляциями,  $U$  — окрестность точки  $0 \in Z^v$ , содержащая  $N$  точек. Введем поле  $\eta(x)$  (функцию от гауссовского)

$$\eta(x) = \sum_{x'_i \in U+x} F(x'_1, \dots, x'_N).$$

Тогда  $\eta(x)$  принадлежит классу  $PF$ .

**Теорема 9.6.** Пусть (в условиях теоремы 9.5)  $\zeta(x)$  — поле, полученное из  $\xi(x)$  гиббсовской перестройкой с финитным потенциалом взаимодействия  $F$ . Тогда  $\zeta(x)$  принадлежит классу  $PF$ .

Отметим, наконец, что недавно В. И. Питербарг [23] существенно усилил результаты теоремы 9.4, 9.4'. Используя энтропийные соображения, которые сейчас широко используются в теории гауссовских процессов, он доказал следующий результат.

**Теорема 9.7.** Если корреляционная функция  $b(y)$ ,  $y \in Z^v$ , гауссовского централизованного решетчатого поля  $\xi(x)$ ,  $x \in Z^v$ , допускает при  $|y| > 2$  оценки

$$\begin{aligned} |b(y)| &< \frac{C}{|\ln |y||^{2+\varepsilon}}, \\ |\Delta_i b(y)| &< \frac{C}{|\ln |y||^{3+\varepsilon} |y|}, \\ |\Delta_i \Delta_j b(y)| &< \frac{C}{|\ln(|y|)|^{4+\varepsilon} |y|^2}, \end{aligned}$$

где  $\Delta_i, \Delta_j$  — первые разности по аргументам  $y_i, y_j$  и дополнительно выполняются некоторые условия регулярности, то поле  $\xi(x)$  просачивается на бесконечность на достаточно высоком уровне.

Отметим, что для более медленной, чем логарифмическая, скорости убывания корреляций можно построить примеры гауссовских полей на решетке  $Z^v$  (или ее подмножеств), которые не просачиваются на бесконечность ни на каком уровне. Другие (уже негауссовские) контрпримеры этого типа см. в [19, 21]. Во всех этих контрпримерах корреляции полей  $\xi(x)$  убывают достаточно медленно, но сами поля удовлетворяют хорошим условиям перемешивания, имеют высокие моменты и т. п.

б) Перейдем к непрерывному случаю. Пусть  $\xi(x)$ ,  $x \in R^v$ ,  $v \geq 2$ , однородное непрерывное п. н. поле. Будем говорить, что оно просачивается на бесконечность на уровне  $h$ , если множество  $A_h^+ = \{x: \xi(x) \geq h\}$  распадается на непересекающиеся компакты, расстояния между которыми не меньше, чем фиксированная постоянная  $\rho_0$ , а множество  $A_h^- = \{x: \xi(x) < h\}$  содер-

жит уходящую на бесконечность кривую  $\gamma$  вместе с ее  $\rho_0$ -окрестностью.

Постоянная  $\rho_0 > 0$  введена для того, чтобы избежать трудностей, связанных с рассмотрением типичных для непрерывного случая множеств уровня канторовского типа. По той же причине не сохранено условие связности упомянутых выше компактных компонент  $A_n^+$ .

Следующая теорема доказывается дискретизацией.

Теорема 9.8 ([20]). Пусть  $\mathbb{R}^v$  разбито решеткой  $Z^v$  на единичные кубы. Если для произвольного множества таких кубов  $Q_1, \dots, Q_N$

$$P \left\{ \sup_{x \in Q_1} \xi(x) > h, \dots, \sup_{x \in Q_N} \xi(x) > h \right\} \leq c g^N(h), \quad (9.5)$$

где  $g(h) \searrow 0$ ,  $h \rightarrow +\infty$ , то найдется уровень  $h^+$  такой, что при  $h > h^+$  поле  $\xi(\cdot)$  просачивается на уровне  $h$ .

Следствие. Непрерывное поле с конечным радиусом корреляций просачивается на любом достаточно высоком уровне.

Теорема 9.8 не вполне конструктивна. Следующий результат, являющийся комбинацией известной теоремы А. Н. Колмогорова о выборочной непрерывности случайных полей и теоремы 9.8, удобнее для приложений [20].

Теорема 9.9. Пусть существуют постоянные  $\alpha, \beta > 0$ , такие что для любых  $h, \Delta > 0$  и произвольных пар точек  $(x_j, y_j) \in Q$  из произвольного множества кубических ячеек  $Z^v$

$$P \left\{ \prod_{j=1}^n (\xi(x_j) < h, \xi(y_j) > h + \Delta) \right\} \leq \alpha \prod_{j=1}^m p \{ \xi(x_j) < h, \xi(y_j) > h + \Delta \}^\beta \quad (9.6)$$

и, кроме того,

$$P \{ \xi(x) < h, |\xi(x) - \xi(y)| > \varphi(|x - y|) \} \leq g(h) \varphi(|x - y|), \quad (9.6')$$

где функции  $g, \varphi$  таковы, что  $g(x) \searrow 0$ ,  $\varphi(x) \searrow 0$ ,  $x \rightarrow 0$  и

$$\sum_{k=1}^{\infty} g\left(\frac{1}{2^k}\right) < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} 2^{kv} \varphi\left(\frac{1}{2^k}\right) < \infty. \quad (9.6'')$$

Следствие [20]. Если  $R(t) = \langle \xi(t) \cdot \xi(0) \rangle$  — корреляционная функция гауссовского поля и

а)  $|R(0) - R(t)| \leq C \ln^{-(1+\varepsilon)} \frac{1}{|t|}$ ,  $\varepsilon > 0$ ;

б)  $|R(t)| \leq f(|t|)$ , где  $f(x) \searrow 0$ ,  $x \rightarrow \infty$  и  $\int_0^\infty x^{v-1} f(x) dx < \infty$ ;

в)  $|\text{grad } R(t)| \leq C_1 f(t)$ ;

г)  $\left\| \frac{\partial^2 R}{\partial t_i \partial t_j} \right\| \leq C_2 f(t)$ . Тогда поле  $\xi(x)$  просачивается на бесконечность на достаточно высоком уровне.

Условие а) гарантирует непрерывность  $\xi$  и, по существу, не улучшаемо. Условия б) — г) означают суммируемость корреляционной функции на бесконечности и ее регулярность. Вполне вероятно, что и здесь действует теорема В. И. Питербарга, т. е. суммируемость  $R(t)$  можно заменить убыванием логарифмического типа.

Другие следствия из теоремы 9.8, 9.9 см. в [20].

в) Общие результаты о просачивании случайных полей на высоком уровне могут применяться к разнообразным физическим моделям, в частности, к задачам осреднения. Проиллюстрируем это примерами из п. 5° введения, т. е. рассмотрим вопрос о перколяции первого достижения.

Рассмотрим сначала дискретный случай. Пусть  $\xi(x) > 0$ ,  $x \in Z^v$  — однородное эргодическое поле на решетке. Введем функцию  $t(x, y) = \inf_{\gamma: x \rightarrow y} \sum_{z \in \gamma} \xi(z)$ . Здесь  $\gamma$  — связный путь, ведущий из  $x$  в  $y$ ,

который, не ограничивая общности, можно считать самонепересекающимся. Как и в п. 5° введения, определим функцию  $f(a, b) = t(x_a, x_b)$ , где  $x_a = (0, 0, \dots, a)$ ,  $x_b = (0, 0, \dots, b)$ , характеризующую скорость распространения «волны» вдоль одной из координатных осей (в нашем случае, оси  $x_v$ ). Легко показать, что процесс  $f(a, b)$  субаддитивен в смысле Кингмана [53], однороден и эргодичен. По субаддитивной теореме Кингмана существует, возможно бесконечный,

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{f(0, a)}{a} = \mu.$$

Теорема 9.10 (Смит, Вирман [53]). Если поле  $\xi(x)$  образовано независимыми величинами и  $\langle \xi \rangle < \infty$ , то  $\mu < \infty$ .

Фактически эта теорема верна для произвольных эргодических однородных полей с конечным средним  $\langle \xi \rangle = m < \infty$ .

В самом деле,

$$f(0, a) \leq \sum_{x \in [0, x_a]} \xi(x)$$

и поэтому

$$\mu \leq \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\sum_{x \in [0, a]} \xi(x)}{a} = m.$$

Собственно говоря, здесь не использованы перколяционные соображения. Но они важны для получения хороших верхних оценок  $\mu$ . Типичное рассуждение выглядит так.

Фиксируем уровень  $h$  выше уровня  $h^+$  протекания поля. Обозначим через  $V(x)$  объем связного  $A_{h^+}$  кластера, содержащего точку  $x$ . Предположим, что  $\langle V(x) \rangle = \alpha(h) < \infty$  (для полей с независимыми значениями это доказано, см. выше, в общем случае при быстром убывании корреляций) — это правдоподобная гипотеза. Во всяком случае, мы можем понимать  $h^+$  как критический уровень в смысле среднего значения  $h^+ = \inf \{h : \alpha(h) < \infty\}$ . Отрезок  $[0, x_a]$ ,  $x_a = (0, \dots, a)$  пересекается с некоторым количеством связных  $A_{h^+}$  кластеров.

Рассмотрим путь  $\hat{\gamma}: 0 \rightarrow x_a$ , совпадающий с  $[0, x_a]$  вне тех  $A_{h^+}$  кластеров, которые пересекаются с  $[0, x_a]$  и не содержат концевые точки, и обходит упомянутые «внутренние» кластеры по кратчайшему пути на их границах.

Если  $p(h) = P\{\xi(x) > h\}$  — объемная плотность множества  $A_{h^+}$ , то нетрудно показать, что

$$\sum_{\hat{\gamma}} \xi(x) \leq a(1 - p(h))h + ap(h)(\alpha(h) + 2),$$

т. е.

$$\mu \leq \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\sum_{x \in \hat{\gamma}} \xi(x)}{a} \leq (1 - p(h))h + p(h)(\alpha(h) + 2).$$

При  $h \rightarrow +\infty$  первый член неограниченно растет, а при  $h \searrow h^+$  становится бесконечным второй член. Найдем  $\min$  первой части. Это дает содержательную оценку  $\mu$ .

Более детальное изучение константы  $\mu$ , асимптотики при  $\tau \rightarrow \infty$  «волнового фронта», который определяется как

$$B_\tau = \{x : t(0, x) \leq \tau\}$$

см. в [46, 53] и цитированной там литературе.

Распространение всех упомянутых результатов на случай непрерывных полей в  $R^v$  — несложное упражнение, правда, точные оценки  $\mu$  получать здесь трудно.

Задача о существовании среднего удельного сопротивления в сети случайных сопротивлений, о которой говорилось во введении, рассматривается близкими методами (см. [45]).

## § 10. Многомасштабные схемы перколяции

Строго говоря, объект, о котором пойдет речь, уже введен ранее. Именно, речь идет о непрерывных пуассоновских моделях случайных множеств  $S_i$  (например, шаров случайного радиуса). Разумеется, если разброс в размерах этих множеств велик, мы можем надеяться, что все выводы теории, полученные в § 8 для множеств фиксированной формы, не только качественно, но и количественно сохраняются. В частности, критерии протекания, выраженные в терминах координацион-

ного числа или объемной концентрации дефектного множества, должны быть устойчивы по отношению к малым случайным возмущениям формы множеств (см., например [1]). Нетрудно получить и строгие результаты этого сорта.

Вопрос становится сложным, если разброс размеров  $S_i$  велик, т. е. масштабирован на много порядков. Как уже отмечалось во введении, попытка применить концентрационный критерий разрушения к геофизической среде сталкивается с большими трудностями. Интуитивно ясно, что «большие множества  $S_i$ » дают основной вклад в перколяционную картину, хотя «мелкие множества» могут заметно влиять и на объемную концентрацию дефектов и на координационное число.

Ниже мы коротко изложим содержание работ [2, 17, 32]. Основной качественный вывод из этих работ состоит в том, что наличие большого числа резко различающихся по величине типов дефектов (т. е. многомасштабность) вблизи порога протекания характеризуется увеличением объемной концентрации дефектного множества (она может быть сколько угодно близкой к 1) и увеличением координационного числа (среднего числа «соседей»). Оно может быть сколь угодно большим.

Мы коснемся лишь дискретных моделей случайной среды, обсуждаемых в [17, 32]. Перенесение соответствующих результатов на многомасштабные непрерывные модели — работа в значительной мере техническая [2], а сами результаты в основном сохраняются.

Дискретная многомасштабная случайная среда. Общая  $d$ -мерная модель этого типа зависит от 3-х параметров:  $N+1$  — число масштабов или рангов «микродефектов»,  $p$  — интенсивность микродефектов каждого ранга,  $v$  — шаг изменения масштаба.

Дефектное множество в  $R^d$  строится индуктивно. Сначала (нулевой шаг) пространство разбивается на единичные кубы основного масштаба  $l_0=1$  и для каждого куба выбирается независимо от прочих с вероятностями  $p$  и  $q$  соответственно цвет — «черный» или «белый» (« $C_0$ », « $B_0$ », черный цвет указывает на дефектность куба). Множество черных единичных кубов обозначим через  $D_0$ , оно имеет объемную плотность  $p$  (в стандартном эргодическом смысле). На следующем шаге каждый из белых кубов нулевого ранга разбивается на  $v^d$  одинаковых кубиков 1-го ( $l_1 = \frac{1}{v}$ ) масштаба и каждый из кубиков первого масштаба с теми же вероятностями  $p$  и  $q$  раскрашивается в черный ( $C_1$ ) и белый ( $B_1$ ) цвета. Объединение черных кубиков 1-го ранга образует множество  $D_1$  с объемной плотностью  $qp$ .

Повторяя этот процесс шаг за шагом, мы построим дефектные множества  $D_2, D_3, \dots, D_N$ , образованные черными кубиками масштабов  $l_2 = v^{-2}, \dots, l_N = v^{-N}$  с плотностями  $q^2p, \dots, q^Np$ .

Полное дефектное множество  $D = \bigcup_{i=0}^N D_i$  имеет плотность

$$\rho = p + qp + \dots + q^N p = 1 - q^{N+1}.$$

«Нормальная» или «белая» часть  $R^d$  имеет дополнительную плотность  $q^{N+1}$ .

Для дефектного множества  $D$  имеет смысл постановка задачи протекания. Условимся считать, что два замкнутых черных куба  $Q_i, Q_j$ , имеющих хотя бы одну общую точку, связаны (это так называемая сильная или  $\sqrt{2}$ -связность).

Дадим достаточные условия непротекания (в терминах  $\rho, N, \nu$ ), ограничившись для упрощения формул двумерным случаем  $d=2$ . Применим несколько модифицированный контурный метод Хаммерсли (см. введение или § 3).

Назовем путем  $\gamma_n$  любую связную цепочку из  $n$  дефектных квадратов, число  $n = |\gamma_n|$ , будем называть его длиной, хотя, разумеется, геометрические размеры  $\gamma_n$  слабо связаны с  $n$ . Оценим вероятности события  $B_n = \{\text{существует путь } \gamma_n, |\gamma_n| = n, \text{ который лежит в дефектном множестве } D, \text{ содержит фиксированную точку } x_0 \text{ и не имеет самопересечений}\}$ .

Если фиксировать путь  $\gamma_n$ , то вероятность того, что все квадраты его составляющие — черные, не меньше, чем  $\rho^n$ . Оценим число различных путей длины  $N$ .

Каждому пути отвечает последовательность символов вида  $Q_1, Q_1, Q_3, Q_3, Q_2, Q_5$ . Обозначим через  $k(\gamma_n)$  число изменений (переключений) типа квадратов (то есть) символов вдоль  $\gamma_n$ . Например, на изображенном выше начальном отрезке пути три изменения  $Q_1 \rightarrow Q_3, Q_3 \rightarrow Q_2, Q_2 \rightarrow Q_5$ . Изменения бывают двух разных видов: вид  $\downarrow$ , при котором происходит уменьшение масштаба ( $Q_1 \rightarrow Q_3, Q_2 \rightarrow Q_5$ ), и вид  $\uparrow$ , когда происходит его увеличение ( $Q_3 \rightarrow Q_2$ ). Смысл обозначений  $k\downarrow(\gamma_n)$  и  $k\uparrow(\gamma_n)$  очевиден, как и равенство  $k(\gamma_n) = k\downarrow(\gamma_n) + k\uparrow(\gamma_n)$ . Ясно также, что  $|k\uparrow(\gamma_n) - k\downarrow(\gamma_n)| \leq N$ . Основное для дальнейшего наблюдение состоит в том, что при переходе типа  $\downarrow$ , скажем  $Q_2 \rightarrow Q_5$ , серия идущих подряд квадратов меньшего типа не может быть короче, чем  $\nu$ . Отсюда следует, что  $k\downarrow(\gamma_n) \cdot \nu \leq n$ , так что  $k\downarrow(\gamma_n) \leq \frac{n}{\nu}$ ,

$k\uparrow(\gamma_n) \leq \frac{n}{\nu} + N$ . Подсчитаем число вариантов переходов типа  $\downarrow$  и  $\uparrow$ . Ясно что при переходе  $\uparrow$  это число не превосходит  $3(N-1)$ : не более чем  $N-1$  вариант выбора очередного символа и не более 3-х вариантов выбора соседнего квадрата.

Число вариантов переходов  $\downarrow$  (от больших квадратов к малым) существенно больше, но во всяком случае не превосходит

$$(4\nu^N + 4) + (4\nu^{N-1} + 4) + \dots + (4\nu + 4) \leq (N-1) \cdot (4\nu^N + 4),$$

(каждое последовательное слагаемое в левой части отвечает переходам  $Q_1 \rightarrow Q_N, Q_2 \rightarrow Q_N, \dots, Q_1 \rightarrow Q_2$ ). Внутри каждой серии

одинаковых квадратов число способов выбрать соседа не превосходит 7 (за исключением, быть может, исходного символа, где оно равно 8, ср. с начальным рассуждением в случае  $N=1$ ).

Итак, общее число путей  $\gamma_n$  длины  $n$  не превосходит

$$\begin{aligned} & 8 \cdot 7^{n-1} [(N-1) \cdot (4v^N + 4)]^{k+} \cdot [3(N-1)]^{k+} \leq \\ & \leq 8 \cdot 7^{n-1} (N-1) (4v^N + 4)^{\frac{n}{v}} \cdot [3(N-1)]^{\frac{n}{v} + N} \leq \\ & \leq C 7^n \left[ (N-1)^{\frac{2}{v}} (4v^N + 4)^{\frac{1}{v}} 3^{\frac{1}{v}} \right]^n. \end{aligned}$$

Если

$$\sum_n P(B_n) \leq C \sum_n \left[ 7p(N-1)^{\frac{2}{v}} (4v^N + 4)^{\frac{1}{v}} 3^{\frac{1}{v}} \right]^n < \infty,$$

то по лемме Бореля—Кантелли множество  $D$  не перколирует. Фиксируем  $N$  и подберем шаг  $v$  столь большим, чтобы

$$(N-1)^{\frac{2}{v}} (v+1)^{\frac{1}{v}} 12^{\frac{1}{v}} < \frac{8}{7},$$

тогда, очевидно, при  $p \leq \frac{1}{8}$  перколяция будет отсутствовать.

Самое интересное явление в этой модели состоит в заметном увеличении объемной концентрации дефектного множества на пороге просачивания. В самом деле, при выбранных выше  $N$  и  $v$

$$\rho = 1 - q^n > 1 - \left(1 - \frac{1}{8}\right)^N$$

и надлежащие  $N$  дают, скажем,  $\rho > 0,9$ ;  $0,99$  и т. п.

Конечно, слишком большой шаг  $v$  масштабирования физически неестественен. Интересная задача — получить хорошие верхние и нижние оценки порога просачивания (в терминах, скажем,  $\rho$ ) при фиксированном  $v$  (скажем,  $v=2$ ) и больших  $N$ . Как он себя ведет при  $N \rightarrow \infty$ ?

Заметим, что критическое координационное число  $\beta_{cr}$  в тех же предположениях неограниченно велико при  $N, v \rightarrow \infty$ . Оно понимается следующим образом. Пусть  $\eta$  — типичная точка  $D$  (т. е.  $\eta$  равномерно распределено в  $D \cap V$ ,  $V$  — большой объем).

Найдем число  $\xi$  соседей у черного квадрата, содержащего  $\eta$ . Тогда  $\langle \xi \rangle$  (при  $v \rightarrow \infty$ ) дает, по определению, координационное число  $D$ .

Опишем теперь (для введенной выше среды) многомасштабную модель разрушения, следуя [31]. Она, по-видимому, правильно обобщает критерий С. Н. Журкова на многомасштабный случай.

Разрушение масштабированной среды определяется индуктивно. Цель такого определения — формализовать ту естест-

венную мысль, что разрушение элементарного блока происходит за счет «сильного развития» микродефектов меньшего ранга.

Будем называть куб некоторого масштаба  $i$  белым, если он оставался таковым после того, как были распределены дефекты до  $i$ -го ранга включительно.

Рассмотрим белый куб  $(N-1)$ -го масштаба, в котором, как описано выше, по бернуллиевской схеме расположено некоторое количество черных кубов последнего,  $N$ -го масштаба. Будем говорить, что он является «прочным», если существуют связные цепочки кубиков  $N$ -го масштаба, которые соединяют любые пары противоположных граней. Связность при этом мы будем понимать как соседство кубиков по граням. Если куб не является «прочным», мы объявляем его «разрушенным». «Разрушение» в данном случае означает фактическое распадение множества белых кубиков на две несвязные компоненты, или, что то же самое, появление  $(d-1)$ -мерной магистральной трещины.

Разумеется, возможны и другие критерии разрушения. Например, можно требовать, чтобы все  $v^d$  кубиков были черные или допускать связность вдоль диагоналей и т. п.

На следующем шаге мы выполняем перекодировку кубов  $(N-1)$ -го ранга. Те из них, которые разрушены или же были дефектными с самого начала, считаются окрашенными в черный цвет, те, которые не были разрушены, считаются белыми. Тем самым,  $N$ -й масштаб полностью исключается из рассмотрения.

Дальше все повторяется заново для  $(N-2)$ -го масштаба с тем же самым критерием разрушения и т. д. В конце концов останутся черные и белые кубы единственного основного масштаба  $l_0=1$ . Если дефектное множество  $D^*$  черных (или разрушенных) кубов, которое, разумеется, не совпадает с исходным множеством  $D$ , содержит бесконечный класс, мы говорим, что в исходной системе возникла магистральная трещина. В противном случае мы говорим, что магистральной трещины, то есть разрушения, нет. Соотношение между разрушением, в указанном выше смысле, и классическим протеканием множества  $D$  математически не вполне очевидно, хотя есть естественные физические причины полагать, что из классического протекания следует разрушение. Для математической теории «разрушения» основную роль будет играть функция

$$f(p) = P \left\{ \begin{array}{l} \text{куб } (N-1)\text{-го ранга разрушения в смысле критерия } K \text{ при условии, что на } (N-1)\text{-м шаге он был белым.} \end{array} \right.$$

Тогда очевидно, на 1-м этапе процесса «разрушения» плотность разрушенных кубов  $(N-1)$ -го ранга будет равна

$$p_1 = p + (1-p)f(p) = F(p). \quad (10.1)$$

Плотность разрушенных кубов  $(N-2)$ -го ранга будет равна

$$p_2 = p_1 + (1 - p_1) f(p_1) = F(p_1) = F(F(p)) = F_2(p)$$

и т. д.

В конце концов, когда останутся лишь кубы основного масштаба  $l_0=1$ , плотность соответствующего множества  $D^*$  будет равна

$$p_N = p_{N-1} + (1 - p_{N-1}) \cdot f(p_{N-1}) = \underbrace{F(F(\dots F(p)))}_{N \text{ раз}} = F_N(p). \quad (10.2)$$

Поскольку множество  $D^*$  одномасштабно и бернуллиево, то, как легко понять, критерий разрушения определяется порогом  $p_{cr}^{(1)}(d)$ , совпадающим с критической вероятностью протекания в  $d$ -мерной задаче узлов. В итоге мы приходим к явно формулируемому критерию «разрушения».

Для того чтобы исходная система была разрушена, необходимо и достаточно, чтобы

$$F_N(p) > p_{cr}^{(1)}(d),$$

т. е.

$$p > F_N^{-1}(p_{cr}^{(1)}(d)).$$

Для небольших  $\nu$  ( $\nu=2,3$ ) и размерностей  $d=2,3$  можно явно подсчитать полиномы  $f(p)$  и  $F(p)$  (см. [31]). Изучение их итераций — красивая и не очень трудная задача.

Удается установить [31], что даже при фиксированном  $\nu$  и  $N \rightarrow \infty$  критическая объемная концентрация на пороге разрушения (но не протекания!) стремится к 1, что критическое координационное число велико при  $N \rightarrow \infty$  и т. п. Тем более эти результаты сохраняются при больших  $\nu$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Брагинский Р. П., Гнеденко Б. В., Молчанов С. А., Пешков И. Б., Рыбников К. А., Математические модели старения полимерных изоляционных материалов. Докл. АН СССР, 1963, 268, № 2, 281—284 (РЖМат, 1983, 7В304)
2. Голосов А. О., Молчанов С. А., Резникова А. Я., Непрерывные модели протекания в теории разрушения. В кн. Вычислительная сейсмология, 1986, вып. 20 (в печати)
3. Гранандер У., Сеге Г., Теплицевы формы и их приложения. Пер. с англ. М.: ИЛ, 1961, 308 с. (РЖМат, 1963, 5Б38К)
4. Жен П.-Ж. де, Идеи скейлинга в физике полимеров. М.: Мир, 1982, 368 с.
5. Журков С. Н., Куксенко В. С., Петров В. А. и др., К вопросу о прогнозировании разрушения горных пород. Изв. АН СССР, Физика Земли, 1977, № 6, 118
6. —, —, Образование субмикроскопических трещин в полимерах под нагрузкой. ФТТ, 1969, № 11, 296
7. Зельдович Я. Б., Перколяционные свойства двумерного случайного магнитного поля. Письма в ЖЭТФ, 1983, 38, вып. 2, 51—54

8. Зуев С. А., Сидоренко А. Ф., Непрерывные модели теории протекания I. Теор. и мат. физ., 1985, 62, № 1, 76—86 (РЖМат, 1985, 5В273)
9. —, —, Непрерывные модели теории протекания II. Теор. и мат. физ., 1985, 62, № 2, 253—262
10. Красносельский М. А., Положительные решения операторных уравнений. М.: Физматгиз, 1962, 394 с. (РЖМат, 1963, 8Б422)
11. Малышев В. А., Минлос Р. А., Гиббсовские случайные поля. М.: Наука, 1985, 288 с.
12. Матерон Ж., Случайные множества и интегральная геометрия. Пер. с англ. М.: Мир, 1978, 318 с. (РЖМат, 1979, 2В71 К)
13. Меньшиков М. В., Оценки перколяционных порогов для решеток в  $R^n$ . Докл. АН СССР, 1985, 284, № 1, 36—39
14. —, Совпадение критических точек в задачах перколяции. Докл. АН СССР, 1986 (в печати)
15. Минлос Р. А., Храпов П. В., О протекании в конечной полосе для непрерывных систем. Вестн. МГУ. Сер. мат. мех., 1985, 1, № 1, 56—59 (РЖМат, 1985, 5В272)
16. Митюшин Л. Г., О некоторых многомерных системах автоматов, связанных с задачами просачивания. Пробл. передачи информ., 1975, 11, № 3, 101—103 (РЖМат, 1976, 5В7)
17. Молчанов С. А., Писаренко В. Ф., Резников А. Я., О перколяционном подходе в теории разрушения. В кн. Вычислительная сейсмология, 1985, вып. 19 (в печати)
18. —, Степанов А. К., Оценка В. А. Малышева и ее приложения. В сб., «Случайные процессы в полях». М., МРУ, 1979, 39—48
19. —, —, Просачивание случайных полей. I. Теор. мат. физ., 1983, 55, № 2, 246—256
20. —, —, Просачивание случайных полей II. Теор. мат. физ., 1983, 55, № 3, 419—430
21. —, —, Просачивание случайных полей III. Теор. мат. физ., 1985, 65, № 3, 371—379
22. Петров В. А. Основы кинетической теории разрушения и его прогнозирование. В сб. «Физические основы прогнозирования разрушения горных пород», М.: Наука, 1974, 312
23. Питербарг В. И., О перколяции гауссовских полей. В сб. «IV Междунар. Вильнюсская конф. по теории вероятностей и мат. статист. Тезисы докл., т. 3». Вильнюс, 1985, 204—206
24. Садовский М. А., О моделях геофизической среды и сейсмического процесса. В сб. «Прогноз землетрясений», Душанбе — Моск., Дониш. 1983—1984, № 4, 268
25. Севастьянов Б. А. Ветвящиеся процессы. М.: Наука, 1971, 436 с. (РЖМат, 1972, 3В165К)
26. Храпов П. В., О протекании в конечной полосе. Вестн. МГУ. Сер. мат. мех., 1985, № 4, 10—13 (РЖМат, 1985, 11В299)
27. Челидзе Т. Л., Колесников Ю. М., Моделирование и прогноз процесса разрушения в рамках теории протекания. Изв. АН СССР, Физика Земли, 1983, № 5, 24—34
28. Шкловский Б. И., Эфрос А. Л., Электронные свойства легированных полупроводников. М.: Наука, 1979, 416 с.
29. Эфрос А. Л., Физика и геометрия беспорядка. М.: Наука, 1982, 176 с.
30. Aizenman M., Delyon F., Souillard B., Lower bounds on the cluster size distribution. J. Stat. Phys., 1980, 23, № 3, 267—280 (РЖМат, 1981, 7В247)
31. —, Newman C. M., Tree graph inequality and critical behavior in percolation models. J. Stat. Phys., 1984, 36, № 1—2, 103—143 (РЖМат, 1985, 4В316)
32. Allegre C. J., Le Mouel J. L., Provost A., Scaling rules in rock fracture and possible implications for earth quake prediction. Nature, 1982, 297, № 5861, 47—49
33. Berg J. van den, Disjoint occurrences of events: Results and conjectures. Contemp. Math., 1985, 41, 357—361

34. —, *Keane M.*, On the continuity of the percolations probability function. *Contemp. Math.*, 1984, 26, 61—65 (PЖMar, 1985, 6B300)
35. —, *Kesten H.*, Inequalities with applications to percolations and reliability. *J. Appl. Probab.*, 1985, 22, № 3, 556—569
36. *Campanino M., Russo L.*, An upper bound on the critical percolations probability for the three-dimensional cubic lattice. *Ann. Probab.*, 1985, 13, № 2, 478—491
37. *Chelidze T. L.*, Percolation and fracture. *Fears and Planet. Interiors*, 1982, 28, 93—101
38. *Durrett R.*, Some general results concerning the critical exponents of percolation processes. *Z. Wahrscheinlichkeitstheor und verw. Geb.*, 1985, 69, 421—437 (PЖMar, 1985, 12B271)
39. —, *Nguen B.*, Thermodynamic inequalities for percolation. *Commun. Math. Phys.*, 1985, 99, № 2, 253—269 (PЖMar, 1985, 12B270)
40. *Fortuin G. M., Kasteleyn P. W., Ginibre J.*, Correlation inequalities on some partially ordered sets. — *Commun. Math. Phys.*, 1971, 22, № 2, 89—103
41. *Hammersley J. M.*, Percolation processes: lower bounds for the critical probability. *Ann. Math. Statistics*, 1957, 28, № 3, 790—795 (PЖMar, 1959, 5066)
42. *Harris T. E.*, A lower bound for the critical probability in a certain percolation process. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 1960, 56, № 1, 13—20 (PЖMar, 1961, 1B211)
43. *Higuchi Y.*, Coexistence of the infinite (\*) clusters. A remark on the square lattice site percolation. *Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb.*, 1982, 61, № 1, 75—81
44. *Kesten H.*, The critical probability of bond percolation on the square lattice equal  $1/2$ . *Commun. Math. Phys.*, 1980, 74, № 1, 41—54 (PЖMar, 1981, 2B431)
45. —, *Percolation theory for mathematicians*. Boston e. a.: Birkhäuser, 1982, 423 pp. ill. (*Progr. Probab. and Statist.*, Vol.) (PЖMar, 1985, 6B298K)
46. —, First-passage percolation and a higher dimensional generalization. *Contemp. Math.*, 1985, 41, 235—251
47. *Newman C. M., Schulman L. S.*, Number and density of percolating clusters. *J. Phys. A: Math. and Gen.*, 1981, 14, 1735—1743 (PЖMar, 1982, 2B237)
48. —, —, Infinite clusters in percolation models. *J. Stat. Phys.*, 1981, 26, № 3, 613—628
49. *Ord G., Whittington S. G.*, Lattice decorations and pseudo-continuum percolation. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1980, 13, L307—L310
50. *Russo L.*, On the critical percolation probabilities. *Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb.*, 1981, 56, 229—237
51. *Sykes M. F., Essam J. W.*, Exact critical percolation probabilities for site and bond problems in two dimensions. *J. Math. Phys.*, 1964, 5, 1117—1127
52. *Shante V. K., Kirkpatrick S.*, An introduction to percolation theory. *Adv. Phys.*, 1971, 20,
53. *Smythe R. T., Wierman J. C.*, First-passage percolation on the square lattice. *Lect. Notes Math.*, 1978, 671, VIII, 195 pp., ill. (PЖMar, 1979, 5B517)
54. *Toth B.*, A lower bound for the critical probability of the square lattice site percolation. — *Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb.*, 1985, 69, 19—22 (PЖMar, 1985, 8B162)
55. *Wierman J. C.*, Bond percolation on honeycomb and triangular lattices. *Adv. Appl. Probab.*, 1981, 13, 298—313 (PЖMar, 1981, 10B8)
56. —, Counterexample in percolation: the site percolation critical probabilities  $p_B$  and  $p_T$  are unequal for a class of fully triangulated graphs. *J. Phys. A: Math. and Gen.*, 1984, 17, 637—646 (PЖMar, 1984, 8B265)
57. —, A bond-percolation critical probability determination based on the star-triangle transformation. *J. Phys. A: Math. and Gen.*, 1984, 17, 1525—1530 (PЖMar, 1984, 11B242)
58. —, Duality for directed site percolations. — *Contemp. Math.*, 1985, 41, 363—380