A. M. Nakhushev, A certain mixed problem for degenerate elliptic equations, *Differ. Uravn.*, 1975, Volume 11, Number 1, 192–195

ЯНВАРЬ 1975 г., ТОМ XI, № 1

УДК 517.946

ОБ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

А. М. НАХУШЕВ

Рассмотрим уравнение

$$y^m u_{xx} + u_{yy} + a(x, y) u_x + b(x, y) u_y + c(x, y) u = 0 \tag{1}$$

в конечной односвязной области Ω евклидовой плоскости независимых переменных x и y, ограниченной простой кривой Жордана σ с концами в точках $A(0, 0)$ и $B(1, 0)$, расположенной в полуплоскости $y > 0$, и отрезком $AB: 0 \leqslant x \leqslant 1$ прямой $y = 0$.

Относительно коэффициентов уравнения (1) предполагается, что $m = \text{const} \geqslant 0$, a, b и c принадлежат классу $C(\overline{\Omega})$, причем $c \leqslant 0$ всюду в $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$.

Задача А. Найти регулярное в области Ω решение $u = u(x, y)$ уравнения (1) из класса $C(\overline{\Omega})$, удовлетворяющее на границе $\partial\Omega$ смешанным краевым условиям

$$u(x, y) = \varphi(x, y) \qquad \forall (x, y) \in \sigma, \tag{2}$$

$$\lim_{y \to +0} \left[a_0(x) \frac{\partial}{\partial y} + a_j(x) D_{0x}^{\alpha_j} + a_{n+1}(x) \right] u = \Psi(x), \quad 0 < x < 1, \tag{3}$$

где φ, a_0, a_j, $j = 1, \ldots, n$, a_{n+1}, Ψ — заданные функции, непрерывные в замыкании множества их определения

$$\sum_{i=0}^{n+1} a_i^2(x) \neq 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{4}$$

$D_{0x}^{\alpha_j}$ — оператор дробного (в смысле Римана — Лиувилля) дифференцирования порядка $\alpha_j < 1$, задаваемый формулой

$$D_{0x}^{\alpha_j} f(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha_j)} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{f(t)\, dt}{(x - t)^{\alpha_j}}.$$

Здесь $\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера.

В краевом условии (3) по повторяющемуся индексу j подразумевается суммирование от 1 до n.

Очевидно, не нарушая общности, можно предположить, что $\alpha_1 > \alpha_2 > \ldots > \alpha_n$.

Задача А в случае, когда $a_0(x) = a_1(x) = \ldots = a_{n+1}(x) \equiv 0$ и $a_{n+1}(x) \equiv 1$ совпадает с задачей Дирихле [1], а когда $a_0(x) \equiv 1$, $a_1(x) = a_2(x) = \ldots = a_{n+1}(x) \equiv 0$ — с задачей Хольмгрена [2, 3].

Задача А эквивалентно редуцируется к задаче Дирихле и в случае, когда

$$a_0(x) \equiv 0, \ a_1(x) \neq 0 \qquad \forall x \in \overline{I}, \tag{5}$$

$$a_j(x) \in C^1(\overline{I}), \quad j = 1, \ldots, n; \quad a_{n+1}(x) \in C(\overline{I}), \quad \Psi(x) \in C(\overline{I}),$$

где $I = \{x : 0 < x < 1\}$.

В самом деле, на основании (5) краевое условие (3) можно переписать в виде

$$D_{0x}^{\alpha} \tau + b_j(x) D_{0x}^{\alpha_j} \tau + b_{n+1}(x) \tau = \psi(x), \quad j = 2, \ldots, n,$$

или

$$\tau(x) + D_{0x}^{-\alpha} b_j D_{0x}^{\alpha_j} \tau + D_{0x}^{-\alpha} b_{n+1} \tau = D_{0x}^{-\alpha} \psi, \tag{6}$$

где $\tau(x) = u(x, 0)$, $b_j(x) = a_j(x)/a_1(x)$, $b_{n+1}(x) = a_{n+1}(x)/a_1(x)$, $\psi(x) = \Psi(x)/a_1(x)$, $\alpha = \alpha_1$, а $D_{0x}^{-\alpha}$ — оператор, обратный оператору D_{0x}^{α}.

Из соотношения

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha_j) D_{0x}^{-\alpha} b_j D_{0x}^{\alpha}\tau = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^x \frac{b_j(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \frac{d}{dt}\int_0^{t-\varepsilon}\frac{\tau(\xi)\,d\xi}{(t-\xi)^{\alpha_j}} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_0^x \frac{b_j(t)\,\tau(t-\varepsilon)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}\varepsilon^{\alpha_j}} - \alpha_j\int_0^{x-\varepsilon}\tau(\xi)\,d\xi\int_{\xi+\varepsilon}^x \frac{b_j(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}(t-\xi)^{1+\alpha_j}}\right]$$

с учетом равенства

$$\alpha_j\int_{\xi+\varepsilon}^x \frac{b_j(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}(t-\xi)^{1+\alpha_j}} = \frac{b_j(\xi+\varepsilon)}{(x-\xi-\varepsilon)^{1-\alpha}\varepsilon^{\alpha_j}} + \frac{d}{d\xi}\int_{\xi+\varepsilon}^x \frac{b_j(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}(t-\xi)^{\alpha_j}}$$

легко видеть, что

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha_j) D_{0x}^{-\alpha} b_j D_{0x}^{\alpha_j}\tau = -\int_0^x \tau(t)\,dt\,\frac{d}{dt}\int_t^x \frac{b_j(\xi)\,d\xi}{(x-\xi)^{1-\alpha}(\xi-t)^{\alpha_j}} =$$

$$= -\int_0^x \tau(t)\,dt\,\frac{d}{dt}(x-t)^{\alpha-\alpha_j}\int_0^1 \frac{b_j[t+(x-t)z]\,dz}{z^{\alpha_j}(1-z)^{1-\alpha}}.$$

Принимая это во внимание, убеждаемся в эквивалентности уравнения (6) интегральному уравнению Вольтерра второго рода

$$\tau(x) - \int_0^x \frac{K_j(x, t)\,\tau(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha+\alpha_j}} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x \frac{b_{n+1}(t)\,\tau(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\,dt = D_{0x}^{-\alpha}\Psi,$$

где $K_j(x, t)\in C(\overline{I}\times\overline{I})$, которое безусловно и однозначно разрешимо в классе $C(\overline{I})$.

К различным частным случаям задачи А эквивалентно (в смысле однозначной разрешимости) редуцируются многие краевые задачи для линейных уравнений второго порядка смешанного типа. В частности, по стандартной схеме [1] легко убедиться, что фундаментальное соотношение между $\tau(x) = u(x, 0)$ и $\nu(x) = u_y(x, 0)$ в задаче Трикоми для уравнения

$$\operatorname{sign} y\,|y|^m u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

приносимое на линию вырождения из гиперболической части смешанной области, представимо в виде (3), где $a_0(x)\equiv\text{const} < 0$, $a_1(x)\equiv\text{const} > 0$, $a_2(x) = a_3(x) = \ldots = a_{n+1}(x)\equiv 0$, а α_1 — положительная постоянная, зависящая только от m.

Имеет место следующий принцип экстремума. Пусть $\Psi(x)\equiv 0$ и

$$a_0(x)\leqslant 0, \quad a_i(x)\geqslant 0, \quad \forall i = 1, \ldots, n+1, \quad x\in I. \tag{7}$$

Тогда положительный максимум и отрицательный минимум решения $u(x, y)$ задачи А в $\overline{\Omega}$ достигается лишь на кривой σ, если $u(x, 0)\in C^{(0,h)}(I)$, $h > \alpha_1$.

Здесь и ниже $C^{(k,\,h)}(E)$ означает класс функций, у которых в E существуют все производные порядка k, удовлетворяющие условию Гёльдера с показателем h.

Действительно, допустим, что $\max\limits_{\overline{\Omega}} u = u(\xi, \eta) > 0$. Очевидно, $(\xi, \eta)\,\overline{\in}\,\Omega$. Пусть $(\xi, \eta) = (\xi, 0)\in I$. В силу (3) в этой точке имеем

$$a_0(\xi)\,\nu(\xi) + a_j(\xi)\,D_{0\xi}^{\alpha_j}\tau(\xi) + a_{n+1}(\xi)\,\tau(\xi) = 0. \tag{8}$$

На основании (4) и (7) среди функций $a_i(x)$, $i = 0, 1, \ldots, n+1$, найдется по крайней мере одна функция $a_l(x)$ такая, что $a_l(\xi) > 0$ при $l\neq 0$ и $a_l < 0$ при $l = 0$.

Если $l = 0$, то из (7), (8) и принципа Заремба — Жиро [4], утверждающего, что $\nu(\xi) < 0$, получим $(\xi, 0)\,\overline{\in}\,I$. А это противоречит сделанному допущению. Если же $l =$

$= j$ $(j = 1, \ldots, n)$, то на основании установленного в [5] принципа экстремума для оператора дробного дифференцирования будем иметь неравенство $D_{0\xi}^{\alpha_j} \tau(\xi) > 0$, из которого с помощью (8) доказывается, что точка $(\xi, \eta) \in \sigma$.

Аналогично убеждаемся, что точка (ξ, η), где функция $u(x, y)$ достигает отрицательного минимума, не может принадлежать I. Стало быть, $(\xi, \eta) \in \sigma$.

Из установленного принципа экстремума вытекает единственность и устойчивость решения задачи A.

Нетрудно заметить, что если соблюдены условия (4) и (5), то задача (2), (3) имеет не более одного решения для любого линейного эллиптического в области Ω уравнения второго порядка, коэффициенты которого удовлетворяют известным условиям, гарантирующим справедливость принципов Хопфа и Заремба — Жиро [4].

Вопрос существования решения задачи A можно исследовать методом интегральных уравнений при следующих предположениях относительно кривой σ и заданных функций: σ — гладкая кривая с параметрическим уравнением $x = x(s)$, $y = y(s)$, $x(s)$, $y(s) \in C^{(2,h)}$ $(0 \leqslant s \leqslant l)$, где s — длина дуги, отсчитываемая от точки $B(1, 0)$, а l — длина σ; в достаточно малых окрестностях точек $A(0, 0)$ и $B(1, 0)$ части кривой σ совпадают с соответствующими частями нормальной кривой

$$\sigma_0 : (x - 1/2)^2 + \frac{4}{(m+2)^2} y^{m+2} = 1/4;$$

кривая σ лежит вне области, ограниченной кривой σ_0 и отрезком AB; $\varphi(x, y) = f(s) \in C^{(2,h)}$ $(0 \leqslant s \leqslant l)$, $a_j(x) \in C^{(1,h)}(\bar{I})$, $j = 0, 1, \ldots, n$, $a_{n+1}(x)$ и $\Psi(x) \in C^{(0,h)}(\bar{I})$; коэффициенты уравнения (1) принадлежат классу $C^{(1,h)}(\Omega)$, причем при $m \geqslant 2$, $a(x, y)$ удовлетворяет условию Геллерстедта*) [6]

$$a(x, y) = a_0(x, y)\, y^{\mu}, \quad \mu = \text{const} > \frac{m}{2} - 1, \quad a_0 \in C^{(1,h)}(\bar{I}).$$

По стандартной схеме (см. [1, 7, 9]) можно доказать, что если существует решение $u(x, y)$ задачи A и $\tau(x) = u(x, 0)$, $\nu(x) = u_y(x, 0)$, то

$$\tau(x) = \gamma_m \int_0^1 \left[(x - \xi)^{-\frac{m}{m+2}} - (x + \xi - 2x\xi)^{-\frac{m}{m+2}}\right] \nu(\xi)\, d\xi +$$
$$+ \int_0^1 K_m(x, \xi)\, \nu(\xi)\, d\xi + \Phi_m(x), \quad 0 < x < 1, \tag{9}$$

при $m > 0$, и

$$\tau(x) = \gamma_0 \int_0^1 \left[\log|x - \xi| - \log(x + \xi - 2x\xi)\right] \nu(\xi)\, d\xi +$$
$$+ \int_0^1 K_0(x, \xi)\, \nu(\xi)\, d\xi + \Phi_0(x), \quad 0 < x < 1,$$

при $m = 0$, где $\gamma_m = \text{const} \neq 0$, $K_m(x, \xi)$ и $\Phi_m(x)$ — заданные функции, непрерывные на сегментах $0 \leqslant \frac{x}{t} \leqslant 1$, удовлетворяющие условию Гёльдера с показателем $h > \alpha$, внутри этих сегментов.

Из краевого условия (3) имеем

$$a_0(x)\, \nu(x) + a_j(x)\, D_{0x}^{\alpha_j} \tau(x) + a_{n+1}(x)\, \tau(x) = \Psi(x). \tag{10}$$

Следовательно, задача A эквивалентна (в смысле разрешимости) системе интегро-дифференциальных уравнений (9), (10).

Пусть $a_j(x) \equiv 0$ для всех $j = 1, \ldots, n$. Тогда из (9) и (10) получаем интегральное уравнение

$$a_0(x)\, \nu(x) + a_{n+1}(x)\, \gamma_m \int_0^1 \left[|x - t|^{-\frac{m}{m+2}} - (x + t - 2xt)^{-\frac{m}{m+2}}\right] \nu(t)\, dt +$$

*) Условие, гарантирующее однозначную разрешимость задачи Дарбу для вырождающегося гиперболического уравнения.

$$+ a_{n+1}(x) \int_0^1 K_m(x, t)\, \nu(t)\, dt = \Psi(x) - a_{n+1}(x)\, \Phi_m(x),$$

которое в силу принципа экстремума безусловно и однозначно разрешимо, если $a_0(x) < 0$ $a_{n+1}(x) \geq 0$ для всех $x \in \bar{I}$. Поскольку в этом случае достаточно искать функцию $\nu(x)$ в классе функций, непрерывных в интервале I и могущих обращаться в бесконечность интегрируемого порядка на концах этого интервала, наложенные выше на заданные функции условия можно значительно ослабить.

Вопрос существования решения задачи A в общем случае, когда $\alpha_1 \leq 2/(m+2)$, исследуется точно так же, как и задача Трикоми для уравнения

$$\operatorname{sign} y\, |y|^m u_{xx} + u_{yy} + a(x, y)\, u_x + b(x, y)\, u_y + c(x, y) = 0.$$

При $\alpha_1 > 2/(m+2)$ возникают затруднения принципиального характера. В этом случае интегральное уравнение для искомой функции $\nu(x)$ можно записать в виде

$$\nu(x) + \ulcorner\!\!\int_0^1 K(x, t)\, \nu(t)\, dt = \Psi(x), \qquad 0 < x < 1,$$

где ядро $K(x, t)$, вообще говоря, имеет подвижную (при $x = t$) и неподвижную (при $x, t = 0, 1$) особенности высокого порядка, и поэтому интеграл понимается в смысле конечной части по Адамару [9, 10].

Литература

1. Бицадзе А. В. Уравнения смешанного типа. М., Изд-во АН СССР, 1959.
2. Holmgren E. Arkiv Mat., Astr. och Fisik, 25A, 1—3.
3. Евсин В. И. Сибир. матем. журнал, 8, № 2, 1972.
4. Бицадзе А. В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М., «Наука», 1966.
5. Нахушев А. М. Дифференц. уравнения, 10, № 1, 1974.
6. Gellerstedt S. Arkiv Mat., Astr. och Fisik, 25A, 29, 1937.
7. Gellerstedt S. Sur un probléme aux limites pour une équation linéaire aux dérives partielles du second ordre de type mixte. Thése, Uppsala, 1935.
8. Смирнов М. М. Уравнения смешанного типа. М., «Наука», 1970.
9. Hadamard J. Le probléme de Cauchy. Paris, 1932.
10. Wiener Klaus. Math. Nachrichten, 35, 1/2, 1967.

Поступила в редакцию 21 февраля 1974 г.

Кабардино-Балкарский государственный университет