Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

V. T. Zhukov, A. V. Zabrodin, O. B. Feodoritova, Features of the numerical simulation of the target of inertial thermonuclear synthesis in the approximation of heat conduction gas dynamics,
Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz., 1994, Volume 34, Number 12, 1852–1866

https://www.mathnet.ru/eng/zvmmf2474

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
https://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 18.97.14.82
December 17, 2025, 09:00:30

ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 34, 1994 № 12

УДК 519.6:533.7

© 1994 г. В. Т. ЖУКОВ, А. В. ЗАБРОДИН, О. Б. ФЕОДОРИТОВА

(*Москва*)

ОСОБЕННОСТИ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ МИШЕНИ ИНЕРЦИАЛЬНОГО ТЕРМОЯДЕРНОГО СИНТЕЗА В ПРИБЛИЖЕНИИ ТЕПЛОПРОВОДНОЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ [1)]

Обсуждаются характерные особенности и результаты расчетов динамики мишени инерциального тяжелоионного термоядерного синтеза (ИТИС). Расчеты основаны на разностной дискретизации нестационарных двумерных уравнений теплопроводной газовой динамики на подвижных криволинейных сетках с выделением особенностей — контактных разрывов, ударных волн. Особое внимание уделено исследованию качества передачи методом эволюции малых возмущений в процессе развития рэлей-тейлоровской неустойчивости.

Введение

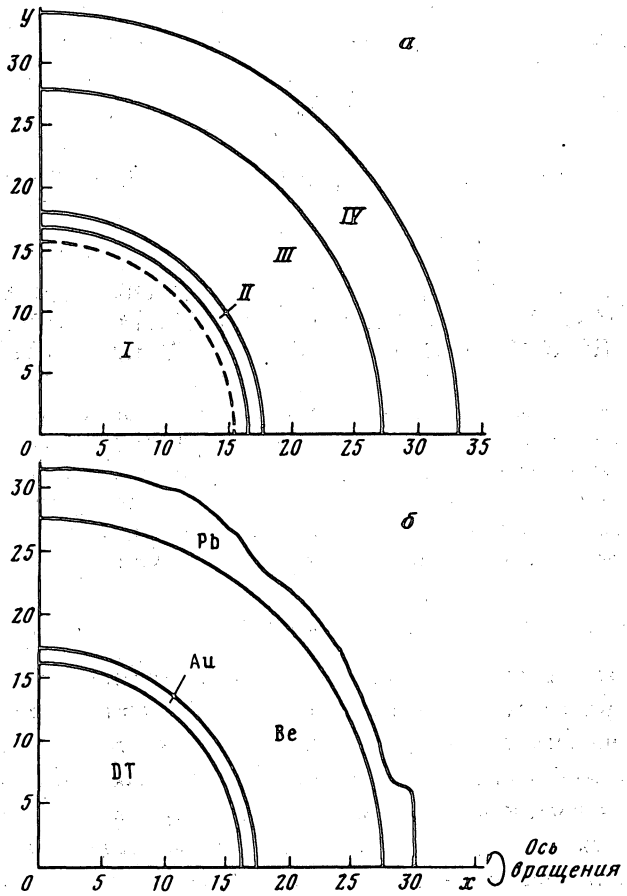
В [1] изложена конструкция численного метода решения двумерных уравнений динамики теплопроводного газа в областях сложной формы. Метод использует подвижные криволинейные сетки и обеспечивает возможность расчета плоских и осесимметричных течений теплопроводного газа с выделением особенностей — контактных разрывов, ударных волн и пр., т. е. метод адаптируется к структуре течения.

В настоящей работе обсуждаются характерные особенности и результаты расчетов динамики мишени инерциального тяжелоионного термоядерного синтеза (ИТИС) [2], [3], полученные с помощью метода [1]. Задача расчета мишени ИТИС является с вычислительной точки зрения трудной. Это обусловлено сложными динамическими процессами, значительным изменением геометрических масштабов в процессе сжатия и в особенности явлениями гидродинамической неустойчивости Рэлея — Тейлора. Такого рода трудности характерны для многих задач (см., например [4], [5]). Поэтому приводимые результаты, наряду с их физическим содержанием, служат иллюстрацией возможностей метода [1] и практическим свидетельством его работоспособности. Метод решения уравнений динамики теплопроводного газа реализован на многопроцессорной вычислительной системе с распределенной памятью. Заключительная часть статьи посвящена некоторым аспектам распараллеливания алгоритма [1].

§ 1. Численное исследование динамики мишени ИТИС

1. Известно, что благоприятным фактором для создания условий термоядерного горения является сферическое сжатие вещества. Однако для мишеней инерциального термоядерного тяжелоионного синтеза ИТИС, к которым относится рассматриваемая здесь мишень ТИНАТА [2], [3], характерно несферическое

[1)] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-012-516).



Фиг. 1

облучение — ионные пучки располагаются в одной плоскости. Степень несферичности облучения мишени зависит от многих факторов, что существенно усложняет задачу симметризации сферического сжатия. Необходимо учитывать влияние на динамику мишени малых возмущений, которые неизбежно возникают и в силу физических особенностей мишени могут возрастать в процессе развития неустойчивости Рэлея—Тейлора до величин, существенно нарушающих сферичность сжатия. В полной постановке задача расчета динамики мишени с учетом возмущений является трехмерной. В данной работе ограничимся двумерным осесимметричным случаем.

Успех численного моделирования процессов с рэлей-тейлоровской неустойчивостью зависит от качества передачи численным методом эволюции малых возмущений [4], [5]. Надежные расчеты позволяют изучить влияние различных факторов несферичности на процесс сжатия мишени и оценить конструктивные способы симметризации. С этой целью ставятся две модельные задачи, сформулированные В. С. Имшенником и М. Д. Чуразовым. В рамках данной статьи основное внимание уделяется не физической интерпретации результатов,

а фактическому показу работоспособности метода [1] на задачах ИТИС с обсуждением характерных особенностей и трудностей их решения.

В задаче 1 рассматривается сферически-симметричная мишень, представляющая собой 4 вложенных друг в друга сферических слоя (см. фиг. 1, *а*). Внешние области Be и Pb являются приемниками энергии тяжелых ионов. Удельная мощность энерговложения Q в сферических координатах (r, φ, θ) зависит в каждой из областей Be и Pb только от угла θ (полярного расстояния):

$$Q(\theta) = Q_0 (1 + m \cos(n\theta)), \tag{1}$$

где Q_0 — постоянная (своя для каждой области), m — амплитуда возмущения, n — номер гармоники (волновое число). Вложение энергии постоянно во времени и его продолжительность (17 нс) сравнима с характерным гидродинамическим временем мишени (20 нс). В основе выбора амплитуды и номера гармоники лежат эмпирические соображения, согласно которым интерес представляют, в частности, значения $m = 0.05$, $n = 8$. Асимметрия вида (1) моделирует, например, неоднородности облучения.

В задаче 2 внешняя оболочка (Pb) мишени имеет специальный профиль [2] (см. фиг. 1, *б*): форма оболочки подбирается так, чтобы пучки ионов (оси пучков направлены перпендикулярно оси вращения) останавливались на внешней границе золотой оболочки (Au), отдавая свою энергию в областях Pb и Be. Такое профилирование толщины внешнего слоя Pb производится для компенсации несимметрии энерговложения и обеспечения благоприятных условий, близких к условиям сферического сжатия. Энерговложение в каждой из двух внешних областей задается постоянным и соответствует среднему энерговложению Q_0 задачи 1. Таким образом, отвлекаясь от физической сути, можно считать, что малые возмущения внесены в геометрическую форму мишени.

2. Для описания течения теплопроводного газа выбрана система дифференциальных уравнений газовой динамики с теплопроводностью в переменных Эйлера, записанная в форме законов сохранения и имеющая вид

$$\begin{gathered} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{U}) = 0, \quad \frac{\partial \rho \mathbf{U}}{\partial t} + \operatorname{div} \Pi = 0. \\ \frac{\partial e}{\partial t} + \operatorname{div}(e + p)\mathbf{U} + \operatorname{div} \mathbf{W} = Q. \end{gathered} \tag{2}$$

Здесь ρ — плотность, $\mathbf{U}$ — вектор скорости среды, p — давление, $e = \rho(E + |\mathbf{U}|^2/2)$ — полная энергия единицы объема, E — внутренняя энергия единицы массы, Π — тензор плотности потока импульса; поток вектора импульса $\rho\mathbf{U}$ в направлении единичного вектора $\mathbf{n}$ есть $p\mathbf{n} + (\mathbf{U}, \mathbf{n})\rho\mathbf{U}$; $\mathbf{W} = -K \operatorname{grad} T$ — поток тепла, $K = K(T, \rho)$ — коэффициент теплопроводности, T — температура, Q — источник тепла (1).

Система (2) дополняется уравнением состояния

$$E = E(\rho, T), \quad p = p(\rho, T), \tag{3}$$

а также начальными (при $t = t_0$) и граничными условиями на границе области течения газа.

Таблица 1

Параметры	I		II	III	IV
	DT-газ	DT	Au	Be	Pb
r	15.3	16.6	17	27.5	32.2
ρ_0	$2\cdot10^{-4}$	0.224	19.5	1.84	11.4
R	6638	6638	3443	4741	3448
K_0	$1.52\cdot10^{13}$	$1.52\cdot10^{13}$	$1.95\cdot10^{13}$	$4.16\cdot10^{17}$	$1.95\cdot10^{13}$
m	3	3	6	6.5	6
ν	1	1	2	2	2

Рассмотрим пространственно-двумерную модель, предполагая, что трехмерное течение газа является осесимметричным (в других задачах оно может быть плоско-параллельным). Для решения системы уранений (2) используется методика интегрирования уравнений газовой динамики с теплопроводностью [1], в которой разностный метод строится на подвижных криволинейных сетках с выделением особенностей искомого решения (контактных разрывов, ударных волн и др.), т. е. метод является адаптивным. Расчетная область может быть сложной формы и тогда до начала расчета она разбивается на элементарные (математические) области четырехугольной формы. В каждой из двух рассматриваемых задач расчетная область имеет достаточно простую форму, поэтому дополнительного структурирования не проводится. Элементарная область разбивается двумя семействами координатных линий на криволинейные четырехугольники — ячейки сетки, стороны которых приближаются дугами окружностей (или отрезками прямых), а сеточные функции задаются в центрах ячеек. Сетка строится на каждом шаге по времени в соответствии с картиной течения. Разностная схема строится на основе интегральных законов сохранения, записанных для каждой ячейки сетки с учетом ее движения. Алгоритм расчета основан на расщеплении сеточных уравнений на газодинамический и тепловой этапы. При нулевом коэффициенте теплопроводности получается известный адаптивный метод решения уравнений Эйлера [6, гл. IV] с признанной репутацией, являющийся обобщением схемы Годунова. Расчет теплопереноса основан на вычислительных схемах [7]—[10].

Для всей схемы в целом обеспечивается выполнение принципов адаптации, аппроксимации, консервативности и групповой инвариантности. Последнее означает, что если решение исходной задачи выдерживает преобразование сдвига или вращения, то разностное решение обладает той же симметрией; строгое определение групповой инвариантности дано в [11]. Это свойство представляется важным, особенно в задачах, где малые начальные возмущения симметрии задачи возрастают со временем, например, в процессе развития гидродинамической неустойчивости.

3. Задача 1. Схематически сечение мишени меридиональной плоскостью в начальный момент времени показано на фиг. 1, *а*; оси координат Ox и Oy выбраны так, что ось Ox является осью симметрии; показан один квадрант

$x \geq 0$, $y \geq 0$ в силу наличия оси и плоскости симметрии ($x = 0$). Полярное расстояние — угол θ — отсчитывается от оси Ox ($0 \leq \theta \leq 0{,}5\pi$). Область I — термоядерное DT-топливо (смесь трития и дейтерия), причем внутренняя часть области заполнена DT-газом, а внешняя ее часть — твердым DT. Область II (Au) — холодный сжимающий поршень. Внешние слои являются приемниками энергии тяжелых ионов: III — Be, IV — Pb. В каждой области заданы уравнения состояния идеального газа:

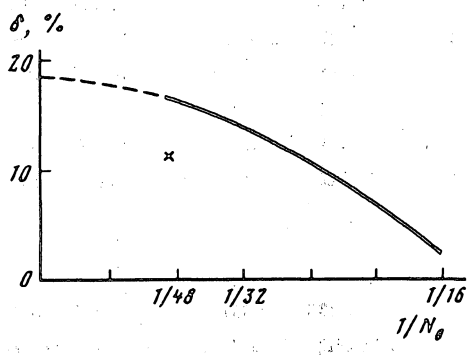
$$E = RT/(\gamma - 1), \quad P = R\rho T.$$

Постоянная $\gamma = 5/3$; значения параметра R, координаты границ сферических областей r, начальная плотность ρ_0 и вид коэффициента теплопроводности $K(T, \rho) = K_0 T^m/\rho^\nu$ указаны в табл. 1.

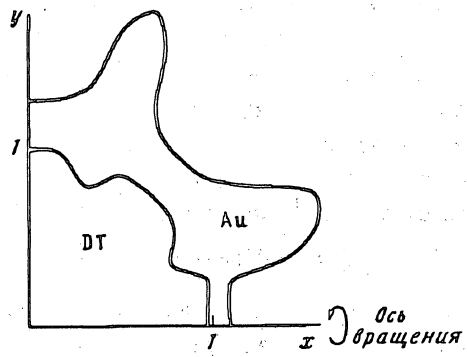
Заметим, что граница между DT-газом и DT-твердым как контактная не выделялась, но распределение плотностей в начальных условиях было ступенчатым. Математическая область расчета — криволинейный четырехугольник, его стороны (дуга внутренней окружности $r = r_0$, внешняя граница мишени $r = R(t, \theta)$ и отрезки осей координат) служат внешними границами расчетной области. Вырез в окрестности начала координат шара малого радиуса $r_0 = 0.01$ является вычислительным приемом, облегчающим проведение расчетов. На внешних границах ставятся краевые условия. На трех границах ($x = 0$, $y = 0$ и $r = r_0$) заданы условия симметрии. Внешняя граница $r = R(t, \theta)$ подвижна; на начальной стадии расчета ($t < 12$ нс) она описывалась как лагранжева: на ней задавались условия свободной границы (нулевые давление и поток тепла); при достижении разлетающимся газом сверхзвуковых скоростей она описывалась как неподвижная эйлерова граница. Внутренние границы DT—Au, Au—Be, Be—Pb в расчете выделялись как лагранжевы и вместе с внешними границами служили опорными для построения адаптирующейся разностной сетки.

В областях III и IV в течение времени $0 \leq t \leq 17$ нс происходит вложение энергии пучками ионов равномерно по массе в виде (1) со средними значениями $Q_0 = 145$ и $Q_0 = 48$ соответственно ($[Q] = 10^{20}$ эрг/г·с). В задаче 1, как было сказано в п. 1, ограничиваемся неоднородностью источника энергии с амплитудой $m = 0.05$ и волновым числом $n = 8$. В каждой из областей III и IV источник зависит только от полярного расстояния — угла θ. Будем направление θ называть угловым.

Неравномерность энерговложения приводит к возмущению сферической картины течения и искажению границ раздела DT—Au, Au—Be, Be—Pb и внешней границы мишени. В процессе сжатия мишени существуют стадии, когда движение границ является гидродинамически неустойчивым. На границе Au—Be неустойчивость Рэлея — Тейлора может проявиться на этапе ускорения тяжелой золотой оболочки более легким Be; на границе DT—Au — на этапе торможения золотой оболочки более легким DT-топливом. Как показали одномерные расчеты, проведенные с помощью алгоритма [12], этап ускоренного движения границы Au—Be является продолжительным по времени — эта граница движется с ускорением примерно до 20 нс, а торможение границы Au—DT начинается после



Фиг. 2



Фиг. 3

20 нс и является кратковременным. Граница Be—Pb устойчива и вычислительных трудностей не доставляет.

Изложим более подробно исследование неустойчивых границ Au—Be и DT—Au. В расчетах с рэлей-тейлоровской неустойчивостью хорошо известна сглаживающая роль аппроксимационной вязкости. Поэтому для адекватного описания вычислительной схемой таких процессов необходимо использовать подробные сетки. Для выбора сетки и оценки влияния разностной аппроксимации на движение наиболее деформируемой границы Au—Be были проведены расчеты на последовательности сгущающихся сеток. Эти расчеты проводились в газодинамической постановке, т. е. без учета теплопроводности, чтобы исключить теплопроводность как сглаживающий фактор. В расчетах варьировалось число узлов сетки N_θ по угловому направлению: по радиальному направлению число узлов $N_r = 130$ было неизменным и равным 40, 20, 40, 30 в областях I — IV соответственно.

На фиг. 2 показана зависимость от числа узлов N_θ относительной деформации $\delta = (r_{max} - r_{min})/(r_{max} + r_{min})$ границы Au—Be на некоторый момент времени $t = 20.7$ нс; здесь r_{max}, r_{min} — максимальное и минимальное расстояния от данной границы до начала координат. График показывает, что при увеличении числа узлов N_θ деформация увеличивается (сплошная часть кривой), но при числе $N_\theta = 48$ уже заметна тенденция к насыщению (параболическая экстраполяция (штриховая часть кривой) по трем точкам дает значение относительной деформации ~ 19%). Для представления о влиянии теплопроводности на степень деформации границы Au—Be был проведен расчет с учетом теплопроводности на сетке с $N_\theta = 48$; на фиг. 2 крестиком нанесено значение относительной деформации границы на тот же момент времени.

Основные расчеты динамики мишени проводились с учетом теплопроводности с числом узлов сетки $N_\theta = 48$ и $N_r = 130$. Расчет мишени, результаты которого рассматриваются ниже, закончен при $t = 21.84$ нс. Максимальная толщина золотой оболочки к этому времени почти в 9 раз превысила минимальную ее толщину (см. фиг. 3). Заметим, что 5%-ное возмущение энерговложения обусловливает к концу энерговложения 1%-ное искажение изначально сферической границы

Таблица 2

Параметры мишени	Задача 1	Задача 2
t нс	21.84	22.57
Средняя плотность DT, г/см^3	265	805
Средняя температура DT, Кэв	0.6	1.2
Коэффициент сжатия DT	$5\cdot10^3$	$15\cdot10^3$
Амплитуда границы Au—Be, %	13	14
Амплитуда границы Au—DT, %	5	32

золотой оболочки; дальнейшее развитие гидродинамической неустойчивости приводит к значительным деформациям золотой оболочки (фиг. 3), причем на стадии сжатия, когда термоядерные параметры еще не достигнуты. В табл. 2 приведены основные результаты расчета. Характерными для термоядерного горения считаются значения плотности и температуры порядка 200 г/см^3 и 2 Кэв соответственно.

Отметим некоторые особенности картины течения, обусловливающие трудности численного расчета. На начальной стадии энерговложения на границе Au—Be формируется ударная волна, достигающая DT-топлива к 4 нс. Ударная волна незначительно отличается от сферической и фокусируется в центре мишени ~ 15 нс. Отраженная ударная волна достигает золотой оболочки к моменту $t = 18.5$ нс, теряя свою интенсивность. Со временем течение в DT-области все более отличается от сферического. Наиболее активные процессы протекают в окрестности оси вращения Ox (т. е. на полюсе) вблизи границы DT—Au.

Для детального изучения развития рэлей-тейлоровской неустойчивости был проведен анализ функций, описывающих границы раздела областей. Каждая граница, заданная на сетке дискретным набором точек $\{(x_i, y_i),\ i = 1, 2, \ldots, NG\}$, определялась как непрерывная функция $R(\theta)$ угла θ с помощью линейного восполнения; $R(\theta)$ — это расстояние от начала координат до точки границы (x, y) с угловой координатой $\theta = \operatorname{arctg}(y/x)$, здесь $0 \le \theta \le \pi/2$. Предполагается, что это однозначная функция угла θ. В противном случае, (а именно такая ситуация возникает на границе на заключительной стадии расчета) анализ границы не проводится. Ряд Фурье функции $R(\theta)$ на отрезке $0 \le \theta \le \pi/2$ вследствие наличия плоскости симметрии имеет вид

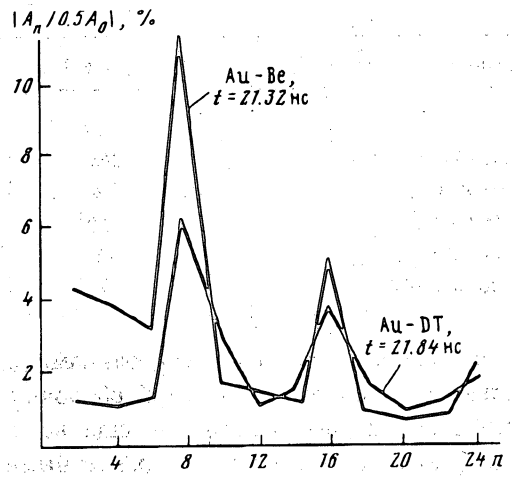
$$R(\theta) = 0.5A_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_{2k} \cos(2k\theta), \tag{4}$$

где

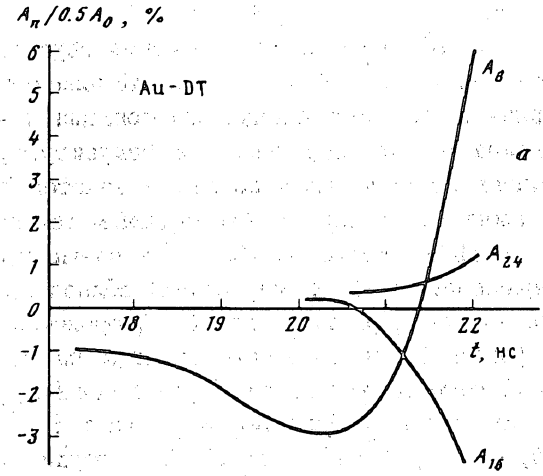
$$A_{2k} = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} R(\theta)\cos(2k\theta)\,d\theta, \quad k = 0, 1, \ldots.$$

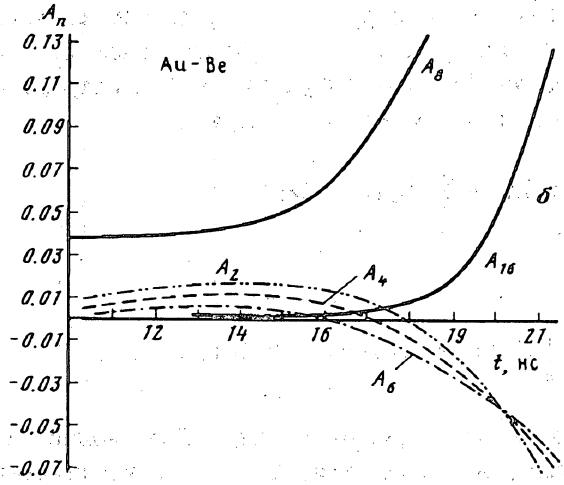
Будем нумеровать гармоники и их амплитуды волновым числом $n = 2k$, и характеризовать величину возмущения относительной амплитудой $|A_n/(0.5A_0)|$.

Ясно, что сеточное происхождение функции $R(\theta)$ исключает из со-


|Aп/0.5A0|, %
Au-Be,
t = 21.32 нс
Au-DT,
t = 21.84 нс
10
8
6
4
2
4
8
12
16
20
24 n

Фиг. 4


Aп/0.5A0, %
Au-DT
A8
a
A24
A16
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
18
19
20
22
t, нс


Aп
Au-Be
A8
б
A16
A2
A4
A6
0.13
0.11
0.09
0.07
0.05
0.03
0.01
-0.01
-0.03
-0.05
-0.07
12
14
16
19
21
t, нс

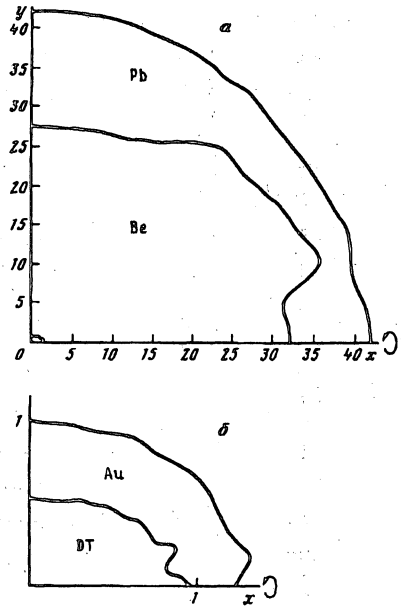
Фиг. 5

держательного рассмотрения коротковолновые гармоники. Напомним, что в энерговложение внесено возмущение по формуле (1), т. е. возмущена 8-я гармоника $\cos(8\theta)$ с 5%-ной амплитудой. Устойчивая граница Be—Pb унаследовала это возмущение, но относительная амплитуда возмущения составила менее 1% и практически не изменялась во времени.

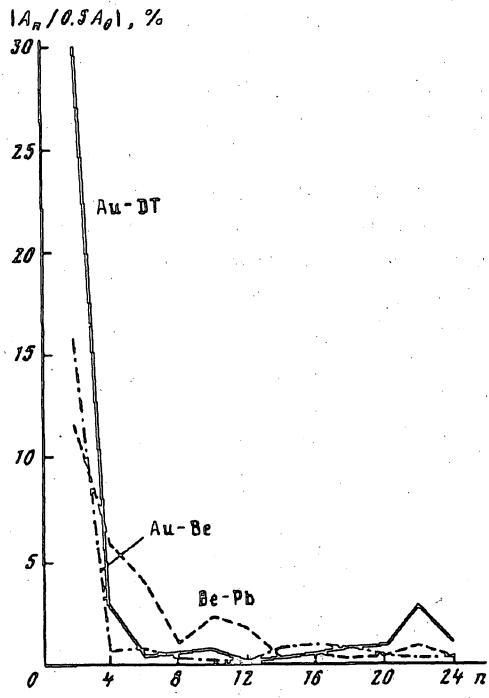
В разложении (4) для границ Au—Be и DT—Au (волновом спектре) представлены в основном лишь гармоники с малыми номерами $n = 2 \div 16$ (см. фиг. 4, где показан волновой спектр этих границ на некоторые характерные моменты времени). Поведение во времени ведущих гармоник для данных границ показано на фиг. 5. Обратим внимание на фиг. 5, *а*: амплитуда 8-й гармоники, основной в спектре границы DT—Au, сначала возрастает по абсолютной величине (и по знаку отрицательна), а затем убывает и меняет знак на противоположный, принимая к моменту $t = 21.3$ нс значение, близкое к 0. Смена знака основной гармоники задерживает развитие неустойчивости, и к концу расчета относительная амплитуда 8-й гармоники составляет для границы DT—Au около 6%. Для границы Au—Be зависимость от времени амплитуд гармоник с номерами 2, 4, 6, 8 и 16 приведена на фиг. 5, *б*. Появление в спектре границы помимо основной 8-й гармоники младших гармоник с номерами 2, 4, 6 — это следствие осесимметричной постановки задачи (полюс $\theta = 0$ и экватор $\theta = \pi/2$ мишени различаются), а заметное выделение 16-й гармоники указывает на нелинейность задачи. Изучение поведения амплитуды 8-й гармоники в зависимости от времени в логарифмическом масштабе показывает хорошее соответствие с линейной теорией эволюции рэлей-тейлоровских мод для сферической границы переменного радиуса (детально об этом см. [13]). Отметим, что инкремент роста 16-й гармоники примерно в два раза больше, чем инкремент 8-й гармоники — это указывает на их нелинейное взаимодействие, так как по линейной теории отношение инкрементов гармоник равно корню квадратному из отношения их волновых чисел, т. е. $\sqrt{2}$.

Обратим внимание, что на конечной стадии сжатия $t > 20.5$ нс для границы Au—Be среди гармоник с номерами $n > 8$ наиболее заметна 16-я гармоника $\cos(16\theta)$; более того, в конце расчета ее амплитуда сравнима с амплитудой основной гармоники $\cos(8\theta)$ (8% и 19% соответственно). Это значит, что выбор числа точек $N_\theta = 48$ по угловому направлению не является избыточным, как это может показаться на первый взгляд. Действительно, на длину волны 16-й гармоники при $N_\theta = 48$ приходится 12 точек — такое число точек соответствует вычислительному опыту и данным других работ (см., например, [4], [5]).

Из полученных результатов следует важный вывод: методика правильно передает эволюцию возмущений. В задаче 2 (см. ниже) a priori было неизвестно, появятся или нет возмущения золотой оболочки, связанные с начальным профилированием внешней оболочки мишени. На основе сделанного вывода можно полагать, что если в задаче 2 отсутствует рост возмущений, приводящий к критической деформации золотой оболочки, то это обусловлено удачным профилированием внешней оболочки, а не погрешностью методики (например,



Фиг. 6



Фиг. 7

выглаживанием возмущений аппроксимационной вязкостью). В этом состоит методическая связь двух задач.

4. Задача 2. Эта задача отличается от задачи 1 двумя деталями: внешняя оболочка мишени имеет специальный профиль и энерговложение в областях *III*, *IV* равно средним значениям Q_0 из (1) по этим областям.

Схематически мишень в начальный момент времени представляет собой осесимметричное тело, сечение которого меридиональной плоскостью показано на фиг. 1, *б*. Профилирование внешней оболочки производится для обеспечения полного торможения тяжелых ионов на внешней сферической границе золотой оболочки в предположении постоянного по массовой длине пробега (оси пучков направлены перпендикулярно оси вращения).

Одна из особенностей поведения решения данной задачи, как и предыдущей,— это возможность проявления на двух внутренних границах Au—Be и DT—Au гидродинамической неустойчивости Рэлея — Тейлора. Роль начального возмущения выполняет в данной задаче неравномерная толщина внешней свинцовой оболочки, порождающая угловую зависимость воздействия внешних оболочек на золотую оболочку. В процессе сжатия это воздействие может породить и порождает возмущения контактных границ Au—Be и DT—Au.

Численные расчеты были проведены в нескольких вариантах. Расчеты, представленные здесь, проводились на сетке с числом узлов в областях *I*—*IV* по радиальному направлению 35, 20, 35, 30 соответственно, а по угловому число

узлов составляет 48. В DT-области число узлов по радиальному направлению взято 35, но они сгущались к контактной границе DT—Au по геометрической прогрессии. После схождения основной ударной волны к центру мишени сетка в радиальном направлении в процессе счета перестраивалась постепенно в равномерную (это предусмотрено возможностями программы). Полное число ячеек сетки 120×48, что почти совпадает с сеткой задачи 1.

Результаты расчетов приведены на фиг. 6, 7. На фиг. 6 показана конфигурация областей мишени в момент окончания счета ($t = 22.57$ нс). Напомним, что внешняя граница мишени на начальной стадии ($t < 12$ нс) описывалась как лагранжева граница и на ней задавались условия свободной границы (нулевые давление и поток тепла). Затем при достижении разлетающимся газом сверхзвуковых скоростей она описывалась как неподвижная эйлерова граница; именно эта (а не реальная физическая) граница показана на фиг. 6, *а* как внешняя. На фиг. 7 приведен волновой спектр (зависимость отношения $|A_n/0.5 \cdot A_0|$ от номера n) границ Au—DT (сплошная линия), Au—Be (штрихпунктирная линия) и Be—Pb (штриховая линия), $t = 22.67$ нс. Из этих графиков видно, что специальное профилирование внешней оболочки мишени порождает возмущения внутренних границ мишени, в которых основной является 2-я гармоника $\cos(2\theta)$ и практически отсутствуют другие гармоники (для $n \geq 8$ относительные амплитуды не превышают 2%). Границы золотой оболочки (см. фиг. 6, *б*) в сечении меридиональной плоскостью — это почти эллипсы. Сравнивая этот рисунок с фиг. 3, можно заключить, что асимметрия в задаче 2 (в отличие от задачи 1 с возмущенным энерговложением) приводит к допустимой деформации золотой оболочки и не препятствует достижению высоких параметров сжатия, близких к термоядерным (см. табл. 2).

§ 2. О реализации метода на многопроцессорной системе

Метод [1] программно реализован на многопроцессорной вычислительной системе МКМД-архитектуры (множество команд — множество данных). В локальной памяти каждого процессора такой системы хранятся свой экземпляр программы и данные; быстрые обмены данными производятся только между ближайшими соседями (в простых топологических структурах — линейка, решетка и т. п.). Изложим результаты и некоторые аспекты распараллеливания данного алгоритма на примере задачи расчета термоядерной мишени.

Общественный интерес к параллельным вычислениям по-новому осветил проблему эффективности алгоритмов. Среди разностных методов решения эволюционных задач хорошо распараллеливаются явные однородные (сквозного счета) схемы — в них решение на очередной момент времени во всех узлах сетки может быть найдено одновременно. Схема счета [1] для уравнений неразрывности и сохранения импульса является явной, для уравнения энергии — явно-итерационной, т. е. сохраняет алгоритмическую структуру явной схемы. Однако она не является однородной — на каждом шаге по времени сначала производится расчет движения внутренних границ (появление которых связано с выделением особенностей) и внешних границ расчетной области; затем по

полученным граничным линиям как опорным строится сетка и только потом производится расчет сеточных функций во внутренних узлах сетки. Эффективное распараллеливание таких схем на вычислительных системах с распределенной памятью труднее, чем распараллеливание явных однородных схем. Разделим алгоритм перехода с нижнего слоя на новый верхний временной слой рассматриваемой схемы на 4 этапа:

1) расчет нового положения границ;

2) вычисление по положению границ координат узлов разностной сетки на верхнем слое;

3) расчет на верхнем слое газодинамических величин во внутренних узлах сетки с учетом температуры нижнего слоя, но без учета переноса тепла теплопроводностью;

4) коррекция внутренней энергии с учетом теплопроводности (решение уравнения теплопроводности).

Алгоритм параллельного счета, используемый нами, имеет иерархическую структуру, состоящую из программ нескольких уровней. Управление задачей, включая начальную загрузку и сбор результатов, осуществляет процессор HOST. Второй уровень иерархии — процессор BOUND + GRID для расчета границ и сеток. Группы процессоров третьего уровня, упорядоченные связями в линейку, проводят расчет газодинамических величин с учетом теплопроводности во внутренних ячейках сетки по совокупности из нескольких физических областей. Такие объединения областей называются элементарными (математическими) областями. Число линеек из процессоров равно числу математических областей; в данном случае структурирования мишени такая область одна. После того, как расчет всех этапов закончен, в процессоре BOUND + GRID собирается информация о граничных значениях, а также определяется величина нового шага по времени, после чего процесс расчета повторяется.

Приведем данные, характеризующие вычислительную трудоемкость алгоритма в случае задачи расчета термоядерной мишени. Пусть число узлов сетки по радиальному направлению $N_r = 120$ и по угловому $N_\theta = 48$. Объем вычислений на одном шаге по времени составляет в данном расчете примерно $3 \cdot 10^4$ операций на один узел сетки, и при характерном числе шагов по времени $\sim 10^4$ полный объем вычислений составит $\sim 2 \cdot 10^{12}$ операций. Это означает, что при быстродействии ЭВМ в 1 Мегафлопс такой расчет будет занимать около 600 часов машинного времени.

Распределение вычислительной работы по этапам 1)—4) неодинаково и в процентном соотношении выглядит так:

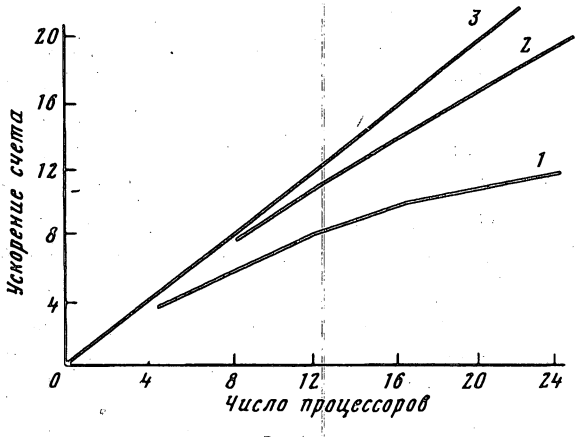
1) расчет границ менее 1%;

2) расчет сеток (алгоритм двойной интерполяции) $\sim 2\%$;

3) расчет газодинамики $\sim 17\%$;

4) расчет теплопроводности $\sim 80\%$.

Заметное лидирование теплового этапа связано с тем, что при решении уравнения теплопроводности на каждом шаге по времени число арифметических операций пропорционально произведению числа узлов сетки $M = N_r \times N_\theta$ на



Фиг. 8

число итераций $MI \cong \sqrt{\tau \times M}$; вычислительные затраты на расчет сеток (двойной интерполяцией) и газодинамический этап пропорциональны числу узлов сетки.

Первый вариант параллельной программы основан на сеточном распараллеливании этапов 3) и 4). Линейка процессоров $F_1, \ldots, F_n$ служит для параллельного расчета сеточных функций u, v, ρ, E по фрагментам сеточной области. Эти фрагменты получаются из общего множества ячеек сетки разбиением исходного массива сеточными линиями углового («вертикального») направления. На газодинамическом этапе обмены между процессорами выполняются для передачи значений сеточных функций на вертикальных границах фрагментов и для расчета интегральных величин по физическим областям и границам. На тепловом этапе обмены данными на границах фрагментов выполняются на каждой итерации.

Эффективность параллельной программы оценивалась без учета использования двух процессоров верхнего уровня. Зависимость ускорения счета от числа процессоров показана на фиг. 8 (вариант *1*). С ростом числа процессоров фактическая эффективность снижается и, например, при 24 процессорах составляет ~ 60%, т. е. достигается ускорение расчета в 15 раз по сравнению с однопроцессорным расчетом.

Падение эффективности связано в основном с наличием линейного нераспараллеленного участка алгоритма (расчет границ и сеток). Поэтому был сделан следующий шаг в развитии параллельной программы. Он состоял в использовании дополнительного параллелизма: расчет границ и сеток был совмещен с расчетом теплопроводности. Для повышения эффективности были также буферизованы (совмещены со счетом) обмены данными по границам сеточных фрагментов. В результате этих мер эффективность заметно повысилась (вариант *2* на фиг. 8) и при 24 процессорах составила 78%.

Заметим, что такой прием повышения эффективности программы является тактическим и при увеличении числа процессоров не снимает проблему повышения эффективности другими способами, например, распараллеливанием алгоритмов

расчета сеток и границ. Особенно это относится к случаю более трудоемких способов построения сеток, например квазиортогональных.

Отметим также, что эффективность счета определялась на фиксированной разностной сетке во всей области расчета, т. е. с ростом числа процессоров объем вычислений в каждом процессоре уменьшался пропорционально их числу, а накладные расходы на обмены возрастали. Такой способ оценки ускорения расчета в зарубежной литературе называется fixed speedup, в отличие от ускорения scaled speedup, когда с ростом числа процессоров объем вычислений в каждом процессоре сохраняется неизменным. В рассматриваемом случае ясно, что оценка эффективности вторым способом будет более высокой.

Итак, полученные результаты показывают, что для ВС с числом процессоров $n \sim 100$ задача распараллеливания метода [1] может быть решена успешно с использованием простейших видов параллелизма — геометрического (сеточного) и функционального (по процессам). Отличие фактического ускорения счета от идеального n-кратного ускорения (прямая *3* на фиг. 8) является для вычислительной практики незначительным. Для числа процессоров $n \sim 1000$ задача эффективного распараллеливания является более трудной и для ее решения, по-видимому, потребуется привлечение других резервов параллелизма, присущих схеме (например, распараллелить алгоритмы расчета сеток и границ).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Жуков В. Т., Забродин А. В., Феодоритова О. В.* Метод решения двумерных уравнений динамики теплопроводного газа в областях сложной формы//Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1993. Т. 33. № 8. С. 1246—1256.
2. *Basko M. M., Imshennik V. S., Churazov M. D.* Overview of directly driven HIF targets//Particle Accelerators. 1992. V. 37—38. P. 505—512.
3. *Баско М. М., Имшенник В. С., Кошкарев Д. Г. и др.* Управляемый тяжелоионный синтез и дейтериевые мишени//ВАНТ. Сер. Матем. моделирование физ. процессов. М., 1989. Вып. 3. С. 84—97.
4. Исследование гидродинамической устойчивости с помощью ЭВМ/Под ред. К. И. Бабенко. М.: ИПМатем. АН СССР, 1981.
5. *Гамалий Е. Г., Гасилов В. А., Розанов В. Б. и др.* Исследование устойчивости процесса сжатия тонких стеклянных оболочек//Изучение гидродинамич. неустойчивости числ. методами. М.: ИПМатем. АН СССР, 1980. С. 28—64.
6. *Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я. и др.* Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976.
7. *Жуков В. Т., Феодоритова О. Б.* Интерполяционные схемы для численного решения уравнения теплопроводности: Препринт № 80. М.: ИПМатем. АН СССР. 1988.
8. *Жуков В. Т., Феодоритова О. Б.* Разностные схемы для уравнения теплопроводности на основе локальных среднеквадратичных приближений: Препринт № 97. М.: ИПМатем. АН СССР. 1989.
9. *Жуков В. Т.* Разностные схемы локальных итераций для параболических уравнений: Препринт № 173. М.: ИПМатем. АН СССР, 1986.
10. *Жуков В. Т., Феодоритова О. Б.* Разностные схемы решения нестационарного двумерного уравнения тееплопроводности на криволинейных сетках и их реализация на параллельной вычислительной системе//ВАНТ. Сер. Матем. моделирование физ. процессов. М., 1992. Вып. 3. С. 66—71.

11. *Шведов А. С.* Инвариантные разностные схемы для уравнений газовой динамики//Докл. АН СССР. 1987. Т. 292. № 1. С. 46—50.
12. *Забродин А. В., Каждан Я. М., Луцкая Т. Ю. и др.* Адаптирующийся метод численного интегрирования уравнений движения теплопроводной среды//ВАНТ. Сер. Методика и программы числ. решения задач матем. физ. М., 1985. Вып. 1. С. 3—12.
13. *Жуков В. Т., Забродин А. В., Имшенник В. С., Феодоритова О. Б.* Численное моделирование мишени тяжелоионного термоядерного синтеза в приближении теплопроводной газодинамики: Препринт № 41. М.: ИПМатем. РАН, 1993.

Поступила в редакцию
29.09.93