



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

Yu. B. Ermolaev, Computation of the central element of the universal enveloping algebra of a Witt algebra, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 1975, Number 5, 20–26

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.170

February 12, 2025, 04:35:22



УДК 519.4

Ю. Б. Ермолаев

**ВЫЧИСЛЕНИЕ ЦЕНТРАЛЬНОГО ЭЛЕМЕНТА
УНИВЕРСАЛЬНОЙ ОБЕРТЫВАЮЩЕЙ АЛГЕБРЫ АЛГЕБРЫ ВИТТА**

Пусть P — поле характеристики $p \geq 3$ и \mathfrak{L} — алгебра Витта над P с базисом $e_i, i = -1, \dots, p-2$, для которого

$$e_i \circ e_j = \begin{cases} (i-j)e_{i+j}, & \text{если } i+j \leq p-2, \\ 0, & \text{если } i+j > p-2. \end{cases} \quad (1)$$

Пусть \mathfrak{U} — универсальная обертывающая алгебра алгебры \mathfrak{L} ; \mathfrak{Z} — центр. Как обычно, \mathfrak{L} считаем вложенной в \mathfrak{U} . Введем обозначения для следующих элементов алгебры \mathfrak{U} :

$$z_{km} = \sum_{(m_i) \in M_{km}} e_{p-2-m_1} e_{p-2-m_2} \dots e_{p-2-m_k},$$

где сумма распространена на все наборы (m_1, \dots, m_k) целых чисел множества $M_{km} = \{(m_1, \dots, m_k) \mid m_1 + \dots + m_k = m, 0 \leq m_i \leq p-1, i = \overline{1, k}\}, k = \overline{1, p-1}; m = \overline{0, p-1}$. Через D_i обозначим дифференцирование $\text{ad } e_i$ в \mathfrak{U} , т. е. $uD_i = ue_i - e_iu$ для $u \in \mathfrak{U}$.

Лемма 1. *Имеют место соотношения*

$$\begin{aligned} z_{km} D_{-1} &= -(m+1)z_{k, m+1}, \quad m = \overline{0, p-1}; \\ z_{km} D_{p-2} &= 0, \quad m = \overline{0, p-3}; \\ z_{k, p-2} D_{p-2} &= 2kz_{k, 0}; \quad z_{k, p-1} D_{p-2} = (2k-1)z_{k, 1}. \end{aligned} \quad (2)$$

Доказательство. Индукция по k . При $k=1$ $z_{1, m} = e_{p-2-m}$ и (2) представляют из себя иную запись соответствующих формул (1). При $k > 1$ воспользуемся равенством

$$z_{k, m} = \sum_{i=0}^m z_{1i} z_{k-1, m-i}, \quad k \geq 2.$$

Предполагая (2) справедливыми при первом индексе $< k$, будем иметь

$$\begin{aligned} z_{k, m} D_{-1} &= \sum_{i=0}^m [- (i+1) z_{1, i+1} z_{k-1, m-i} - (m-i+1) z_{1, i} z_{k-1, m-i+1}] = \\ &= - \sum_{i=1}^{m+1} i z_{1i} z_{k-1, m-i+1} - \sum_{i=0}^m (m-i+1) z_{1i} z_{k-1, m-i+1} = \\ &= - (m+1) \sum_{i=0}^{m+1} z_{1i} z_{k-1, m+1-i} = - (m+1) z_{k, m+1}. \end{aligned}$$

Далее из равенства

$$z_{km}D_{p-2} = \sum_{i=0}^m [z_{1i}D_{p-2}z_{k-1, m-i} + z_{1i}z_{k-1, m-i}D_{p-2}]$$

и предположения индукции следует $z_{km}D_{p-2} = 0$ для $m = \overline{0, p-3}$; кроме того,

$$\begin{aligned} z_{k, p-2}D_{p-2} &= 2(k-1)z_{1,0}z_{k-1,0} + 2z_{1,0}z_{k-1,0} = 2kz_{k,0}, \\ z_{k, p-1}D_{p-2} &= (2k-3)z_{1,0}z_{k-1,1} + 2(k-1)z_{1,1}z_{k-1,0} + 2z_{1,0}z_{k-1,1} + \\ &+ z_{11}z_{k-1,0} = (2k-1)(z_{10}z_{k-1,1} + z_{11}z_{k-1,0}) = (2k-1)z_{k,1}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Всюду в дальнейшем $q = \frac{p-1}{2}$.

Следствие. *Элемент*

$$z = z_{q+1, p-1} = \sum_{(m_i) \in M_{q+1, p-1}} e_{p-2-m_0} e_{p-2-m_1} \dots e_{p-2-m_q}$$

является центральным в универсальной обертывающей алгебре \mathcal{U} алгебры Витта.

Действительно, элементы e_{-1} и e_{p-2} являются образующими в \mathcal{Z} . А так как по (2) $z_{q+1, p-1}D_{-1} = 0$ и $z_{q+1, p-1}D_{p-2} = 0$, то z коммутирует со всеми $a \in \mathcal{Z}$, а следовательно, и со всеми $u \in \mathcal{U}$.

Выразим z через обычный базис Пуанкаре — Биркгофа — Витта.

Пусть E — множество всевозможных независимых от порядка наборов базисных элементов алгебры \mathcal{Z}

$$e_{p-2-m_0}, e_{p-2-m_1}, \dots, e_{p-2-m_q},$$

для индексов которых имеют место соотношения $m_0 + m_1 + \dots + m_q = p-1$, $0 \leq m_i \leq p-1$, $i = \overline{0, q}$. Справедливы три следующих свойства.

а) Только один набор из E содержит e_{-1} , а именно,

$$e_{-1}, \overbrace{e_{p-2}, \dots, e_{p-2}}^q,$$

и только один набор из E содержит e_0 , а именно,

$$e_0, \overbrace{e_{p-3}, e_{p-2}, \dots, e_{p-2}}^{q-1}.$$

б) Если при $1 \leq k \leq q-1$ элемент e_k входит в набор множества E , то для остальных элементов e_{n_j} этого набора $n_j \geq p-3-k$.

Причем, если e_{p-3-k} или e_{p-2-k} входят в набор вместе с e_k , то это возможно лишь в двух следующих случаях:

$$e_k, e_{p-3-k}, \overbrace{e_{p-2}, \dots, e_{p-2}}^{q-1}; \quad e_k, e_{p-2-k}, e_{p-3}, \overbrace{e_{p-2}, \dots, e_{p-2}}^{q-2}.$$

в) Во всех наборах множества E , за исключением одного

$$e_{q-1}, e_{q-1}, \overbrace{e_{p-2}, \dots, e_{p-2}}^{q-1} \quad (3)$$

число базисных элементов e_k с $k < q$ не больше одного.

Лемма 2. В множестве E некоммутирующие между собой элементы содержат лишь следующие наборы:

$$\begin{aligned}
 & \overbrace{e_{-1}, e_{p-2}, \dots, e_{p-2}}^q; \\
 e_k, e_{p-3-k}, & \overbrace{e_{p-2}, \dots, e_{p-2}}^{q-1}, \quad k = \overline{0, q-2}; \\
 e_k, e_{p-2-k}, e_{p-3}, & \overbrace{e_{p-2}, \dots, e_{p-2}}^{q-2}, \quad k = \overline{1, q-1}.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Остальные наборы множества E состоят из элементов перестановочных между собой.

Доказательство. В виду пп. а), б) каждый набор, не принадлежащий к совокупности (4), либо содержит только элементы, все индексы которых $\geq q$, либо содержит лишь один элемент e_k с $k < q$, а индексы остальных элементов $> p-2-k$ и потому они коммутируют с e_k и, тем более между собой, либо, наконец, совпадает с набором (3), элементы которого перестановочны. Лемма доказана.

Через $(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$ обозначим симметрическую сумму всех членов вида $e_{j_1} \dots e_{j_k}$, где j_1, \dots, j_k — перестановка индексов i_1, \dots, i_k .

Отметим, что сумма $(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$ содержит $\frac{k!}{k_{-1}! \dots k_{p-2}!}$ слагаемых, где k_i — число элементов в наборе e_{i_1}, \dots, e_{i_k} , совпадающих с e_i , $i = \overline{-1, p-2}$. Элемент z можно, очевидно, записать в виде

$$z = \sum_E (e_{n_0}, e_{n_1}, \dots, e_{n_q}), \tag{5}$$

где сумма распространена на все наборы множества E .

Лемма 3. Справедливы равенства:

$$\begin{aligned}
 (e_{-1}, \overbrace{e_{p-2}, \dots, e_{p-2}}^q) &= (q+1) e_{p-2}^q e_{-1} + \frac{(q+1)q}{2} e_{p-3} e_{p-2}^{q-1}; \\
 (e_0, \overbrace{e_{p-3}, e_{p-2}, \dots, e_{p-2}}^{q-1}) &= (q+1) q e_{p-3} e_{p-2}^{q-1} e_0; \\
 (e_k, \overbrace{e_{p-3-k}, e_{p-2}, \dots, e_{p-2}}^{q-1}) &= \\
 = (q+1) q e_{p-3-k} e_{p-2}^{q-1} e_k + \frac{(q+1)q}{2} (2k+3) e_{p-3} e_{p-2}^{q-1}; \quad k = \overline{1, q-2}; \\
 (e_1, e_{p-3}, e_{p-3}, \overbrace{e_{p-2}, \dots, e_{p-2}}^{q-2}) &= \\
 = \frac{(q^2-1)q}{2} e_{p-3}^2 e_{p-2}^{q-2} e_1 + 2(q^2-1) q e_{p-3} e_{p-2}^{q-1}; \\
 (e_k, \overbrace{e_{p-2-k}, e_{p-3}, e_{p-2}, \dots, e_{p-2}}^{q-2}) &= \\
 = (q^2-1) q e_{p-2-k} e_{p-3} e_{p-2}^{q-2} e_k + (q^2-1) q (k+1) e_{p-3} e_{p-2}^{q-1}, \quad k = \overline{2, q-1}.
 \end{aligned} \tag{6}$$

Доказательство. Можно записать

$$(e_{-1}, e_{p-2}, \dots, e_{p-2}) = \sum_{i=0}^q e_{p-2}^{q-i} e_{-1} e_{p-2}^i;$$

$$\begin{aligned}
& (e_0, e_{p-3}, e_{p-2}, \dots, e_{p-2}) = \\
& = \sum_{i=0}^{q-1} [(i+1)e_{p-2}^{q-i-1} e_0 e_{p-3} e_{p-2}^i + (q-i)e_{p-3} e_{p-2}^{q-i-1} e_0 e_{p-2}^i]; \\
& (e_k, e_{p-3-k}, e_{p-2}, \dots, e_{p-2}) = \\
& = \frac{(q+1)q}{2} (e_k e_{p-3-k} e_{p-2}^{q-1} + e_{p-3-k} e_k e_{p-2}^{q-1}), \quad k = \overline{1, q-2}; \\
& (e_1, e_{p-3}, e_{p-3}, e_{p-2}, \dots, e_{p-2}) = \\
& = \frac{(q+1)q(q-1)}{6} (e_1 e_{p-3}^2 e_{p-2}^{q-2} + e_{p-3} e_1 e_{p-3} e_{p-2}^{q-2} + e_{p-3}^2 e_1 e_{p-2}^{q-2}); \\
& (e_k, e_{p-2-k}, e_{p-3}, e_{p-2}, \dots, e_{p-2}) = \\
& = \frac{(q+1)q(q-1)}{2} (e_k e_{p-2-k} e_{p-3} e_{p-2}^{q-2} + e_{p-2-k} e_k e_{p-3} e_{p-2}^{q-2}), \quad k = \overline{2, q-1}.
\end{aligned}$$

Отсюда, используя формулы

$$\begin{aligned}
e_{-1} e_{p-2}^i &= e_{p-2}^i e_{-1} + i e_{p-3} e_{p-2}^{i-1}; \\
e_0 e_{p-2}^i &= e_{p-2}^i e_0 + 2i e_{p-2}^i; \quad e_0 e_{p-3} e_{p-2}^i = e_{p-3} e_{p-2}^i e_0 + (2i+3) e_{p-3} e_{p-2}^i; \\
e_k e_{p-3-k} &= e_{p-3-k} e_k + (2k+3) e_{p-3}; \\
e_k e_{p-2-k} &= e_{p-2-k} e_k + 2(k+1) e_{p-2}; \quad e_1 e_{p-3}^2 = e_{p-3}^2 e_1 + 8 e_{p-3} e_{p-2},
\end{aligned}$$

первые три из которых доказываются индукцией по i , получим (6).

Предложение 1. При $p=5$ центральный элемент z универсальной обертывающей алгебры алгебры Витта имеет вид

$$z = 3e_3^2 e_{-1} + e_2 e_3 e_0 + 3e_2^2 e_1 + 3e_3 e_1^2,$$

а при $p \geq 7$ —

$$\begin{aligned}
z &= a + (q+1) e_{p-2}^q e_{-1} + (q+1) q e_{p-3} e_{p-2}^{q-1} e_0 + \\
& + \sum_{k=1}^{q-1} a_k e_k + \frac{(q+1)q}{2} e_{p-2}^{q-1} e_{q-1}^2,
\end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned}
a &= \sum_{(k_i) \in M} \frac{(q+1)!}{k_0! k_1! \dots k_{q-1}!} e_q^{k_0} e_{q+1}^{k_1} \dots e_{p-2}^{k_{q-1}} - \frac{5}{64} e_{p-3} e_{p-2}^{q-1}; \\
a_k &= \sum_{(k_i) \in M_k} \frac{(q+1)!}{k_0! k_1! \dots k_{q-1}!} e_q^{k_0} e_{q+1}^{k_1} \dots e_{p-2}^{k_{q-1}}, \quad k = \overline{1, q-1};
\end{aligned} \quad (7')$$

суммирование происходит по множествам

$$\begin{aligned}
M &= \left\{ (k_0, \dots, k_{q-1}) \mid k_i \geq 0; \sum_{i=0}^{q-1} k_i = q+1; \sum_{i=1}^{q-1} i k_i = q^2 - 2q - 1 \right\}, \\
M_k &= \left\{ (k_0, \dots, k_{q-1}) \mid k_i \geq 0; \sum_{i=0}^{q-1} k_i = q; \sum_{i=1}^{q-1} i k_i = q^2 - q - 1 - k \right\},
\end{aligned}$$

$$k = \overline{1, q-1}.$$

Доказательство. Очевидно, что

$$(e_{n_0}, e_{n_1}, \dots, e_{n_q}) = \frac{(q+1)!}{k_{-1}! k_0! \dots k_{p-2}!} e_q^{k_q} \dots e_{p-2}^{k_{p-2}} e_{-1}^{k_{-1}} e_0^{k_0} \dots e_{q-1}^{k_{q-1}} + u,$$

где

$$\sum_{i=-1}^{p-2} k_i = q+1, \quad \sum_{i=-1}^{p-2} ik_i = (q-1)(2q+1), \quad k_i \geq 0$$

(т. к. $\sum_{i=0}^q (p-2-m_i) = (q-1)(2q+1)$), а u — добавочный член сте-

пени $< q+1$ относительно совокупности $e_{-1}, e_0, \dots, e_{p-2}$, который возникает за счет перестановок множителей в слагаемых $(e_{n_0}, \dots, e_{n_q})$.

Если исключить слагаемое, соответствующее набору (3), то в силу п. в) среди чисел k_{-1}, \dots, k_{q-1} только одно, не более, равно единице, остальные — нули. Собирая те слагаемые правой части (5), которые содержат одно данное e_k , получим $a_k e_k + u_k$, где u_k — добавочный член полученный суммированием добавочных членов, использованных слагаемых, $k = \overline{-1, q-1}$. В (7') объединяем слагаемые, которые содержат e_{n_i} с $n_i \geq q$ и сумму добавочных членов

$\sum_{k=-1}^{q-1} u_k$. При этом добавочные члены возникают лишь в тех слагае-

мых правой части (5), которые соответствуют наборам (4), указанным в лемме 2. Поэтому для получения $\sum u_k$ достаточно просуммировать добавочные члены, вычисленные в лемме 3. Так как все они кратны $e_{p-3} e_{p-2}^{q-1}$, то суммируем только коэффициенты

$$\begin{aligned} & \frac{(q+1)q}{2} + \frac{(q+1)q}{2} \sum_{k=1}^{q-2} (2k+3) + (q^2-1)q \sum_{k=1}^{q-1} (k+1) = \\ & = \frac{(q+1)q}{2} (q^3 + q^2 - 3q - 1) = -\frac{5}{64}, \end{aligned}$$

поскольку $q = -\frac{1}{2}$, как элемент поля P . Таким образом, $\sum_{k=-1}^{q-1} u_k =$

$= -\frac{5}{64} e_{p-3} e_{p-2}^{q-1}$. Учитывая еще слагаемое, соответствующее на-

бору (3), и выделяя отдельно члены с e_{-1} и e_0 (используя при этом пп. в) и а)), получим (7). При $p=5$ не все соотношения (6) имеют смысл, поэтому выражение для z в этом случае не следует из общей формулы (7). Случай $p=3$ дает известный центральный элемент $z = e_0^2 - e_0 - e_{-1} e_1$. Предложение доказано.

Введём обозначения: $x_{-1} = e_{-1}^p$, $x_0 = e_0^p - e_0$, $x_i = e_i^p$, $i = \overline{1, p-2}$.

Элементы x_i , $i = \overline{-1, p-2}$, как известно, лежат в центре \mathfrak{Z} алгебры \mathfrak{U} (см. [1]). Пусть $R = P[x_{-1}, x_0, \dots, x_{p-2}]$.

Предложение 2. Элементы x_i , $i = \overline{-1, p-2}$, и z порождают центр \mathfrak{Z} алгебры \mathfrak{U} . z — целый над R степени p .

Доказательство. Пусть \mathfrak{A} — подалгебра в \mathfrak{U} , порожденная элементами

$$x_{-1}, x_0, x_1, \dots, x_{q-1}, e_q, e_{q+1}, \dots, e_{p-2}; \quad (8)$$

\mathfrak{B} — подалгебра в \mathfrak{U} , порожденная \mathfrak{A} и центром \mathfrak{Z} . Алгебры \mathfrak{A} и \mathfrak{B} очевидно, коммутативны. \mathfrak{A} изоморфна кольцу многочленов над R от p алгебраически независимых переменных, соответствующих образующим (8), поскольку всякая алгебраическая зависимость между (8) влечет линейную зависимость базисных мономов Пуанкаре—Биркгофа—Витта. Можно рассматривать \mathfrak{U} как левый модуль над \mathfrak{A} . Этот модуль свободен и имеет конечную размерность, равную p^{q+1} . Действительно, мономы

$$e_{-1}^{k_{-1}} e_0^{k_0} e_1^{k_1} \dots e_{q-1}^{k_{q-1}}, \quad (9)$$

где $0 \leq k_i \leq p-1$, $i = \overline{-1, q-1}$, служат его базисом. Пусть имеется зависимость $\sum a_\gamma M_\gamma = 0$, где M_γ пробегает некоторое множество различных мономов (9), а $a_\gamma \in \mathfrak{A}$. Пусть a_γ имеет степень $m_i(\gamma)p$, а M_γ — степень $k_i(\gamma)$ относительно e_i , $i = \overline{-1, q-1}$. Тогда $m_i(\gamma_1)p + k_i(\gamma_1) = m_i(\gamma_2)p + k_i(\gamma_2)$ влечет $m_i(\gamma_1) = m_i(\gamma_2)$ и $k_i(\gamma_1) = k_i(\gamma_2)$, поскольку $0 \leq k_i(\gamma) \leq p-1$. Поэтому предполагая сумму $\sum a_\gamma M_\gamma$ содержащей наименьшее возможное число слагаемых, получим, что все слагаемые имеют одинаковую степень относительно всех e_i , $i = \overline{-1, q-1}$. Но это означает, что в нее входит лишь одно слагаемое, что невозможно, так как в \mathfrak{U} нет делителей нуля. Если упорядочить образующие алгебры \mathfrak{U} следующим образом:

$$e_q, e_{q+1}, \dots, e_{p-2}, e_{-1}, e_0, e_1, \dots, e_{q-1}$$

и рассмотреть базисные мономы Пуанкаре — Биркгофа — Витта относительно такого упорядочения, то сразу видно, что (9) порождают \mathfrak{U} как левый \mathfrak{A} -модуль.

Пусть K — поле частных алгебры \mathfrak{A} и $\mathfrak{U}_{(K)}$ — линейное пространство над K , полученное расширением кольца операторов левого \mathfrak{A} -модуля \mathfrak{U} до K . Размерность $\mathfrak{U}_{(K)}$ над K равна p^{q+1} . \mathfrak{B} рассматриваем тоже как левый \mathfrak{A} -модуль. Тогда $\mathfrak{B}_{(K)}$, как подпространство в $\mathfrak{U}_{(K)}$, полученное расширением кольца операторов \mathfrak{A} -модуля \mathfrak{B} до K , имеет конечную размерность над K . Поэтому коммутативная алгебра $\mathfrak{B}_{(K)}$ является полем — конечным алгебраическим расширением поля K . Отсюда следует, что степень $\mathfrak{B}_{(K)}$ над K есть делитель $\dim \mathfrak{U}_{(K)} = p^{q+1}$. Пусть $[\mathfrak{B}_{(K)} : K] = p^r$. Найденный выше центральный элемент $z \notin K$, т. к. иначе имелась бы зависимость над K между элементами (9). Но $z \in \mathfrak{B}_{(K)}$, поэтому $r \geq 1$. С другой стороны, линейное пространство $\mathfrak{U}_{(L)}$ над полем $L = \mathfrak{B}_{(K)}$, полученное расширением кольца операторов левого \mathfrak{B} -модуля \mathfrak{U} до L , имеет размерность p^{q+1-r} и может рассматриваться как правый \mathfrak{U} -модуль. Его неприводимый \mathfrak{U} -подмодуль имеет последний инвариант Чанга (см. [1]) $\varepsilon_{p-2} = x_{p-2} \neq 0$ и потому имеет размерность p^q . Отсюда $r \leq 1$. Таким образом, $r = 1$ и $\mathfrak{B}_{(K)} = K(z)$, причем z имеет над K степень p .

Покажем, что не существует центрального элемента z_0 алгебры \mathcal{U} , который бы лежал в \mathcal{A} , но не лежал в R . Для того чтобы z_0 был таким элементом, необходимо и достаточно, чтобы $z_0 D_{-1} = 0$ ($z_0 D_{p-2} = 0$, так как $z_0 \in \mathcal{A}$). Положим $\mathcal{A}_i = R[e_{q+i}, \dots, e_{p-2}]$, $i = 0, p-2-q$, $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}$. Индукцией по j доказываются равенства

$$e_q^j D_{-1} = (q+1) j e_q^{j-1} e_{q-1} - (q+1) \binom{j}{2} e_q^{j-2} e_{p-2},$$

$$e_{q+i}^j D_{-1} = (q+i+1) j e_{q+i-1} e_{q+i}^{j-1}, \quad i > 0.$$

Пусть $z_0 = \sum_{j=0}^{p-1} b_j e_q^j$, где $b_j \in \mathcal{A}_1$. Тогда $z_0 D_{-1} = 0$ влечёт

$$\sum_{j=0}^{p-1} \left[b'_j e_q^j - (q+1) \binom{j}{2} b_j e_q^{j-2} e_{p-2} \right] + \left[\sum_{j=0}^{p-1} (q+1) j b_j e_q^{j-1} \right] e_{q-1} = 0,$$

где $b'_j = b_j D_{-1} \in \mathcal{A}_0$. Откуда имеем $b_j = 0$ для $j = \overline{1, p-1}$, т. е. $z_0 \in \mathcal{A}_1$. Пусть $z_0 \in \mathcal{A}_i$ и $z_0 = \sum_{j=0}^{p-1} c_j e_{q+i}^j$, где $c_j \in \mathcal{A}_{i+1}$, $i \geq 1$. Точно так же $z_0 D_{-1} = 0$ влечёт

$$\sum_{j=0}^{p-1} c'_j e_{q+i}^j + (q+i+1) \sum_{j=0}^{p-1} j c_j e_{q+i-1} e_{q+i}^{j-1} = 0,$$

где $c'_j = c_j D_{-1}$ и откуда $c_j = 0$ при $j = \overline{1, p-1}$, т. е. $z_0 \in \mathcal{A}_{i+1}$. При $i = p-2-q$ получим $z_0 \in R$.

Пусть заданы произвольные элементы ϵ_i , $i = \overline{-1, p-2}$, из поля P (или какого-то его расширения). Существует неприводимый над \mathcal{U} модуль \mathfrak{M} , такой, что для всякого $a \in \mathfrak{M}$, $a x_i = \epsilon_i a$, $i = \overline{-1, p-2}$ (см. [1]). Поскольку z принадлежит центру \mathcal{U} , а \mathfrak{M} неприводим над \mathcal{U} , то и $az = \gamma a$. Это означает, что всякая финитная на R точка финитна и на z , т. е. z — целый над R .

Пусть $z^p = \sum_{i=0}^{p-1} a_i z^i$, где $a_i \in \mathcal{A}$. Применяя к этому равенству D_{-1} , получим $\sum_{i=0}^{p-1} a'_i z^i = 0$; если не все $a'_i = a_i D_{-1}$ равны нулю, то мы имеем многочлен над \mathcal{A} степени $< p$, корнем которого является z . Этого не может быть. Следовательно, $a'_i = 0$ и, как замечено выше, $a_i \in \mathfrak{Z}$. По доказанному $a_i \in R$, $i = \overline{0, p-1}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Chang Ho-Jui. Uber Wittsche Lie-Ringe. Hamburg Abhandl. 14, 1941, S. 151—184.