Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

M. T. Terekhin, Solutions of differential equations with deviating argument,
Differ. Uravn., 1983, Volume 19, Number 4, 597–602

https://www.mathnet.ru/eng/de4815

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
https://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 18.97.14.80
December 11, 2025, 06:56:17

УДК 517.929

М. Т. ТЕРЕХИН

О РЕШЕНИЯХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ

В работе изучаются вопросы существования, непрерывной зависимости решения от начальной функции и правой части, существования периодического решения системы дифференциальных уравнений с отклонением, зависящим от неизвестной функции и ее производной.

§ 1. СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ, НЕПРЕРЫВНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ

Пусть E_n — n-мерное векторное пространство.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x}(t)=f(t,\ x(t),\ x(t-A(t,\ x(t),\ \dot{x}(t))),\ \dot{x}(t-G(t))), \tag{1}$$

где x — искомая n-мерная вектор-функция, A, f и G — известные конечномерные вектор-функции, под символами $x(t-A(t,\ x(t),\ \dot{x}(t)))$, $\dot{x}(t-G(t))$ понимаем вектор-функции соответственно с компонентами

$$x_i(t-a_i^{(k_i)}(t,\ x(t),\ \dot{x}(t))),\ \dot{x}_i(t-g_i^{(r_i)}(t)),$$

$$i=1,2,\ldots,n,\quad k_i=1,2,\ldots,\mu_i,\quad r_i=1,2,\ldots,\lambda_i,$$

μ_i, λ_i — натуральные числа.

Пусть $b\in E_q$, $|b|=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant q}|b_j|$, R, d — некоторые положительные числа, $\mu=\sum\limits_{i=1}^{n}\mu_i$, $\lambda=\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i$,

$$H=\{(x,z):x\in E_n,\ z\in E_n,\ |x|\leqslant R,\ |z|\leqslant d\},$$

$$D=\{(x,y,v):x\in E_n,\ y\in E_\mu,\ v\in E_\lambda,\ |x|\leqslant R,\ |y|\leqslant R,\ |v|\leqslant d\}$$

и пусть

(I) существуют числа t_0, T, Δ такие, что $-\infty<t_0<T<\infty$, $0<\Delta<\infty$ и на множестве $[t_0,\ T]\times H$ при любом i выполнены неравенства

$$0\leqslant a_i^{(k_i)}(t,\ x,\ z)\leqslant\Delta,\quad 0\leqslant g_i^{(r_i)}(t)\leqslant\Delta;$$

(II) на множестве $[t_0,\ T]\times D$ вектор-функция $f(t,\ x,\ y,\ v)$ удовлетворяет условиям Каратеодори (измерима по t и непрерывна по совокупности переменных x, y, v почти при всех t) и Липшица по переменным y, v соответственно с постоянными q_1, q_2;

(III) на множестве $[t_0,\ T]\times H$ вектор-функция $A(t,\ x,\ z)$ удовлетворяет условиям Каратеодори (измерима по t и непрерывна по совокупности переменных x, z почти при всех t) и Липшица по переменной z с постоянной q_3.

Пусть $\varphi_0:[t_0-\Delta,\ t_0]\to E_n$ — некоторая известная абсолютно непрерывная на сегменте $[t_0-\Delta,\ t_0]$ вектор-функция и такая, что при любом $t\in[t_0-\Delta,\ t_0]$ $|\varphi_0(t)|\leqslant R_1<R$ и почти всюду на этом сегменте $|\dot{\varphi}_0(t)|\leqslant d$, R_1 — число.

Под решением системы (1) понимаем абсолютно непрерывную на сегменте $[t_0-\Delta,\ \tau]$, $t_0<\tau\leqslant T$, вектор-функцию x, удовлетворяющую системе (1) почти всюду на сегменте $[t_0,\ \tau]$ и равенству $x(t)=\varphi_0(t)$ на сегменте $[t_0-\Delta,\ t_0]$.

Это решение системы (1) далее будем называть решением с начальной вектор-функцией φ_0.

Символом $L(t_0,\ \tau)$ обозначим множество всех измеримых на сегменте $[t_0,\ \tau]$ вектор-функций $\alpha:[t_0,\ \tau]\to E_n$, почти при любом $t\in[t_0,\ \tau]$ удовлетворяющих неравенству $|\alpha(t)|\leqslant d$.

Положим

$$\varphi_\alpha(t)=\begin{cases}\varphi_0(t) & \text{при } t\in[t_0-\Delta,\ t_0],\\ \varphi_0(t_0)+\int\limits_{t_0}^{t}\alpha(\xi)\,d\xi & \text{при } t\geqslant t_0.\end{cases}$$

На множестве $L(t_0, \tau)$ определим оператор S равенством $(S\alpha)(t)=$ $=f(t, \varphi_\alpha(t), \varphi_\alpha(t-A(t, \varphi_\alpha(t), \alpha(t))), \alpha(t-G(t)))$, полагая, что $\alpha(t-$ $-G(t))=\varphi_0(t-G(t))$, как только $t-G(t)<t_0$.

Очевидно, неподвижные точки оператора S и только они являются решениями системы (1).

Пусть

$$\|\beta\|_p^\tau=\left(\int\limits_{t_0}^{\tau}|\beta(t)|^p dt\right)^{1/p},\quad \|\beta\|_p^*=\left(\int\limits_{t_0-\Delta}^{t_0}|\beta(t)|^p dt\right)^{1/p},$$

$$p>1,\quad \|\beta\|_c^\tau=\sup_{t_0\leqslant t\leqslant\tau}|\beta(t)|,\quad \|\beta\|_c^*=\sup_{t_0-\Delta\leqslant t\leqslant t_0}|\beta(t)|,$$

V_h — оператор, определяемый равенством

$$(V_h\beta)(t)=\begin{cases}\beta(t+h) & \text{при } t+h\in[t_0, \tau],\\ 0 & \text{при } t+h\notin[t_0, \tau],\end{cases}$$

β — вектор-функция, $|B(t)|=\max\limits_{|x|\leqslant 1}|B(t)x|$, $\|B\|=\sup\limits_{t_0\leqslant t\leqslant T}|B(t)|$, при любом t $B(t)$ — $n\times n$-матрица, me, m^*e — соответственно мера, внешняя мера Лебега множества e.

Справедлива следующая

Лемма [1] (см. также [2]). *Пусть $\alpha\in L(t_0, \tau)$. Тогда вектор-функция $t\to\alpha(t-G(t))$ измерима на сегменте $[t_0, \tau]$, если выполнено хотя бы одно из следующих условий:*

1) для любого измеримого множества $e\subset[t_0-\Delta, \tau]$ и любого $i=$ $=1, 2, \ldots, n$ множество $\gamma_i^{-1}(e)\cap[t_0, \tau]$ измеримо, где $\gamma_i^{-1}(e)$ — прообраз множества e при отображении $t\to\gamma_i(t)=t-g_i^{(\tau_i)}(t)$;

2) вектор-функция $t\to t-G(t)$ измерима на сегменте $[t_0, \tau]$ и для любого $\varepsilon>0$ и любого $i=1, 2, \ldots, n$ существует такое $\delta>0$, что для любого множества $e\subset[t_0-\Delta, \tau]$, $m^*e<\delta$, $m^*\{\gamma_i^{-1}(e)\cap[t_0, \tau]\}<\varepsilon$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия (I), (II), (III) и условия леммы.*

Тогда если а) $q_1q_3d+q_2<1$, б) существует число ν такое, что для любого измеримого множества $e\subset[t_0, T]$ и любого $i=1, 2, \ldots, n$ $me\leqslant$ $\leqslant\nu m^*\{\gamma_i(e)\cap[t_0, T]\}$, в) для любой точки $(t, x, y, v)\in[t_0, T]\times D$ $|f(t, x, y, v)|\leqslant d$, то существует число $\tau\in]t_0, T]$, при котором оператор S имеет неподвижную точку на множестве $L(t_0, \tau)$.

Доказательство. Фиксируем $\tau\in]t_0, T]$ такое, что при любом $t\in[t_0, \tau]$ и любом $\alpha\in L(t_0, \tau)$ $|\varphi_\alpha(t)|\leqslant R$. Из условий (II), (III), в) и леммы следует, что для любой вектор-функции $\alpha\in L(t_0, \tau)$ вектор-функция $t\to(S\alpha)(t)$ измерима на сегменте $[t_0, \tau]$ и при любом $t\in[t_0, \tau]$ $|(S\alpha)(t)|\leqslant d$.

Докажем, что оператор S непрерывен на множестве $L(t_0, \tau)$ по норме $\|\cdot\|_p^\tau$. Из условия (III) следует (см. [3]), что для любого $\sigma>0$ существует замкнутое множество $F_1\subset[t_0, \tau]$ такое, что $m([t_0, \tau]-F_1)<\sigma$, на множестве $F_1\times D$ вектор-функция f непрерывна, и существует замкнутое множество $F_2\subset[t_0, \tau]$, удовлетворяющее условиям: $m([t_0, \tau]-$ $-F_2)<\sigma$, на множестве $F_2\times H$ вектор-функция A непрерывна.

Пусть (α_k) — произвольная последовательность, но такая, что при любом k $\alpha_k\in L(t_0, \tau)$, $\|\alpha_k-\alpha^*\|_p^\tau\to 0$ при $k\to\infty$, $\alpha^*\in L(t_0, \tau)$. Тогда если положить

$$\varphi_k(t)=\begin{cases}\varphi_0(t) & \text{при } t\in[t_0-\Delta,\ t_0],\\ \varphi_0(t_0)+\int\limits_{t_0}^{t}\alpha_k(\xi)\,d\xi & \text{при } t\in[t_0,\ \tau],\end{cases}$$

$$\varphi^*(t)=\begin{cases}\varphi_0(t) & \text{при } t\in[t_0-\Delta,\ t_0],\\ \varphi_0(t_0)+\int\limits_{t_0}^{t}\alpha^*(\xi)\,d\xi & \text{при } t\in[t_0,\ \tau],\end{cases}$$

то

$$\begin{gathered}|(S\alpha_k)(t)-(S\alpha^*)(t)|\leqslant|f(t,\varphi_k(t),\varphi_k(t-A(t,\varphi_k(t),\alpha_k(t))),\\ \alpha_k(t-G(t)))-f(t,\varphi^*(t),\varphi_k(t-A(t,\varphi_k(t),\alpha_k(t))),\alpha_k(t-G(t)))|+\\ +q_1d|A(t,\varphi_k(t),\alpha_k(t))-A(t,\varphi^*(t),\alpha_k(t))|+q_1q_3d|\alpha_k(t)-\alpha^*(t)|+\\ +q_1d|\varphi_k(t-A(t,\varphi^*(t),\alpha^*(t)))-\varphi^*(t-A(t,\varphi^*(t),\alpha^*(t)))|+\\ +q_2|\alpha_k(t-G(t))-\alpha^*(t-G(t))|.\end{gathered}\tag{2}$$

Пусть $e\subseteq[t_0,T]$ — произвольное измеримое множество и пусть измеримое множество e^0 таково, что $e^0\subseteq[t_0,T]$ и при любом $i=1,2,\ldots,n$ $\gamma_i(e)\cap[t_0,T]\subseteq e^0$. Тогда справедливо неравенство

$$\int\limits_e|\alpha_k(t-G(t))-\alpha^*(t-G(t))|^p dt\leqslant\nu\int\limits_{e^0}|\alpha_k(t)-\alpha^*(t)|^p dt.\tag{3}$$

Действительно (см. [4]), полагая $\psi(t)=|\alpha_k(t)-\alpha^*(t)|^p$, $e_j=e[a_{j-1}\leqslant\psi(t-G(t))<a_j]$, $e_j^0=e^0[a_{j-1}\leqslant\psi(t)<a_j]$, учитывая условие б) теоремы и переходя к пределу в неравенстве для соответствующих интегральных сумм, получим справедливость неравенства (3).

Таким образом, непрерывность оператора S следует из неравенств (2), (3) и того, что последовательность (φ_k) на сегменте $[t_0,\tau]$ сходится равномерно к вектор-функции φ^*, а вектор-функции f и A соответственно на множествах $F_1\times D$ и $F_2\times H$ равномерно непрерывны.

Из равномерной непрерывности вектор-функций f и A соответственно на множествах $F_1\times D$ и $F_2\times H$ следует, что для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta=\delta(\varepsilon)$ такое, что

$$\|V_h(S\alpha)-S\alpha\|_p^\tau<\varepsilon+(q_1q_3d+q_2\nu^{1/p})\|V_h\alpha-\alpha\|_p^\tau,\tag{4}$$

как только $0<h<\delta(\varepsilon)$.

Из условия а) теоремы следует, что p можно выбрать так, чтобы выполнялось неравенство $q_1q_3d+q_2\nu^{1/p}<1$.

Символом $L^*(t_0,\tau)$ обозначим множество всех вектор-функций $\alpha\in L(t_0,\tau)$, удовлетворяющих условию: для любого $\varepsilon>0$ $\|V_h\alpha-\alpha\|_p^\tau\leqslant\varepsilon/1-(q_1q_3d+q_2\nu^{1/p})$, как только $0<h<\delta(\varepsilon)$. Легко убедиться, что множество $L^*(t_0,\tau)$ замкнутое, выпуклое и, как следует из [5], компактное. Кроме того, из неравенства (4) следует, что для любой вектор-функции $\alpha\in L^*(t_0,\tau)$ $S\alpha\in L^*(t_0,\tau)$. А тогда по принципу Шаудера [6] во множестве $L^*(t_0,\tau)$ существует неподвижная точка оператора S. Теорема доказана.

Можно убедиться, что решение системы (1) продолжимо до границы множества $\{(t,x):t\in[t_0,T],x\in E_n,|x|\leqslant R\}$.

Теорема 2. *Пусть 1) вектор-функции f, A и G удовлетворяют условиям теоремы 1, причем выполнено только условие 2) леммы;*

2) система (1) имеет единственное определенное на сегменте $[t_0,\tau]$ решение с начальной функцией φ_0.

Тогда для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что как только а) $\|G-G^*\|_c^\tau<\delta$, $\|\varphi_0-\varphi_0^*\|_c^*<\delta$, $\|\dot\varphi_0-\dot\varphi_0^*\|_p^*<\delta$; б) на сегменте $[t_0-\Delta,$

$t_0]$ $|\varphi_0^*(t)|\leqslant R_1$, *почти всюду на сегменте* $[t_0-\Delta, t_0]$ $|\dot{\varphi}_0^*(t)|\leqslant d$; *в) на множестве* $F^{(1)}\times D$, $F^{(1)}\subset[t_0, T]$, $m([t_0, T]-F^{(1)}<\delta$, $|f^*(t, x, y, v)-f(t, x, y, v)|<\delta$; *г) на множестве* $F^{(2)}\times H$, $F^{(2)}\subset[t_0, T]$, $m([t_0, T]-F^{(2)})<\delta$, $|A^*(t, x, z)-A(t, x, z)|<\delta$; *д) система*

$$\dot{x}(t)=f^*(t, x(t), x(t-A^*(t, x(t), \dot{x}(t))), \dot{x}(t-G^*(t))) \tag{5}$$

удовлетворяет условиям теоремы 1, система (5) на сегменте $[t_0, \tau]$ *имеет решение* x^* *с начальной функцией* φ_0^*, *удовлетворяющее неравенству* $\|x^*-x\|_c^\tau<\varepsilon$.

Доказательство. Предположим, что утверждение теоремы не верно. Тогда при любом k система

$$\dot{x}(t)=f_k(t, x(t), x(t-A_k(t, x(t), \dot{x}(t))), \dot{x}(t-G_k(t))) \tag{6}$$

имеет решение x_k с начальной функцией $\varphi_0^{(k)}$, при некотором $t_k\in[t_0, \tau]$ удовлетворяющее неравенству $|x(t_k)-x_k(t_k)|\geqslant\varepsilon$, ε фиксировано.

Чтобы не усложнять обозначения, будем считать, что последовательность (t_k) имеет предел и $\lim\limits_{k\to\infty} t_k=\bar{t}$. Из того, что при любом k $|f_k(t, x, y, v)|\leqslant d$, следует, что $t_0<\bar{t}\leqslant\tau$.

При любом k $\dot{x}_k\in L^*(t_0, \tau)$, поэтому из последовательности $(\dot{x}_k)$ можно извлечь сходящуюся по норме $\|\cdot\|_p^\tau$ подпоследовательность (для которой сохраним обозначение $(\dot{x}_k)$). Пусть $\|\dot{x}_k-\bar{\alpha}\|_p^\tau\to 0$ при $k\to\infty$. Очевидно, $\bar{\alpha}\in L^*(t_0, \tau)$. Тогда если положить

$$\bar{x}(t)=\begin{cases}\varphi_0(t) & \text{при } t_0-\Delta\leqslant t\leqslant t_0,\\ \varphi_0(t_0)+\int\limits_{t_0}^{t}\bar{\alpha}(\xi)\,d\xi & \text{при } t\geqslant t_0,\end{cases}$$

то легко убедиться, что последовательность (x_k) на сегменте $[t_0, \tau]$ сходится равномерно к вектор-функции $\bar{x}$ и $|x(\bar{t})-\bar{x}(\bar{t})|\geqslant\varepsilon$. Мы получим противоречие с условием 2) теоремы, если докажем, что $\bar{x}$ — решение системы (1) с начальной функцией φ_0. Но последнее следует из условий теоремы и того, что

$$|f_k(t, x_k(t), x_k(t-A_k(t, x_k(t), \dot{x}_k(t))), \dot{x}_k(t-G_k(t)))-f(t, \bar{x}(t),$$
$$\bar{x}(t-A(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t))), \dot{\bar{x}}(t-G(t)))|\leqslant|f_k(*)-f(*)|+|f(t, x_k(t), *)-$$
$$-f(t, \bar{x}(t), *)|+q_1d|A_k(*)-A(*)|+q_1d|A(t, x_k(t), *)-$$
$$-A(t, \bar{x}(t), *)|+q_1q_3d|\dot{x}_k(t)-\dot{\bar{x}}(t)|+q_2|\dot{x}_k(t-G_k(t))-$$
$$-\dot{\bar{x}}(t-G_k(t))|+q_2|\dot{\bar{x}}(t-G_k(t))-\dot{\bar{x}}(t-G(t))|$$

(знаком $*$ отмечены ненаписанные одинаковые для каждой разности выражения), $\int\limits_{t_0}^{\tau}|\dot{x}_k(t-G_k(t))-\dot{\bar{x}}(t-G_k(t))|dt\leqslant\nu\int\limits_{t_0}^{\tau}|\dot{x}_k(t)-\dot{\bar{x}}(t)|dt$ (см. доказательство теоремы 1), сходимость по норме $\|\cdot\|_p^\tau$ влечет сходимость по мере на сегменте $[t_0, \tau]$, по теореме Лузина вектор-функция $\dot{\bar{x}}$ непрерывна (и, следовательно, равномерно непрерывна) на замкнутом множестве, принадлежащем сегменту $[t_0, \tau]$ и сколь угодно мало отличающемся от него по мере. Теорема доказана.

§ 2. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ

Пусть $t_0=0$, $T=\omega$, $f(t, x, y, v)=Q(t)x+f_1(t, x, y, v)$, где $Q(t)$ — матрица и пусть

(IV) вектор-функции f_1, A, G и матрица $Q(t)$ ω-периодичны по t, матрица $Q(t)$ измерима, ограничена на сегменте $[0, \omega]$, вектор-функция f_1 на множестве $[0, \omega]\times D$ удовлетворяет условиям Каратеодори (измерима по t и непрерывна по совокупности переменных x, y, v почти при всех t) и Липшица по переменным y, v соответственно с постоянными d_1, d_2.

В этом параграфе под решением системы (1) понимаем определенную на интервале $]-\infty, \infty[$ и абсолютно непрерывную на любом конечном сегменте вектор-функцию, почти всюду на каждом таком сегменте удовлетворяющую системе (1).

Пусть W — множество всех n-мерных ω-периодических абсолютно непрерывных на сегменте $[0, \omega]$ вектор-функций u и таких, что при любом $t\in[0, \omega]$ $|u(t)|\leqslant R$, $|\dot u(t)|\leqslant d$ почти всюду на сегменте $[0, \omega]$.

На множестве W определим оператор Γ равенством

$$(\Gamma u)(t)=Y(t)[E-Y(\omega)]^{-1}\int_0^\omega Y(\omega)Y^{-1}(t)F(t, u(t))dt+$$

$$+\int_0^t Y(t)Y^{-1}(\xi)F(\xi, u(\xi))d\xi,$$

где $F(t, u(t))=f_1(t, u(t), u(t-A(t, u(t), \dot u(t))), \dot u(t-G(t)))$, $Y(t)$ — фундаментальная матрица системы $\dot y(t)=Q(t)y(t)$, $Y(0)=E$, E — единичная матрица, $\det(E-Y(\omega))\neq 0$.

Оператор Γ любую вектор-функцию $u\in W$ отображает в ω-периодическую вектор-функцию.

Неподвижные точки оператора Γ на множестве W и только они являются ω-периодическими решениями ситемы (1), принадлежащими множеству W.

Теорема 3. *Пусть 1) на множестве* $[0, \omega]\times D$ $|Q(t)x|+|f_1(t, x, y, z)|\leqslant d$, $\det(E-Y(\omega))\neq 0$; *2) выполнены условия (III), (IV) и условия леммы; 3)* $dd_1q_3+d_2<1$; *4) существует число* ν *такое, что для любого измеримого множества* $e\subset[0, \omega]$ *и любого* $i=1, 2, \ldots, n$ $me\leqslant \nu m^*(\gamma_i(e)\cap[0, \omega]$; *5)* $\|Y\|\|Y^{-1}\|\beta_1(|[E-Y(\omega)]^{-1}||Y(\omega)|+1)<1$,

$$\beta_1=\frac{1}{R}\max_{1\leqslant i\leqslant n}\int_0^\omega \sup_{u\in W}|F_i(t, u(t))|dt.$$

Тогда система (1) имеет ω-периодическое решение.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

Отметим, что рассуждения настоящего параграфа допускают, что на множестве $[0, \omega]\times D$ при некоторых (или даже при всех) $i=1, 2, \ldots, n$ $a_i^{(h_i)}(t, x, z)$, $g_i^{(r_i)}(t)$ могут принимать значения любых знаков.

Литература

1. Данфорд Н., Шварц Д. Линейные операторы. Общая теория.— М.: ИЛ, 1962.—895 с.
2. Драхлин М. Е., Плышевская Т. К. К теории функционально-дифференциальных уравнений.— Дифференц. уравнения, 1978, т. 14, № 8, с. 1347—1361.
3. Красносельский М. А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений.— М.: Гостехиздат, 1956.—392 с.

4. Бадоев А. Л., Садовский Б. Н. Пример уплотняющего оператора в теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом нейтрального типа.— Докл. АН СССР, 1969. т. 186, № 6, с. 1239—1242.

5. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа.— М.: Наука, 1965.—520 с.

6. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ.— М.: Наука, 1977.—740 с.

Рязанский государственный педагогический институт

Поступила в редакцию 7 февраля 1980 г.