В.И.Щубов

О РАЗЛОЖЕНИИ КВАЗИРЕГУЛЯРНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ ЛИ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА ОРБИТ

I. Каждому однородному пространству группы Ли соответствует унитарное представление этой группы, называемое квазирегулярным. Конструкция квазирегулярного представления состоит в следующем. Пусть Q - гладкое многообразие, на котором группа Ли G транзитивно действует справа. Это значит, что определено гладкое отображение $(g,q) \to q\cdot g$ произведения $G\times Q$ в Q, которое удовлетворяет условию

$$(q\cdot g_1)\cdot g_2 = q\cdot g_1 g_2 .$$

При этом каждая точка многообразия Q переводится в любую другую преобразованиями из группы G. В этом случае на Q существует ровно одна (с точностью до эквивалентности) борелевская мера μ, квазиинвариантная относительно действия группы. Квазирегулярное представление группы G, соответствующее однородному многообразию Q, - это унитарное представление в пространстве $\mathcal{H} = L_2(Q,\mu)$, действующее по формуле

$$(T(g)\psi)(q) = \sqrt{\frac{d\mu(q\cdot g)}{d\mu(q)}}\,\psi(q\cdot g). \qquad (I)$$

В случае, когда $Q = G$, а μ - мера Хаара, это представление называется регулярным.

Основная задача гармонического анализа на однородном многообразии Q - это задача о разложении представления (I) на неприводимые компоненты. Эта задача решена для многих конкретных групп и их однородных пространств, а также для отдельных классов групп.

Решение задачи о разложении представления (I) известно для нильпотентных групп Ли. Это решение дано А.А.Кирилловым на основе предложенного им метода орбит (см. [I]). Метод орбит, содержание которого будет кратко изложено ниже, позволяет для широкого класса групп Ли строить большой запас неприводимых унитарных представлений. В некоторых случаях, например, для нильпотентных групп Ли, он дает все неприводимые унитарные представления.

В настоящей работе предлагается некоторый подход к решению задачи о разложении квазирегулярного представления, основанный на методе орбит. Формулируется гипотеза о неприводимых представлениях, которые должны входить в разложение квазирегулярного. Разумеется, эта гипотеза имеет смысл лишь в тех случаях, когда применим метод орбит. Гипотеза допускает квантовомеханическую интерпретацию. Она, в сущности, заключается в том, что для построения

представлений, входящих в разложение квазирегулярного, нужно проквантовать некоторый набор механических систем со связями. Для нильпотентных групп Ли гипотеза эквивалентна ответу А.А.Кириллова, так что в этом случае она является квантовомеханической переформулировкой известных фактов. Однако, существуют примеры, которые позволяют надеяться, что предлагаемый подход окажется полезным при построении гармонического анализа в более широком классе задач.

Гипотеза будет сформулирована в пункте 4. До этого в пункте 2 приведены некоторые необходимые факты из гамильтоновой механики, а в пункте 3 дано краткое описание метода орбит. В пункте 5 содержится квантовомеханическое толкование гипотезы. Далее следует более подробное обсуждение гипотезы. В заключение приводится пример: квазирегулярное представление вещественной полупростой группы $SL(n,\mathbb{R})$, для которого гипотеза оказывается справедливой.

2. В этом пункте приводятся некоторые факты из гамильтоновой механики, необходимые для формулировки гипотезы. Подробное изложение гамильтоновой механики содержится в [2], [3].

Фазовое пространство механической системы с n степенями свободы - это гладкое многообразие M размерности $2n$, на котором определена дифференциальная 2-форма ω, невырожденная и замкнутая: $d\omega=0$ (ω называется симплектической формой, а M с выделенной формой ω называется симплектическим многообразием). Форма ω позволяет сопоставить каждой гладкой функции F на M векторное поле ξ_F на M. Это поле однозначно определяется формулой:

$$\omega(\xi_F, V)=VF \tag{2}$$

для любого векторного поля V. ξ_F называется гамильтоновым векторным полем, а функция F - гамильтонианом этого поля. Для каждой пары гладких функций F_1, F_2 определяется скобка Пуассона:

$$\{F_1,F_2\}=\xi_{F_1}F_2=-\xi_{F_2}F_1. \tag{3}$$

Эта скобка билинейна и антисимметрична. Из замкнутости формы ω вытекает тождество Якоби. Таким образом, форма ω порождает структуру алгебры Ли в пространстве гладких функций на M.

Механическая система - это гамильтоново векторное поле ξ_F на симплектическом многообразии (M,ω). Поле ξ_F определяет однопараметрическую группу диффеоморфизмов многообразия M, сохраняющих форму ω. (Такие диффеоморфизмы называются каноническими преобразованиями). Можно сказать, что эта группа определяет динамику системы.

Возможно более общее определение механической системы. Пусть

группа Ли G действует на M преобразованиями, сохраняющими форму ω. В этом случае говорят, что задана механическая система. G называется динамической группой системы. Пусть $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли группы G. Каждому $X \in \mathfrak{g}$ соответствует гамильтоново векторное поле ξ_X на M. При этом выполняется соотношение

$$[\xi_X, \xi_Y] = \xi_{[X,Y]}. \tag{4}$$

Каждое поле ξ_X порождается функцией F_X. F_X определяется полем ξ_X не однозначно, а лишь с точностью до постоянного слагаемого. Функции F_X называют основными наблюдаемыми системы.

Важным примером симплектического многообразия является кокасательный пучок T^*Q гладкого многообразия Q. На T^*Q всегда существует естественная симплектическая форма ω (см. [2], [3]). Если T^*Q – фазовое пространство механической системы, то Q называется конфигурационным пространством этой системы.

В заключение этого пункта приведем конструкцию, которая используется при гамильтоновом описании механических систем со связями. Подробное изложение содержится в [4].

Пусть на гладком многообразии M задана 2-форма ω_M, замкнутая, но вырожденная. В этом случае существует канонический способ перейти от многообразия (M, ω_M) к симплектическому многообразию $(\mathcal{N}, \omega_{\mathcal{N}})$ с невырожденной формой $\omega_{\mathcal{N}}$. Этот способ состоит в следующем. В касательном пространстве TM_x к многообразию M в точке $x \in M$ можно выделить подпространство C_x, состоящее из нулевых векторов формы ω_M. Таким образом, на M возникает распределение C. Из замкнутости формы ω_M следует, что это распределение инволютивно. Поэтому M распадается на связные интегральные подмногообразия распределения C. Допустим, что это слоение многообразия M является на самом деле гладким расслоением. В ситуации, которая будет рассматриваться в дальнейшем, это условие будет выполнено. Пусть N – база этого расслоения. N – это многообразие, точками которого являются интегральные подмногообразия распределения C. Ясно, что форма ω_M порождает на многообразии N замкнутую невырожденную 2-форму $\omega_{\mathcal{N}}$.

3. В этом пункте в удобной для дальнейшего форме дается краткое изложение метода орбит. Приводимая формулировка метода не является самой общей. Более подробное изложение содержится в [5], [6].

Всюду в дальнейшем сохраняются обозначения, использованные в предыдущем пункте при описании гамильтоновой механики.

Механическая система с фазовым пространством $(\mathcal{N}, \omega)$ и группой симметрии G называется элементарной, если группа G действует на многообразии $\mathcal{N}$ транзитивно. Допустим, что основные наблюдаемые F_X элементарной системы $(\mathcal{N}, \omega, G)$ можно выбрать таким

образом, что

$$\{F_X, F_Y\} = F_{[X,Y]} \tag{5}$$

для всех $X, Y \in \mathfrak{g}$. В общем случае выполняется более слабое соотношение (4). Пусть, кроме того, система является целочисленной. Это значит, что интеграл от формы $\omega_{\mathcal{N}}$ по каждому 2-мерному циклу равен целому числу. Метод орбит позволяет сопоставить каждой такой системе набор унитарных представлений группы G.

Это сопоставление осуществляется следующим образом.

Пусть $x \in \mathcal{N}$. Через $\Phi(x)$ обозначим функционал на $\mathfrak{g}$, задаваемый формулой:

$$\langle \Phi(x), X \rangle = F_X(x). \tag{6}$$

(Скобка $\langle , \rangle$ обозначает действие функционала на вектор). Подалгебра $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ называется подчиненной точке x, если $\Phi(x)$ обращается в 0 на $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$. В этом случае соответствие

$$X \longrightarrow i F_X(x) \tag{7}$$

задает одномерное представление алгебры $\mathfrak{h}$. Подалгебра $\mathfrak{h}$, подчиненная x, называется допустимой, если $\dim \mathfrak{h} = \dim \mathfrak{g} - \frac{1}{2} \dim \mathcal{N}$. (В общем случае $\dim \mathfrak{h} \leq \dim \mathfrak{g} - \frac{1}{2} \dim \mathcal{N}$).

Пусть H – подгруппа G, соответствующая допустимой подалгебре $\mathfrak{h}$ и порожденная своей связной компонентой единицы и стационарной подгруппой G_x точки $x \in \mathcal{N}$:

$$H = G_x H_0. \tag{8}$$

По представлению (7) алгебры Ли $\mathfrak{h}$ построим одномерное унитарное представление U_0 группы H_0 и продолжим его до одномерного унитарного представления U группы H. (Возможность такого построения необходима для конструкции метода орбит). U_0 определяется представлением (7) однозначно, однако продолжение U_0 до представления U группы H неединственно. Действительно, умножая одно продолжение на характер группы $H/H_0 = \pi_0(H)$, мы получим новое продолжение ($\pi_0(H)$ – это дискретная группа, элементами которой являются компоненты связности группы H). Таким образом, все представления U могут быть перенумерованы характерами группы $\pi_0(H)$. Естественной нумерации, однако, вообще говоря, не существует.

Представление U подгруппы H порождает индуцированное представление T^U группы G. Согласно основной гипотезе метода орбит, T^U не зависит от выбора точки $x \in \mathcal{N}$ и допустимой подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$: T^U – и есть представление группы G,

соответствующее элементарной механической системе $(\mathcal{N},\omega_{\mathcal{N}},G)$. Таким образом, элементарной системе $(\mathcal{N},\omega_{\mathcal{N}},G)$ соответствует набор унитарных представлений группы G, которые можно перенумеровать элементами группы характеров $\hat{\pi}_0(H)$.

Наиболее важные элементарные механические системы, связанные с группой G, строятся следующим образом. Фазовые пространства этих систем - это орбиты группы G в пространстве $\mathfrak{g}^*$ относительно представления, сопряженного с присоединенным. ($\mathfrak{g}^*$ - пространство, сопряженное к алгебре Ли $\mathfrak{g}$). На каждой такой орбите $\mathcal{O}\subset\mathfrak{g}^*$ инвариантная симплектическая форма задается формулой

$$\omega_\varphi(\xi_X,\xi_Y)=\langle\varphi,[X,Y]\rangle,\ \varphi\in\mathcal{O}. \tag{9}$$

Основные наблюдаемые задаются формулой

$$F_X(\varphi)=\langle\varphi,X\rangle,\ \varphi\in\mathcal{O}. \tag{10}$$

При этом выполняется соотношение (5). С помощью описанной выше процедуры каждой орбите сопоставляется набор унитарных представлений группы G, который можно занумеровать элементами группы $\hat{\pi}_0(H)$, $H=G_\varphi H_0$. Согласно основной гипотезе метода орбит, эти представления должны быть неприводимы.

Элементарные механические системы, обладающие свойством (5), могут быть расклассифицированы. (На самом деле можно расклассифицировать все элементарные системы (см. [6]), но эта классификация нам не потребуется). Пусть $(\mathcal{N},\omega_{\mathcal{N}},G)$ такая система. Определим отображение $\Phi:\mathcal{N}\to\mathfrak{g}^*$, которое переводит точку $x\in\mathcal{N}$ в функционал $\Phi(x)\in\mathfrak{g}^*$, задаваемый формулой (6). Можно доказать (см. [6]) следующее утверждение:

Φ - локально взаимно однозначно, перестановочно с действием G, преобразует $\mathcal{N}$ в орбиту $\mathcal{O}\subset\mathfrak{g}^*$, а форму $\omega_{\mathcal{N}}$ в симплектическую форму $\omega_{\mathcal{O}}$ на $\mathcal{O}$.

Это утверждение показывает, что фазовое пространство элементарной системы, обладающей свойством (5), всегда является накрывающим многообразием для некоторой орбиты $\mathcal{O}\subset\mathfrak{g}^*$. При этом накрытие $\mathcal{N}\to\mathcal{O}$ совпадает с отображением Φ.

4. В этом пункте формулируется гипотеза о представлениях, входящих в разложение квазирегулярного представления (I). При этом, однако, не предлагается никакого способа для вычисления меры Планшереля, соответствующей этому разложению.

Вернемся к ситуации, описанной в пункте I. Группа G естественным образом действует на кокасательном пучке T^*Q однородного многообразия Q:

$$g:(q,p)\longmapsto(q\cdot g,(dg^*)^{-1}_q\cdot p). \tag{11}$$

6 573

Эти преобразования сохраняют естественную симплектическую форму ω на T^*Q. Таким образом, мы имеем механическую систему с фазовым пространством T^*Q и группой симметрии G. Можно вычислить основные наблюдаемые этой системы. Они равны

$$F_X(q,p)=\langle p,\tilde{X}(q)\rangle,\ (q,p)\in T^*Q,\ X\in\mathfrak{g}. \tag{I2}$$

Здесь $\tilde{X}$ – векторное поле Ли на многообразии Q, соответствующее $X\in\mathfrak{g}$.

T^*Q распадается на орбиты группы G. Пусть M – одна из этих орбит, а ω_M – сужение формы ω на M. ω_M – замкнутая вырожденная 2-форма на M.

С помощью процедуры, описанной в конце пункта 2, можно перейти от (M,ω_M) к симплектическому многообразию $(\mathcal{N},\omega_{\mathcal{N}})$. Это можно сделать, поскольку слоение M на связные интегральные подмногообразия распределения C является гладким расслоением. Действительно, форма ω_M G-инвариантна, и значит C также инвариантно. Поэтому интегральные подмногообразия C переходят друг в друга под действием группы, и на каждом из них транзитивно действует некоторая подгруппа группы G. (Если G_x – подгруппа, действующая на подмногообразии x, проходящем через точку $(q,p)\in M$, то на подмногообразии xg, проходящем через точку $(qg,(dg)^{*-1}p)\in M$, действует подгруппа $G_{xg}=gG_xg^{-1}$). Из изложенного ниже будет ясно, что G_x локально изоморфна стационарной подгруппе некоторой орбиты группы G в $\mathfrak{g}^*$. Поэтому $\mathcal{N}\approx G/G_x$ является гладким многообразием.

Ясно, что $(\mathcal{N},\omega_{\mathcal{N}},G)$ – элементарная механическая система. Покажем, что она обладает свойством (5).

Функции $F_X(q,p)$, заданные формулой (I2), постоянны на слоях расслоения $M\to\mathcal{N}$. Действительно, пусть V – векторное поле на M, принадлежащее распределению C. Тогда

$$VF_X=\omega(V,\xi_X)=0$$

поскольку C – распределение нулевых векторов формы ω_M, и поле ξ_X касательно к M. Таким образом, функции $F_X(q,p)$ могут рассматриваться как функции на $\mathcal{N}$:

$$F_X(x)=F_X(q,p),\ x\in\mathcal{N},\ (q,p)\in M, \tag{I3}$$

если $(q,p)\in x$, то есть точка (q,p) лежит в слое над точкой x.

. Ясно, что функции (I3) являются основными наблюдаемыми элементарной системы $(\mathcal{N},\omega_{\mathcal{N}},G)$ и удовлетворяют условию (5).

Теперь можно, пользуясь методом орбит, сопоставить каждой целочисленной элементарной системе $(\mathcal{N},\omega_{\mathcal{N}},G)$ набор унитарных представлений группы G. Этот набор может быть параметризован характерами группы $\pi_1(H)$. (Здесь H определяется формулой (8)).

Допустим, что для каждой целочисленной системы $(\mathcal{N},\omega_{\mathcal{N}},G)$ вы-

полняется условие:

$$\pi_0(H) = 0. \tag{I4}$$

В этом случае каждой такой системе соответствует только одно унитарное представление $T_{\mathcal{N}}$ группы G.

Теперь мы можем сформулировать гипотезу о представлениях, входящих в разложение квазирегулярного. Гипотеза состоит в следующем.

В разложение квазирегулярного представления (I) входят представления $T_{\mathcal{N}}$, соответствующие целочисленным элементарным системам $(\mathcal{N}, \omega_{\mathcal{N}}, G)$.

Более подробное обсуждение гипотезы содержится в пункте 6.

Заметим здесь только, что в случае регулярного представления (то есть когда $Q = G$) условие (I4) выполняется для любой системы $(\mathcal{N}, \omega_{\mathcal{N}}, G)$. Действительно, в этом случае каждая орбита M группы G в T^*G отождествляется с самой группой G. (Это отождествление осуществляется естественной проекцией $T^*G \to G$). Слоение M на связные нуль - подмногообразия формы ω_M совпадает со слоением группы G на классы смежности относительно некоторой связной подгруппы K. Поэтому стационарная подгруппа G_x точки $x \in \mathcal{N}$ связна. (Она сопряжена с K). Поскольку G_x связна, то связна и группа H, определяемая формулой (8). Следовательно, $\pi_0(H) = 0$.

Повидимому, гипотеза имеет смысл и в случае, когда условие (I4) не выполняется. При этом, вероятно, в качестве $T_{\mathcal{N}}$ следует брать какое-либо одно из представлений, соответствующих элементарной системе $(\mathcal{N}, \omega_{\mathcal{N}}, G)$ *).

5. В этом пункте излагается квантовомеханическое толкование предложенной гипотезы.

Опишем сначала квантовомеханическую интерпретацию представления (I). В предыдущем пункте рассматривалась классическая механическая система с фазовым пространством T^*Q, динамической группой G и основными наблюдаемыми (I2). Эту систему можно проквантовать. Проквантовать - это значит сопоставить каждой основной наблюдаемой $F_X(q,p)$ самосопряженный оператор $\hat{F}_X$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. При этом должно выполняться соотношение:

$$\widehat{\{F_X, F_Y\}} = i[\hat{F}_X, \hat{F}_Y]. \tag{I5}$$

Сравнивая (5) и (I5), мы видим, что квантование $F_X \mapsto \hat{F}_X$ задает представление $X \mapsto \hat{F}_X$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Тем самым задается унитарное представление группы G:

---

*) Соответствующие примеры указал автору М.А.Семенов-Тян-Шанский.

$$g = \exp X \longmapsto e^{i\hat{F}_X} \tag{16}$$

Для квантования механических систем с фазовым пространством T^*Q в квантовой механике используется следующий рецепт. В качестве $\mathcal{H}$ берется пространство $L_2(Q)$ по какой-нибудь подходящей мере (обычно это мера Лебега). В нашем случае естественно взять $\mathcal{H}=L_2(Q,\mu)$. Пусть $q_1,\dots,q_n, p_1,\dots,p_n$ – естественные координатные функции на T^*Q. Этим функциям сопоставляются операторы:

$$\hat{q}_k = q_k, \quad \hat{p}_k = -i\frac{\partial}{\partial q_k} \quad (k=1,\dots,n). \tag{17}$$

Любой функции $F(q,p)$ сопоставляется оператор $\hat{F}=F(\hat{q},\hat{p})$. (Если, конечно, этому оператору можно придать какой-либо смысл).

Применим этот рецепт к нашей системе. В координатной записи формула (12) имеет вид

$$F_X(q,p) = \tilde{X}^k(q)\,p_k.$$

Поэтому естественно сопоставить $F_X(q,p)$ оператор $-i\tilde{X}^k(q)\frac{\partial}{\partial q^k}$. Этот оператор несамосопряжен в $L_2(Q,\mu)$. Простейший способ исправить его – это добавить к нему функцию $-\frac{i}{2}\operatorname{div}_\mu \tilde{X}$. (Здесь $\operatorname{div}_\mu \tilde{X}$ – дивергенция поля $\tilde{X}$ по отношению к объему, соответствующему мере μ). Таким образом, мы можем написать

$$\hat{F}_X = -i\tilde{X} - \frac{i}{2}\operatorname{div}_\mu \tilde{X}. \tag{18}$$

Нетрудно проверить, что операторы (18) являются инфинитезимальными операторами представления (1). Поэтому, если $\hat{F}_X$ заданы формулой (18), то (16), по существу, совпадает с (1).

Итак, можно сказать, что квазирегулярное представление (1) – это квантовомеханическая система, соответствующая классической системе (11).

Известно, (см. [6]) что построение по методу орбит представления $T_{\mathcal{N}}$, соответствующего элементарной механической системе $(\mathcal{N},\omega_{\mathcal{N}},G)$, можно интерпретировать как квантование этой системы. Переход от многообразия (M,ω_M) к $(\mathcal{N},\omega_{\mathcal{N}})$ может быть интерпретирован (см. [4]) как построение гамильтонова описания для механической системы со связями (M,ω_M,G). Поэтому представление $T_{\mathcal{N}}$ можно рассматривать как квантование такой системы.

Теперь можно дать следующее истолкование гипотезы. Для того, чтобы разложить квантовую систему (1) на неприводимые подсистемы, нужно взять соответствующую классическую систему, разложить ее на элементарные системы со связями (M,ω_M,G), а затем прокванто-вать эти системы.

Отметим здесь, что возможна еще одна квантовомеханическая

интерпретация задачи о разложении квазирегулярного представления.

Для того, чтобы построить разложение представления (I), можно искать самосопряженные операторы, перестановочные с операторами представления. Пусть A есть такой оператор:

$$[T(g), A] = 0 \quad \forall g \in G. \tag{I9}$$

Перейдем к реализации пространства $\mathcal{H} = L_2(Q, \mu)$, в которой оператор A диагонален. При этом мы получим разложение $\mathcal{H}$ в прямой интеграл:

$$\mathcal{H} = \int_{-\infty}^{\infty} \oplus \mathcal{H}_\rho \, d\nu(\rho). \tag{20}$$

В пространствах $\mathcal{H}_\rho$ реализуются унитарные подпредставления T_ρ представления T. Таким образом мы получаем разложение

$$T = \int_{-\infty}^{\infty} \oplus T_\rho \, d\nu(\rho). \tag{2I}$$

Эта процедура разложения может быть сформулирована на языке квантовой механики.

Рассмотрим механическую систему (II). Интегралом движения этой системы называется функция F на T^*Q, инвариантная относительно G. F удовлетворяет соотношению

$$\{F_X, F\} = 0 \quad \text{для всех } X \in \mathfrak{g}. \tag{22}$$

Зафиксируем значение функции F:

$$F(q, p) - \rho = 0, \quad \rho \in (-\infty, \infty). \tag{23}$$

(23) - это неголономная связь, наложенная на нашу систему.

Существует рецепт квантования систем со связями, предложенный Дираком [7]. В применении к нашей системе со связью (23) этот рецепт состоит в следующем. Нужно построить квантовый оператор $\hat{F} - \rho$, соответствующий связи (23). Затем нужно наложить на волновые функции $\psi \in L_2(Q, \mu)$ ограничение:

$$(\hat{F} - \rho)\psi = 0. \tag{24}$$

Согласно Дираку, соотношение (24) определяет пространство волновых функций для системы со связью (23).

Если ρ - точка спектра оператора $\hat{F}$, то соотношение (24) определяет "собственное подпространство" $\mathcal{H}_\rho$ оператора $\hat{F}$, соответствующее "собственному значению" ρ. Ясно, что $\mathcal{H}_\rho$ - это те самые пространства, которые входят в разложение (20).

Из (22) следует, что

$$[\hat{F}_X, \hat{F}] = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{g}. \tag{25}$$

($\hat{F}_X$ определяется формулой (I8)). Поэтому операторы $\hat{F}_X$ действуют в $\mathcal{H}_\rho$. Можно считать, что сужения $\hat{F}_X|_{\mathcal{H}_\rho}$ – это операторы, соответствующие основным наблюдаемым системы со связью (23). Эти операторы определяют представление T_ρ группы G в пространстве $\mathcal{H}_\rho$. Ясно, что T_ρ – это представления, входящие в разложение (2I).

Эта интерпретация может быть полезна. Может оказаться, что легче искать интеграл движения из соотношения (22), чем оператор A, удовлетворяющий соотношению (I9).

6. В этом пункте обсуждается сформулированная выше гипотеза.

Рассмотрим более подробно элементарные механические системы $(\mathcal{N}, \omega_{\mathcal{N}}, G)$.

Каждое многообразие $\mathcal{N}$ является накрывающим для некоторой орбиты $\mathcal{O} \subset \mathfrak{g}^*$. При этом, накрытие $\Phi : \mathcal{N} \to \mathcal{O}$ задается формулой (6):

$$\langle \Phi(x), X \rangle = F_X(x) \quad \forall X \in \mathfrak{g},$$

где $F_X(x)$ определяется формулой (I3). Все орбиты $\mathcal{O}$, соответствующие многообразиям $\mathcal{N}$, могут быть точно указаны.

Заметим следующее. Пусть G_q – стационарная подгруппа точки $q \in Q$, а $\mathfrak{g}_q$ – алгебра Ли группы G_q. Касательное пространство TQ_q к многообразию Q в точке q можно отождествить с фактор-пространством $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_q$. Поэтому кокасательное пространство T^*Q_q отождествляется с подпространством

$$\mathfrak{g}_q^\perp = \{\varphi \in \mathfrak{g}^* ;\ \varphi|_{\mathfrak{g}_q} = 0\} \subset \mathfrak{g}^*.$$

Функции (I2) могут быть записаны в виде:

$$F_X(q,p) = \langle p, X \rangle, \tag{26}$$

где p понимается как элемент из $\mathfrak{g}_q^\perp \subset \mathfrak{g}^*$ в смысле только что описанного отождествления.

Теперь отображение $\Phi : \mathcal{N} \to \mathcal{O}$ можно явно вычислить. Из (26), (I3) и (6) видно, что

$$\Phi(x) = p \in \mathfrak{g}_q^\perp, \text{ если } (q,p) \in x \in \mathcal{N}. \tag{27}$$

Итак, многообразия являются накрывающими для тех и только тех орбит $\mathcal{O} \subset \mathfrak{g}^*$, которые пересекаются с подпространством $\mathfrak{g}_q^\perp \subset \mathfrak{g}^*$. (Эта характеристика орбиты, конечно, не зависит от точки $q \in Q$. Действительно, $G_{q\cdot g} = g G_q g^{-1}$, поэтому $\mathfrak{g}_{q\cdot g} = \mathrm{Ad}\, g \cdot \mathfrak{g}_q$ и, значит, $\mathfrak{g}_{q\cdot g}^\perp = (\mathrm{Ad}\, g^*)^{-1} \mathfrak{g}_q^\perp$. Так, что любая орбита либо пересекается со всеми подпространствами $\mathfrak{g}_q^\perp (q \in Q)$, либо не пересекается ни с одним из них).

В случае, когда G нильпотентная группа, А.А.Кириллов доказал ([I]), следующее. В разложение квазирегулярного представле-

ния (I) входят неприводимые представления соответствующие тем и только тем орбитам, которые пересекаются с подпространством $\mathfrak{g}_{q}^{\perp}$.

Орбиты $\mathcal{O}\subset\mathfrak{g}^{*}$ нильпотентных групп Ли односвязны. Накрывающее многообразие $\mathcal{N}$ односвязной орбиты $\mathcal{O}$ обязано совпадать с $\mathcal{O}$. . Поэтому для нильпотентных групп Ли предложенная гипотеза эквивалентна ответу А.А.Кириллова.

Вообще, если все орбиты группы G, пересекающиеся с $\mathfrak{g}_{q}^{\perp}$, односвязны, гипотеза предлагает такой же ответ, как и для случая нильпотентных групп.

Отличие от нильпотентного случая может возникнуть, если среди орбит, пересекающихся с $\mathfrak{g}_{q}^{\perp}$ есть неодносвязные. Рассмотрим этот общий случай более подробно.

Пусть $\mathcal{O}$ – одна из орбит, пересекающихся с $\mathfrak{g}_{q}^{\perp}$, а $(\mathcal{N},\omega_{\mathcal{N}},G)$ – соответствующая элементарная механическая система. Пусть накрытие $\Phi:\mathcal{N}\to\mathcal{O}$ неоднолистно. В этом случае представление $T_{\mathcal{N}}$, соответствующее системе $(\mathcal{N},\omega_{\mathcal{N}},G)$ (считаем, что система $(\mathcal{N},\omega_{\mathcal{N}},G)$ удовлетворяет условию (I4)), не обязательно является неприводимым. Орбите $\mathcal{O}$ соответствует, вообще говоря, целый набор представлений группы G. Мы покажем, что $T_{\mathcal{N}}$ распадается в прямую сумму представлений, соответствующих орбите $\mathcal{O}$.

Сформулируем утверждение более точно. Представление $T_{\mathcal{N}}$ индуцировано одномерным унитарным представлением U_0 связной (в силу (I4)) подгруппы $H_0\subset G$. (Алгебра Ли $\mathfrak{h}$ этой подгруппы – это допустимая подалгебра, подчиненная некоторой точке $x\in\mathcal{N}$). Пусть $H=G_{\Phi(x)}H_0$, где $G_{\Phi(x)}$ – стационарная подгруппа точки $\Phi(x)\in\mathcal{O}$. Ясно, что H_0 – связная компонента единицы группы H. Орбите $\mathcal{O}$ соответствуют представления группы G, индуцированные всевозможными продолжениями представления U_0 с H_0 на H. Все такие продолжения могут быть перенумерованы элементами группы характеров $\hat{\Gamma}$ группы $\Gamma\equiv\pi_0(H)=H/H_0$. Естественной нумерации не существует. Выберем какую-нибудь нумерацию. Для этого возьмем какое-либо конкретное продолжение U и будем считать, что оно соответствует единичному характеру группы Γ. Тогда характеру $\chi\in\hat{\Gamma}$ будет соответствовать представление группы H:

$$U_{\chi}(h)=\chi(\gamma)U(h),\quad \text{где}\quad \gamma=hH_0\in\Gamma. \tag{28}$$

Представление группы G, индуцированное представлением U_{χ} будем обозначать $T_{\mathcal{O},\chi}$.

Предложение.

Если Γ – абелева группа, то справедливо разложение:

$$T_{\mathcal{N}}=\int_{\hat{\Gamma}}\oplus T_{\mathcal{O},\chi}\,d\chi, \tag{29}$$

где $d\chi$ – мера Хаара на $\hat{\Gamma}$.

Замечание.

1) Так как мера $d\chi$ инвариантна, то разложение (29) не зависит от способа нумерации представлений, соответствующих орбите $\mathcal{O}$, характерами группы Γ.

2) Для того, чтобы группа Γ была абелева, достаточно, чтобы была абелева фундаментальная группа орбиты $\pi_1(\mathcal{O})$. Действительно, $\Gamma \subset \pi_0(G_{\Phi(x)})$. Но группы $\pi_0(G_{\Phi(x)})$ и $\pi_1(\mathcal{O})$ могут быть абелевы только одновременно. Это легко увидеть из отрезка гомотопической последовательности расслоения $G \to G/G_{\Phi(x)} \simeq \mathcal{O}$

$$\ldots \to \pi_1(G) \to \pi_1(\mathcal{O}) \to \pi_0(G_{\Phi(x)}) \to \pi_0(G).$$

Группу G мы считаем связной: $\pi_0(G)=0$. Группа $\pi_1(G)$ – абелева. Мы видим, что $\pi_0(G_{\Phi(x)}) = \pi_1(\mathcal{O})/A$, где A – абелев нормальный делитель группы $\pi_1(\mathcal{O})$.

Доказательство предложения.

Пусть $G/H_0 = \mathcal{U}$. Выберем на $\mathcal{U}$ некоторую меру m, квазиинвариантную относительно G. Зафиксируем измеримое сечение $\sigma : \mathcal{U} \to G$ расслоения $G \to \mathcal{U}$. Представление $T_{\mathcal{N}}$ может быть реализовано в пространстве $\mathcal{H} = L_2(\mathcal{U}, m)$ по формуле:

$$(T_{\mathcal{N}}(g)\psi)(u) = U_0(h)\psi(u\cdot g)\sqrt{\frac{dm(u\,g)}{dm(u)}}, \tag{30}$$

где $h = \sigma(u) g \sigma(u\cdot g)^{-1} \in H_0$

Пусть $G/H = \mathcal{V}$, n – квазиинвариантная мера на $\mathcal{V}$, а $\tau : \mathcal{V} \to G$ – измеримое сечение расслоения $G \to \mathcal{V}$. Представление $T_{\mathcal{O},\chi}$ действует в пространстве $L_2(\mathcal{V}, n)$ по формуле:

$$(T_{\mathcal{O},\chi}(g)\varphi)(v) = U(k)\varphi(v\cdot g)\sqrt{\frac{dn(v\cdot g)}{dn(v)}}, \tag{31}$$

где $k = \sigma(v) g \tau(v\cdot g)^{-1} \in H$.

Для доказательства будет удобно использовать другую реализацию представления $T_{\mathcal{O},\chi}$. Опишем ее.

Заметим, что группа Γ естественным образом действует (свободно) на многообразии $\mathcal{U}$. При этом $\mathcal{V} = \mathcal{U}/\Gamma$. Действие Γ на $\mathcal{U}$ перестановочно с действием G.

Пусть $\mathcal{F} \subset \mathcal{U}$ – фундаментальная область группы Γ. Определим гильбертово пространство $\mathcal{H}_\chi$ как пространство функций на $\mathcal{U}$, удовлетворяющих условиям: $\psi|_{\mathcal{F}} \in L_2(\mathcal{F}, m)$, $\psi(\gamma u) = \chi(\gamma)\psi(u)$ для всех $\gamma \in \Gamma$. Скалярное произведение в $\mathcal{H}_\chi$ зададим формулой:

$$(\psi_1, \psi_2)_\chi = \int_{\mathcal{F}} \psi_1(u)\overline{\psi_2}(u)\,dm(u)$$

Покажем теперь, что при фиксированных τ и n можно подобрать сечение σ и меру m таким образом, что формула (30) будет определять унитарное представление группы G в пространстве $\mathcal{H}_\chi$.

Причем это представление будет эквивалентно $T_{\theta,\chi}$.

Пусть $\pi: \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ – естественная проекция. π перестановочна с действием группы G . Отображение $\pi|_{\mathcal{F}}$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между $\mathcal{F}$ и $\mathcal{V}$. С помощью $\pi|_{\mathcal{F}}$ перенесем меру n с $\mathcal{V}$ на $\mathcal{F}$. Продолжим эту меру с $\mathcal{F}$ на все $\mathcal{U}$ так, чтобы полученная в результате продолжения мера на $\mathcal{U}$ была инвариантна относительно Γ . Построенную таким образом меру на $\mathcal{U}$ выберем в качестве m . Этот выбор законен, поскольку построенная мера m квазиинвариантна относительно G :

$$\frac{dm(u\cdot g)}{dm(u)} = \frac{dn(\pi u\cdot g)}{dn(\pi u)}.$$

Теперь выберем сечение σ таким образом, чтобы для всех $u\in\mathcal{U}$ и всех $g\in G$ выполнялось равенство:

$$U_0(\sigma(u)g\sigma(u\cdot g)^{-1}) = U(\tau(\pi u)\cdot g\tau(\pi u\cdot g)^{-1}). \qquad (32)$$

Убедимся, что это можно сделать. Возьмем произвольную точку $v_0\in\mathcal{V}$. v_0 – это класс смежности в G по подгруппе H . Так как τ – сечение расслоения $G\to\mathcal{V}$, то $\tau(v_0)\in v_0$. v_0 является объединением классов смежности по подгруппе H_0 , лежащих в $\pi^{-1}(v_0)$. Следовательно, $\tau(v_0)$ принадлежит некоторому классу смежности u_0 по подгруппе H_0 : $\tau(v_0)\in u_0\subset v_0$. Определим сечение σ в точке $u_0\in\mathcal{U}$: $\sigma(u_0)\equiv\tau(v_0)$. Это законно, так как мы получаем $\sigma(u_0)\in u_0$, что как раз и нужно для того, чтобы σ было сечением. Теперь ясно, что (32) выполняется для $u=u_0$ и всех g , принадлежащих стационарной подгруппе G_{u_0} точки u_0 :

$$U_0(\sigma(u_0)g\sigma(u_0)^{-1}) = U(\tau(\pi u_0)g\tau(\pi u_0)^{-1}).$$

Действительно, $\sigma(u_0)=\tau(\pi u_0)$ и U совпадает с U_0 на H_0 . Пусть теперь $g\notin G_{u_0}$. Нужно определить $\sigma(u_0\cdot g)$ так, чтобы выполнялось равенство:

$$U_0(\sigma(u_0)g\sigma(u_0\cdot g)^{-1}) = U(\tau(\pi u_0)\cdot g\cdot\tau(\pi u_0 g)^{-1}).$$

Это можно сделать. Действительно, когда $\sigma(u_0\cdot g)$ пробегает класс смежности $u_0 g$, $U_0(\sigma(u_0)g\sigma(u_0 g)^{-1})$ пробегает все множество $U_0(H_0)$, которое совпадает с единичной окружностью. ($U_0(H_0)$ – связная нетривиальная подгруппа окружности). Проверим, что $\sigma(u_0\cdot g)$ зависит только от точки $u_0 g$, а не от g . Пусть $g_0\in G_{u_0}$. Мы имеем

$$U_0(\sigma(u_0)g_0 g\sigma(u_0 g)^{-1}) = U_0(\sigma(u_0)g_0\sigma(u_0)^{-1})\,U_0(\sigma(u_0)g\sigma(u_0\cdot g)^{-1}) =$$

$$= U(\tau(\pi u_0)g_0\tau(\pi u_0)^{-1})\,U(\tau(\pi u_0)g\tau(\pi u_0 g)^{-1}) =$$

$$= U(\tau(\pi u_0)g_0 g\,\tau(\pi u_0 g)^{-1}).$$

Таким образом, сечение σ определено во всех точках многообразия $\mathcal{U}$. Остается проверить, что (32) выполняется для любой точки $u \in \mathcal{U}$. Пусть g_1 – какой-нибудь элемент, переводящий точку u_0 в u : $u_0 g_1 = u$. Имеем:

$$U_0(\sigma(u) g \sigma(ug)^{-1}) = U_0(\sigma(u_0 g_1) g \sigma(u_0 g_1 g)^{-1}) =$$

$$= U_0(\sigma(u_0) g_1 \sigma(u_0 g_1)^{-1})^{-1} U_0(\sigma(u_0) g_1 g \sigma(u_0 g_1 g)^{-1}) =$$

$$= U(\tau(\pi u_0) g_1 \tau(\pi u_0 g_1)^{-1})^{-1} U(\tau(\pi u_0) g_1 g \tau(\pi u_0 g_1 g)^{-1}) =$$

$$= U(\tau(\pi u_0 g_1) g \tau(\pi u_0 g_1 g)^{-1}) = U(\tau(\pi u) g \tau(\pi u g)^{-1}).$$

Итак, доказано, что сечение σ можно выбрать так, чтобы выполнялось равенство (32).

Теперь, когда σ и m выбраны только что описанным способом, легко видеть, что формула (30) определяет унитарное представление группы G в пространстве $\mathcal{H}_\chi$. Нетрудно убедиться, что это представление эквивалентно представлению $T_{\sigma,\chi}$. (Эквивалентность осуществляется изоморфизмом $\mathcal{H}_\chi \to L_2(\mathcal{U}, n) : \psi \to \psi \circ (\pi|_{\mathcal{F}})^{-1}$.

Итак, описана новая реализация представления $T_{\sigma,\chi}$. Теперь формула (29) легко может быть доказана.

Проверим сначала, что

$$\mathcal{H} = \int_{\hat{\Gamma}} \oplus \mathcal{H}_\chi \, d\chi. \tag{33}$$

Этот факт является следствием теории преобразования Фурье на абелевой группе Γ. Каждой функции $\psi \in \mathcal{H}$ соответствует набор функций $\{\psi_\chi \in \mathcal{H}_\chi ;\ \chi \in \Gamma\}$:

$$\psi_\chi(u) = \int_\Gamma \psi(\gamma u) \chi(\gamma)^{-1} d\gamma. \tag{34}$$

Обратное преобразование дается формулой

$$\psi(\gamma u) = \int_{\hat{\Gamma}} \psi_\chi(u) \chi(\gamma) \, d\chi$$

или просто

$$\psi(u) = \int_{\hat{\Gamma}} \psi_\chi(u) \, d\chi \tag{35}$$

Согласно формуле Планшереля для преобразования Фурье на группе Γ :

$$\int_\Gamma |\psi(\gamma u)|^2 d\gamma = \int_{\hat{\Gamma}} |\psi_\chi(u)|^2 d\chi. \tag{36}$$

Покажем, что соответствие $\psi \to \{\psi_\chi ; \chi \in \Gamma\}$ является изоморфизмом между $\mathcal{H}$ и $\int_{\hat{\Gamma}} \oplus \mathcal{H}_\chi$. Достаточно проверить, что это соответствие сохраняет скалярное произведение. Учитывая (36) и вспоминая, что

мера m инвариантна относительно Γ, имеем

$$\|\psi\|^2_{\mathcal{H}} = \int_{\mathcal{U}} |\psi(u)|^2 dm(u) = \int_{\Gamma} d\gamma \int_{\gamma\mathcal{F}} |\psi(u)|^2 dm(u) = \int_{\Gamma} d\gamma \int_{\mathcal{F}} |\psi(\gamma u)|^2 dm(u) =$$

$$= \int_{\hat{\Gamma}} d\chi \int_{\mathcal{F}} |\psi_\chi(u)|^2 dm(u) = \int_{\hat{\Gamma}} \|\psi_\chi\|^2_{\mathcal{H}_\chi} d\chi.$$

Таким образом, формула (33) доказана.

Теперь формула (29) становится очевидной. Действительно, каждое представление $T_{\sigma,\chi}$ (в новой реализации) действует в пространстве $\mathcal{H}_\chi$ по формуле (30). Тем самым определяется унитарное представление группы G в пространстве $\int_{\hat{\Gamma}} \oplus \mathcal{H}_\chi d\chi$. Из формулы (35) видно, что это представление совпадает с представлением $T_{\mathcal{N}}$ в пространстве $\mathcal{H}$: $\forall g \in G\ \forall \psi \in \mathcal{H}$

$$(T_{\mathcal{N}}(g)\psi)(u) = U_0(h)\psi(u\cdot g)\sqrt{\frac{dm(u\cdot g)}{dm(u)}} =$$

$$= \int_{\hat{\Gamma}} U_0(h)\psi_\chi(u\cdot g)\sqrt{\frac{dm(u\cdot g)}{dm(u)}} d\chi = \int_{\hat{\Gamma}} (T_{\sigma,\chi}(g)\psi_\chi)(u) d\chi.$$

Предложение доказано.

7. В этом пункте приводится пример квазирегулярного представления, для которого гипотеза оказывается справедливой.

Пусть $G = SL(n,\mathbb{R})$ – группа вещественных матриц n – порядка с определителем I. Ее алгебра Ли $\mathfrak{g} = sl(n,\mathbb{R})$ состоит из матриц с нулевым следом. G транзитивно действует на многообразии

$$Q = \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : g : q \longrightarrow g^{-1}q.$$

В пространстве $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R}^n)$ возникает квазирегулярное представление группы G:

$$(T(g)\psi)(q) = \psi(g^{-1}q) \quad \forall g \in G\ \forall \psi \in \mathcal{H} \tag{37}$$

T унитарно, так как $\det g = 1$.

Построим разложение T на неприводимые компоненты. Для того, чтобы проиллюстрировать общие рассуждения, приведенные в конце пункта 5, сделаем это построение по описанной там схеме.

У нас есть механическая система с фазовым пространством $T^*Q = (\mathbb{R}^n \setminus 0) \times \mathbb{R}^n$. G действует на T^*Q по формуле (II), которая в нашем случае имеет вид

$$g : (q,p) \longrightarrow (g^{-1}q, g^*p) \quad \forall g \in G \quad \forall (p,q) \in T^*Q.$$

В дальнейшем векторы из первого слагаемого $\mathbb{R}^n \setminus 0$ будут обозначаться q, а из второго p. $(q_1,\dots,q_n,p_1,\dots,p_n)$ – это линейные канонические координаты в T^*Q. Введем также обозначе-

ние $q\cdot p \equiv \sum_{i=1}^{n} q_i p_i$.

Формулы (I2) и (I8) принимают вид:

$$F_A(q,p) = Aq\cdot p \quad \forall A \in \mathfrak{g} \tag{38}$$

$$\hat{F}_A = -i\, Aq\cdot\nabla \tag{39}$$

($\hat{F}_A$ - самосопряжен в $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R}^n)$, так как $\operatorname{tr} A = 0$).

Наша система имеет один интеграл движения $F(q,p) = q\cdot p$. При квантовании этой функции сопоставляется оператор

$$\hat{F} = -iq\cdot\nabla - \tfrac{i}{2}n.$$

Ясно, что $[\hat{F}_A, \hat{F}] = 0$, для всех $A \in \mathfrak{g}$.

Перейдем к реализации пространства $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R}^n)$ в которой оператор $\hat{F}$ диагонален:

$$\mathcal{H} = \int_{-\infty}^{\infty} \oplus\, \mathcal{H}_\rho\, d\rho.$$

(Интеграл имеет такой вид, поскольку $\hat{F}$ обладает непрерывным спектром, заполняющим всю ось $(-\infty,\infty)$, и спектральный тип $\hat{F}$ есть тип меры Лебега). В пространствах $\mathcal{H}_\rho$ действуют унитарные подпредставления T_ρ представления T . Мы получаем разложение:

$$T = \int_{-\infty}^{\infty} \oplus\, T_\rho\, d\rho \tag{40}$$

$\mathcal{H}_\rho$ может быть реализовано как пространство функций, удовлетворяющих уравнению

$$q\cdot(\nabla\psi)(q) = (i\rho - \tfrac{n}{2})\psi(q).$$

Нетрудно видеть, что это в точности все функции, удовлетворяющие условию

$$\psi(tq) = t^{i\rho - \frac{n}{2}}\psi(q) \quad \forall t \in \mathbb{R},\ t > 0.$$

Скалярное произведение задается формулой

$$(\psi_1, \psi_2) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi_1(q)\,\overline{\psi_2(q)}\ \delta(|q|^2 - 1)\, dq$$

T_ρ действует в $\mathcal{H}_\rho$ по формуле

$$(T_\rho(g)\psi)(q) = \psi(g^{-1}q).$$

Представления T_ρ приводимы. Действительно $\mathcal{H}_\rho$ распадается в прямую сумму двух подпространств, инвариантных относительно T_ρ :

$$\mathcal{H}_\rho = \mathcal{H}_\rho^+ \oplus \mathcal{H}_\rho^-$$

$\mathcal{H}_\rho^+$ состоит из четных функций:

$$\psi(tq) = |t|^{i\rho - \frac{n}{2}}\psi(q) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$\mathcal{H}_\rho^-$ состоит из нечетных функций:

$$\psi(tq) = \operatorname{sign} t \cdot |t|^{i\rho - \frac{n}{2}} \psi(q) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

В $\mathcal{H}_\rho^+$ и $\mathcal{H}_\rho^-$ реализуются представления T_ρ^+ и T_ρ^- :

$$T_\rho = T_\rho^+ \oplus T_\rho^-. \tag{41}$$

Формулы (40) и (41) дают разложение T на неприводимые компоненты.

Покажем теперь, что гипотеза, сформулированная в пункте 4, приводит к такому же разложению представления T.

Пусть $M_\rho (\rho \neq 0)$ – подмногообразие в $T^*Q = (\mathbb{R}^n \setminus 0) \times \mathbb{R}^n$, определяемое условием

$$q \cdot p - \rho = 0. \tag{42}$$

Нетрудно убедиться, что G транзитивно действует на M_ρ.

Каждому многообразию M_ρ соответствует элементарная механическая система $(\mathcal{N}_\rho, \omega_\rho, G)$. Опишем многообразие $\mathcal{N}_\rho$.

Пусть ω_{M_ρ} – сужение естественной симплектической формы ω, существующей на T^*Q, на подмногообразие M_ρ. Форма ω_{M_ρ} вырождена. Действительно, для любого векторного поля V, касательного к M_ρ,

$$\omega_{M_\rho}(\xi, V) = 0,$$

где $\xi = q \frac{\partial}{\partial q} - p \frac{\partial}{\partial p}$ – гамильтоново векторное поле, соответствующее связи (42). $\mathcal{N}_\rho$ – представляет собой многообразие интегральных кривых поля ξ. Эти кривые задаются формулами: $\forall t \in \mathbb{R}$ $q(t) = q_0 e^t$, $p(t) = p_0 e^{-t}$. Поэтому, $\mathcal{N}_\rho$ – это множество классов эквивалентности точек поверхности M_ρ, таких, что в один класс входят точки вида $(\alpha q, \alpha^{-1} p)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$.

Теперь с помощью метода орбит построим представления $T_{\mathcal{N}_\rho}$, соответствующие элементарным системам $(\mathcal{N}_\rho, \omega_\rho, G)$, и убедимся, что эти представления эквивалентны T_ρ. (Все вычисления будут проделаны для случая $\rho \neq 0$. Для того, чтобы построить представление $T_{\mathcal{N}_0}$, необходимо отдельное вычисление. Так как $T_{\mathcal{N}_0}$ входит в разложение представления T с нулевым весом, то это вычисление не приводится).

Выберем точку $x \in \mathcal{N}_\rho$ следующим образом:

$$x = \{(\alpha q, \alpha^{-1} p), \alpha \in (0, \infty)\}, \quad \text{где}$$

$$q_i = \rho \delta_{in}, \; p_i = \delta_{in} \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{43}$$

Стационарная подгруппа G_x этой точки состоит из матриц $g \in G$, удовлетворяющих условиям:

$$g_{nj} = 0 \qquad j = 1, \ldots, n-1 \tag{44}$$

$$g_{in}=0\ ,\ i=1,\dots,n-1 \tag{45}$$

$$g_{nn}>0\,. \tag{46}$$

Ясно, что G_x связна.

Из (38) и (43) видно, что функционал $\Phi(x)$, определенный формулами (6) и (13), имеет вид:

$$\langle\Phi(x),A\rangle=\rho A_{nn},\ \forall A\in\mathfrak{g}.$$

В качестве допустимой подалгебры, подчиненной $\Phi(x)$, можно взять подалгебру $\mathfrak{f}$, состоящую из матриц $A\in\mathfrak{g}$, удовлетворяющих условию (45). Связная подгруппа H_0, соответствующая подалгебре $\mathfrak{f}$, состоит из матриц $h\in G$, удовлетворяющих условиям (45) и (46). Одномерное представление (7) алгебры $\mathfrak{f}$ имеет вид:

$$A\longmapsto i\rho A_{nn}.$$

Ему соответствует одномерное унитарное представление U_0 группы H_0:

$$U_0(h)=(h_{nn})^{i\rho}.$$

Так как G_x связна, то группа (8) совпадает с H_0. Поэтому, $T_{\mathcal{N}_\rho}$ – это представление группы G, индуцированное U_0. Вычислим его.

Однородное многообразие G/H_0 эквивалентно единичной сфере $\mathcal{U}=\{u\in\mathbb{R}^n;\ |u|=1\}$, на которой группа G действует по правилу: $u\to\frac{g^{-1}u}{|g^{-1}u|}$. Действительно, стационарная подгруппа точки $(0,\dots,0,1)\in\mathcal{U}$ совпадает с H_0.

Пусть m – естественная мера на сфере $\mathcal{U}$, инвариантная относительно вращений. Мера m квазиинвариантна относительно действия группы G. Можно проверить, что

$$\frac{dm\left(\frac{g^{-1}u}{|g^{-1}u|}\right)}{dm(u)}=|g^{-1}u|^{-n}.$$

Выберем сечение $\sigma:\mathcal{U}\to G$ расслоения $G\to\mathcal{U}$ таким образом, чтобы $\sigma(u)\in SO(n)$ для всех $u\in\mathcal{U}$.

Представление $T_{\mathcal{N}_\rho}$ действует в пространстве $L_2(\mathcal{U},m)$ по формуле:

$$\left(T_{\mathcal{N}_\rho}(g)\psi\right)(u)=(h_{nn})^{i\rho}\,\psi\left(\frac{g^{-1}u}{|g^{-1}u|}\right)|g^{-1}u|^{-n/2},$$

где $h=\sigma(u)g\sigma\left(\frac{g^{-1}u}{|g^{-1}u|}\right)^{-1}$. Поскольку $\sigma(u)\in SO(n)$, то, как легко проверить, $h_{nn}=|g^{-1}u|$. Поэтому формула для $T_{\mathcal{N}_\rho}$ принимает вид:

$$\left(T_{\mathcal{N}_\rho}(g)\psi\right)(u)=|g^{-1}u|^{i\rho-\frac{n}{2}}\,\psi\left(\frac{g^{-1}u}{|g^{-1}u|}\right).$$

Сравнивая эту формулу с формулами определяющими представление T_ρ, нетрудно убедиться, что $T_{\mathcal{N}_\rho}$ и T_ρ эквивалентны.

Таким образом, в рассмотренном примере гипотеза оказалась справедливой. С ее помощью было получено правильное разложение (40).

В заключение выясним как выглядит в этом примере разложение (29).

Многообразия $\mathcal{N}_\rho$ не являются орбитами группы G в $\mathfrak{g}^*$, а являются накрывающими многообразиями для некоторых орбит $\mathcal{O}_\rho$. Укажем эти орбиты.

Пространство $\mathfrak{g}^*$ отождествляется с $\mathfrak{g}=sl(n,\mathbb{R})$ с помощью невырожденной билинейной формы $tr(AB)$. Группа G действует в $\mathfrak{g}$ по правилу: $A \to gAg^{-1}$. При указанном отождествлении функционал $\Phi(x)$ (где x задана формулой (43)) совпадает с матрицей: $-\frac{1}{n}\rho\delta_{ij}+\rho\delta_{in}\delta_{jn}$. $\mathcal{O}_\rho$ – это орбита, проходящая через эту матрицу.

Нетрудно проверить, что стационарная подгруппа $G_{\Phi(x)}$ состоит из матриц $g \in G$, удовлетворяющих условиям (44) и (45). Поэтому $G_{\Phi(x)}$ состоит из двух компонент связности, одна из которых совпадает с G_x. Мы видим, что многообразие $\mathcal{N}_\rho$ двулистно накрывает орбиту $\mathcal{O}_\rho$.

Подгруппа $H=G_{\Phi(x)}H_0$ состоит из матриц $h \in G$, удовлетворяющих условию (45). Видно, что H имеет две компоненты связности: $\Gamma \equiv \pi_0(H)=\mathbb{Z}_2$. Группа характеров $\hat{\Gamma}=\mathbb{Z}_2$. Поэтому разложение (29) принимает вид:

$$T_{\mathcal{N}_\rho} = T^+_{\mathcal{O}_\rho} \oplus T^-_{\mathcal{O}_\rho}.$$

Можно проверить, что представления $T^+_{\mathcal{O}_\rho}$ и $T^-_{\mathcal{O}_\rho}$ эквивалентны представлениям T^+_ρ и T^-_ρ.

Таким образом в рассмотренном примере разложение (29) дается формулой (41).

8. В заключение автор хотел бы поблагодарить Л.Д.Фаддеева за внимание к работе и ценные советы, а также В.С.Буслаева и М.А.Семенова-Тян-Шанского за обсуждение работы. Автор признателен А.А.Кириллову за ценные советы.

После того, как настоящая работа была написана, автор узнал, что изложенная в пункте 4 процедура разложения кокасательного пучка T^*Q на элементарные механические системы $(\mathcal{N},\omega_{\mathcal{N}},G)$ известна А.М.Вершику. Эта процедура рассматривалась А.М.Вершиком в связи с другой задачей. Соответствующие результаты, однако, не были опубликованы.

Автор хотел бы выразить А.М.Вершику свою признательность за обсуждение работы.

Литература

[1]. А.А.Кириллов. Унитарные представления нильпотентных групп Ли. УМН, т.17, вып.4, 1962.

[2]. R. Abraham. Foundation of Mechanics, Benjamin, N.Y., 1967.

[3]. В.И.Арнольд. Лекции по классической механике.

[4]. Л.Д.Фаддеев. Интегралы Фейнмана для сингулярных лагранжианов. ТМФ, т.1, № 1, 1969.

[5]. А.А.Кириллов. Конструкции унитарных неприводимых представлений групп Ли. Вестник МГУ. Математика, механика, № 2, 1970.

[6]. А.А.Кириллов. Лекции по теории представлений групп.IУ. (Представления групп и механика).

[7]. П.А.М.Дирак. Лекции по квантовой механике. М., "Мир", 1968.