УДК 519.23

АСИМПТОТИЧЕСКИ ПОДОБНЫЕ КРИТЕРИИ

А. В. Бернштейн

ВВЕДЕНИЕ

0.1. Настоящий обзор посвящен работам по асимптотически подобным критериям для проверки сложных статистических гипотез с мешающими параметрами. Пусть на измеримом пространстве $(\mathscr{X}, \mathfrak{B})$ задано семейство вероятностных мер P_ω, зависящих от параметра $\omega \in \Omega \subset R^m$. По наблюдению x над случайной величиной (сл. в.) X, имеющей распределение P_ω, проверяется гипотеза H_0 (нулевая гипотеза), заключающаяся в том, что параметр ω принадлежит некоторому подмножеству $\Omega_0 \subset \Omega$; альтернативная гипотеза H_1 заключается в том, что $\omega \in \Omega_1 = \Omega \setminus \Omega_0$. Обычно множество Ω_0 имеет следующую структуру:

$$\Omega_0 = \{\omega \in \Omega : h_j(\omega) = a_j,\ j = 1, \ldots, r\}, \tag{1}$$

где $h_1(\cdot), \ldots, h_r(\cdot)$, $r < m$ — известные вещественные функции, а $a_1, \ldots, a_r$ — заданные константы. Частным, но наиболее распространенным случаем (1) является случай, когда $h_1, \ldots, h_r$ — координатные функции, т. е. $h_j(\omega) = \omega_j$ — j-я координата вектора $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_m)'$, $j = 1, \ldots, r$. Для этого случая введем обозначения: $\xi_j = \omega_j$, $\xi_{0j} = a_j$, $j = 1, \ldots, r$; $\theta_\nu = \omega_{r+\nu}$, $\nu = 1, \ldots, s$, где $s = m - r$. Тем самым, $\omega = (\xi, \theta)'$, где $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_r)' \in \Xi$, $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_s)' \in \Theta$, и будем предполагать, что $\Omega = \Xi \times \Theta$. Гипотезы H_0 и H_1 в этом частном случае относятся только к части компонент параметра ω, а именно — к параметру ξ, и заключаются, соответственно, в том, что $\xi = \xi_0$ и $\xi \in \Xi \setminus \xi_0$, где ξ_0 — известный вектор. Параметр ξ в этой задаче называют основным, или информативным, а параметр θ, значение которого не задается ни при нулевой, ни при альтернативной гипотезах — мешающим (это определение введено Хотеллингом в [151]).

В большей части обзора будет рассматриваться задача проверки гипотезы о параметре ω по последовательности $x_1, \ldots, x_n$ n наблюдений над последовательностью $X_1, \ldots, X_n$ независимых сл. в., каждая из которых имеет распределение

P_ω. В этом случае будем говорить о наблюдении $x^{(n)}=(x_1, \ldots, x_n)$ над сл. вектором $X^{(n)}=(X_1, \ldots, X_n)$ с распределением $P_\omega^{(n)}$, и называть n объемом выборки.

0.2. Пусть $\varphi(x)$ — критерий для проверки гипотезы H_0, он характеризуется своей функцией мощности

$$\beta(\omega)=\beta(\omega \mid \varphi)=\int \varphi(x)\, dP_\omega$$

(в дальнейшем, если область интегрирования не указана, то это означает, что она совпадает со всем пространством). Эта функция имеет различный статистический смысл в зависимости от того, принадлежит ли ω подмножествам Ω_0 или Ω_1. При $\omega \in \Omega_0$ величина $\beta(\omega)$ есть вероятность отвергнуть гипотезу H_0, когда она истинна; в этом случае величину $\beta(\omega \mid \varphi)$ называют уровнем значимости, а $\sup\{\beta(\omega \mid \varphi),\ \omega \in \Omega_0\}$ — гарантированным уровнем значимости (или размером) критерия φ. При $\omega \in \Omega_1$ величина $\beta(\omega \mid \varphi)$ есть вероятность отвергнуть H_0, когда она неверна (верна альтернативная гипотеза); в этом случае значения $\beta(\omega \mid \varphi)$ называют мощностью критерия φ. В классических постановках проблема проверки гипотезы заключается в отыскании такого критерия, который бы имел малый размер критерия (например, не превышающий заданного числа α) и возможно бóльшую мощность.

0.3. Так как значение неизвестного мешающего параметра θ не задается ни при H_0, ни при H_1, мы, вообще говоря, не можем вычислить ни уровня значимости $\beta(\xi_0, \theta \mid \varphi)$, ни мощности $\beta(\xi, \theta \mid \varphi)$ критерия φ, и судить о качестве этого критерия. Поэтому, естественно, попытаться рассматривать только такие критерии φ, у которых функция мощности $\beta(\xi, \theta \mid \varphi)$ не зависит от мешающего параметра θ; они были названы в монографии Ю. В. Линника [43] «критериями с инвариантной мощностью» (понимая при этом инвариантность относительно мешающего параметра). Примеры таких критериев приведены в § 3 гл. III этой монографии. Критерии с инвариантной мощностью существуют всегда, например, тривиальный критерий $\varphi_0=\alpha$, где $\alpha \in [0, 1]$ — некоторое число. Однако во многих статистических задачах этим критерием ограничиваются все критерии с инвариантной мощностью. В частности, таких критериев не существует (за исключением φ_0) для простейшей статистической задачи — задачи Стьюдента: по выборке $x^{(n)}$ из нормального распределения $N(a, \sigma^2)$ проверить гипотезу $a=a_0$ о среднем значении, когда дисперсия σ^2 — неизвестный мешающий параметр; см. Дантциг [118], Ю. В. Линник [43].

0.4. Поэтому требование независимости функции мощности от мешающего параметра заменяется более слабым требованием независимости $\beta(\xi, \theta \mid \varphi)$ от θ, хотя бы при нулевой гипотезе, т. е. при всех $\theta \in \Theta$.

$$\beta(\xi_0, \theta \mid \varphi)=\alpha, \tag{2}$$

где α — размер критерия. Впервые такие критерии, имеющие постоянный уровень значимости при всех значениях мешающего параметра, были рассмотрены в работах Неймана и Пирсона [220, 221] (см., также, [208]); и они были названы подобными критериями.

Нетривиальные подобные критерии существуют уже в более широком классе задач проверки гипотез (например, в задачах проверки гипотез о параметрах экспоненциальных семейств распределений). Отметим, что хотя подобные критерии «используют весь» размер критерия α, могут существовать неподобные критерии, имеющие тот же размер α и мощность бо́льшую, чем мощность наилучшего подобного критерия. Пример такого критерия, лучшего, чем наилучший подобный критерий (критерий Стьюдента) в задаче Стьюдента при $\alpha<1/2$, построен в работе Лемана и Стейна [184].

0.5. Однако нетривиальные подобные критерии существуют лишь для семейств распределений, обладающих определенной структурой (см. § 1 обзора). Более того, если нетривиальный критерий и существует в задачах о параметрах некоторого семейства распределений $P_{\xi,\theta}$, то обычно существуют сколь угодно близкие (в некоторой топологии) семейства, для которых не существует нетривиальных подобных критериев. Поэтому в таких случаях рассматривают критерии (точнее, последовательность критериев) $\{\varphi_n\}$, у которых соотношение (2) выполняется асимптотически при неограниченном возрастании объема выборки n, т. е. при всех $\theta\in\Theta$

$$\lim_{n\to\infty}\beta_n(\xi_0,\theta\mid\varphi_n)\equiv\lim_{n\to\infty}\int\varphi_n(x^{(n)})\,dP^{(n)}_{\xi_0,\theta}=\alpha. \qquad (3)$$

Последовательность критериев $\{\varphi_n\}$, удовлетворяющая условию (3), называется асимптотически подобной (АП), это определение было введено Вальдом в работе [262]. Асимптотическая задача проверки сложной гипотезы будет заключаться в отыскании в классе АП критериев заданного уровня α критериев, обладающих теми или иными оптимальными асимптотическими свойствами.

0.6. Настоящий обзор касается, в основном, работ, в которых рассматриваются АП-критерии; исключение составляет § 1, в котором критерии являются подобными при конечных объемах выборки. Целью этого параграфа не является обзор всех работ по подобным критериям. Хотя, конечно, подобные при каждом n критерии являются и АП-критериями, идеи и методы, лежащие в основе построения подобных критериев, существенно отличаются от идей и методов, используемых в асимптотической статистике. Однако многие понятия и результаты, встречающиеся в теории АП-критериев, тесно связаны с основными классическими результатами о подобных критериях. Например, наиболее развита теория подобных критериев для проверки гипотез о параметрах экспоненциальных семейств; в этих задачах существуют равномерно наиболее мощные подобные критерии (или полный класс таких критериев в многомерном случае). В теории же АП-критериев класса $C(\alpha)$ или асимптотически эквивалентных им критериев существование асимптотически наилучших критериев связано с тем, что при больших объемах выборки n семейство распределений $P_{\xi,\theta}^{(n)}$ удается аппроксимировать экспотенциальным семейством распределений, и дальше использовать классические результаты о подобных критериях для параметров этих семейств. Эти критерии основаны на статистиках, являющихся достаточными для предельных экспоненциальных семейств и «асимптотически достаточными» для исходных семейств. В § 1 и описаны, в основном, только те результаты, которые имеют аналоги в асимптотической теории и могут сделать более ясными и наглядными асимптотические результаты.

В § 2 рассмотрены работы по АП-критериям, построенным при помощи принципа отношения правдоподобия (ОП) и тесно связанных с ними критериев, основанных на оценках параметров. В § 3 рассмотрены АП-критерии для проверки сложной гипотезы согласия с заданным параметрическим семейством, а также основанные на критериях согласия АП-критерии для проверки сложных гипотез с мешающими параметрами. В § 4 рассмотрены работы по так называемым АП-критериям класса $C(\alpha)$.

Отдельные разделы обзора написаны с разной степенью подробности. Кратко рассмотрены работы, представляющие в настоящий момент лишь исторический интерес или подробно описанные в существующих монографиях и учебниках по математической статистике (напр., классические результаты о критериях ОП). В то же время дается подробный обзор работ, отражающих современное состояние вопроса. Для некоторых классов АП-критериев, не вошедших в монографии и учебники на русском языке и описанных, в основном, в зарубежных периодических изданиях (например, класс $C(\alpha)$- критериев), в обзоре приведены и основные результаты о таких критериях. Приводятся также работы, в которых описано применение АП-критериев для решения статистических и естественно-научных задач.

§ 1. ПОДОБНЫЕ КРИТЕРИИ

1.1. В большинстве работ, посвященных подобным критериям, предполагается существование достаточной статистики $T(x)$ для мешающего параметра θ. В этом случае условное распределение $P_{\xi,\theta}(\cdot\,|\,t)$ сл. в. X при условии $T=t$ не зависит от θ и, построив области, условная $P_{\xi_0,\theta}(\cdot\,|\,t)$-вероятность которых равна α при всех t, мы в итоге получим подобную бкритическую область (см. Нейман [210], Бартлетт [84]).

Используя это замечание, можно для одномерного параметра ξ при каждом значении $T=t$ построить, как это делается в [220] (см. также, например, монографии [58], пункт 7.а.4, или [74], § 6, гл. III), локально наиболее мощный (ЛНМ) критерий $\varphi_1(x|t)$ (при односторонних альтернативах) или (при двусторонних альтернативах) ЛНМ несмещенный (ЛНМН) критерий $\varphi_2(x|t)$. Эти критерии максимизируют первую или, соответственно, вторую (при нулевой первой) производную функции мощности в точке $\xi=\xi_0$, отвечающей нулевой гипотезе. В дальнейшем критерии $\varphi_1(x|t)$ и $\varphi_2(x|t)$ рассматриваются как безусловные (зависящие от x и $T(x)$), и они будут ЛНМ и, соответственно, ЛНМН подобными критериями (см. статью Неймана [210]). Эти результаты в дальнейшем обобщались Леманом [180] и Шеффе [252]. Связь между достаточными статистиками и подобными критериями изучалась Ватсоном [264], Нолле [230], Фрэзером [137], Нейманом [212], Чандой [107]. В статьях Басу [92, 93] содержится обзор методов по исключению мешающих параметров и связанных с ними вопросов о частичной достаточности статистик.

1.2. Оба рассмотренных критерия $\varphi_1(x|t)$ и $\varphi_2(x|t)$ обладают свойством: их условный уровень значимости постоянен при всех θ и всех значениях t достаточной статистики T:

$$\mathrm{E}_{\xi_0,\theta}\{\varphi(X)\,|\,T(X)=t\}=\alpha. \tag{4}$$

Про критерии, удовлетворяющие соотношению (4) для всех $\theta\in\Theta$ и п. в. t (по мерам $P^T_{\xi_0,\theta}$, индуцированным сл. в. T для различных θ), говорят, что они обладают структурой Неймана [209]. Естественно, такие критерии являются подобными. Важную роль в построении подобных критериев играет теорема Лемана и Шеффе [182]: для того чтобы все подобные критерии обладали структурой Неймана относительно достаточной (при нулевой гипотезе) статистики T, необходимо и достаточно, чтобы семейство распределений $P^T_{\xi_0,\theta}$ было ограниченно полным. Структуры Неймана являются классическим методом построения подобных критериев.

Наиболее простое и легко проверяемое условие ограниченной полноты достаточной статистики имеется для экспоненциального семейства мер, обладающих относительно некоторой σ-конечной меры μ плотностями

$$\frac{dP_{\xi,\theta}}{d\mu}=\exp\left\{\sum_{j=1}^{r}\xi_j U_j(x)+\sum_{\nu=1}^{s}\theta_\nu T_\nu(x)+c(\xi,\theta)\right\}. \tag{5}$$

Статистика $\mathbf{T}(x)=(T_1(x),\ldots,T_s(x))'$ будет достаточной для $\boldsymbol{\theta}$, семейство мер $P^T_{\xi,\theta}$ также является экспоненциальным семейством, и условие ограниченной полноты семейства $\{P^T_{\xi_0,\theta},\ \theta\in\Theta\}$ заключается в том, что множество $\Theta\subset R^s$ имеет непустую внутренность (см. [183]).

1.3. Для семейств (5) в одномерном случае $r=1$ ЛНМ и ЛНМН подобные критерии являются, соответственно, равномерно НМ (РНМ) и РНМН подобными критериями, т. е. свойства оптимальности для этих критериев уже носят нелокальный характер. Эти критерии были построены в статье Лемана и Шеффе [183] (см. также статью Свердрупа [261]) и они содержатся во многих учебниках и монографиях по математической статистике (напр., в [3, 27, 33]). Леман в работе [181] рассмотрел (при $r=1$ и односторонней альтернативе $\xi>\xi_0$) функции потерь общего вида и показал, что класс критериев, принимающих H_0 на множествах вида $\{U<C(T)\}$, является полным.

В многомерном случае $r>1$ РНМ критериев, как правило, не существует даже при отсутствии мешающих параметров, но в этой ситуации иногда удается указать полный класс критериев. Это и сделали Мэйтс и Трюакс в работе [189] в задаче проверки гипотезы $\xi=0$ (к этому легко сводится общий случай $\xi=\xi_0$) при альтернативе $\xi\neq 0$ о многомерном параметре ξ из семейства (5): они показали, что полный класс подобных критериев образуют критерии, принимающие H_0 при $\mathbf{U}\in C(\mathbf{T})$, где $\mathbf{U}=(U_1(x),\ldots,U_r(x))'$, а $C(\mathbf{T})$ — выпуклое множество в R^r, имеющее при каждом $\mathbf{T}=\mathbf{t}$ условную вероятность (при $\xi=0$) $(1-\alpha)$. Как показал Стейн [257], при определенных условиях класс критериев, введенных в [189], является минимальным полным классом.

Если рассматриваются только «односторонние» альтернативы: $\xi\neq 0$ и $\xi\in K$, где $K\subset R^r$ — выпуклый конус (например, известно, что часть компонент вектора ξ неотрицательны), то полный класс образуют критерии, у которых выпуклые множества $C(\mathbf{T})$ рецессивны в направлениях из K_0, где K_0 — поляра конуса K. Это показал Итон [127]; на эту тему см. также статьи Итона [128] и Ледвиной [179].

1.4. В работе Спитвола [256] результаты работ [183, 261] обобщаются на случай неэкспоненциальных семейств (при условии, что при нулевой гипотезе существует ограниченно полная достаточная статистика для мешающего параметра). Приведены теоремы о существовании ЛНМ подобных и ЛНМН критериев. Кроме того, в этой статье содержится обзор работ по ЛНМ подобным критериям. Другими работами, в которых строятся подобные критерии для неэкспоненциальных семейств (без использования структур Неймана), являются работы Ю. В. Линника и А. М. Кагана. В этих работах рассматривается семейство распределений, имеющих при нулевой гипотезе плотности

$$p(x,\theta)=\sum_{i=1}^{k} R_i(x,\theta)\, r_i(x),$$

тем самым, это семейство распределений P_θ может рассматриваться (при H_0) как конечная смесь распределений:

$$P_\theta = \sum_{i=1}^{k} c_i(\theta) P_\theta^{(i)}.$$

В работах Ю. В. Линника и А. М. Кагана [41, 185, 24—26] рассматривался случай, когда $R_i(x, \theta) = G_i(T(x), \theta)$, тогда статистика $T(x)$ достаточна для каждого из семейств $P_\theta^{(i)}$. Рассмотрим условные вероятности $P_\theta^{(i)}\{\cdot \mid T(x) = t\}$, $i = 1, \ldots, k$, они не зависят от θ. Используя теорему А. А. Ляпунова [45] о том, что для конечного семейства непрерывных вероятностных мер при любом α существует множество A, все меры которого равны α (т. е. в ней фактически строятся подобные области в случае, когда мешающий параметр принимает конечное число значений), можно для каждого t построить множество $A(t)$ такое, что

$$P_\theta^{(i)}\{A(t) \mid T(x) = t\} = \alpha, \quad i = 1, \ldots, k.$$

Критерий, принимающий H_0 при $X \in A(T(X))$, будет подобным критерием уровня α. В работе А. М. Кагана [24] рассмотрена более общая ситуация, когда для каждой меры $P_\theta^{(i)}$ существует своя достаточная σ-подалгебра; в этой ситуации также строятся подобные области. Построение этих областей основано на обобщении результатов И. В. Романовского и В. Н. Судакова [59], которые, в свою очередь, обобщают работу [45].

Имеется большое количество работ по так называемой проблеме Беренса — Фишера: по двум независимым выборкам $x^{(n_1)} = (x_1, \ldots, x_{n_1})$ и $y^{(n_2)} = (y_1, \ldots, y_{n_2})$ из нормальных распределений $N(a_1, \sigma_1^2)$ и $N(a_2, \sigma_2^2)$, соответственно, надо построить подобный критерий для проверки гипотезы $a_1 = a_2$. Существенный прогресс в этой задаче был достигнут благодаря работам Ю. В. Линника и его учеников. В частности, в работе [44] было доказано существование нерандомизированного подобного критерия в задаче Беренса — Фишера в случае, когда n_1 и n_2 имеют разную четность. Обзор работ по этой проблеме содержится в монографиях Ю. В. Линника [43, 186]. Обобщение задачи Беренса — Фишера и построение для нее АП-критерия, основанного на критерии Вилкоксона, содержится в работе [238].

В монографиях Ю. В. Линника [43, 186], а также в статьях Ю. В. Линника [187, 42], Вийсмана [269], В. П. Паламодова [56] изучаются различные вопросы аналитической статистики, возникающие в проблеме построения подобных критериев. Арато [79] применил эти методы для построения подобных критериев в задаче проверки гипотез о параметрах случайных процессов. В [145] изучаютя подобные критерии для семейств с параметрами сдвига.

§ 2. КРИТЕРИИ ОТНОШЕНИЯ ПРАВДОПОДОБИЯ

2.1. Критерии ОП впервые были введены в работах Неймана и Пирсона [220, 221]; они основаны на статистике

$$\lambda_n(x^{(n)}) = \frac{\sup\limits_{\omega \in \Omega_0} L_n(x^{(n)}, \omega)}{\sup\limits_{\omega \in \Omega} L_n(x^{(n)}, \omega)}, \tag{6}$$

где $L_n(x^{(n)}, \omega) = \prod\limits_{i=1}^{n} p(x_i, \omega)$—функция правдоподобия, а $p(x, \omega)$—плотность распределения P_ω относительно некоторой σ-конечной меры (в работе Фабиана [130] sup в (6) заменен на ess sup). Критерии ОП отвергают нулевую гипотезу при малых значениях статистики λ_n, порог определяется уровнем значимости. Критерий ОП в старых работах называют иногда λ-критерием.

2.2. Распределение статистики ОП при нулевой гипотезе. В некоторых случаях оказывается, что критерии ОП, используемые для проверки сложных гипотез с мешающими параметрами, оказываются подобными, и распределение статистики λ_n либо имеет простую аналитическую форму, либо табулировано в таблицах. В основном такие примеры связаны с нормальным распределением, см., например, [138—140, 233, 234], и критерии ОП обладали в этом случае некоторыми оптимальными свойствами. В общем же случае критерий ОП не является подобным. Однако, как показал Уилкс в [270], распределение (при нулевой гипотезе) статистики $(-2 \ln \lambda_n)$ при $n \to \infty$ слабо сходится к χ_r^2 — центральному хи-квадрат распределению с r степенями свободы. Следовательно, критерий, отвергающий H_0 при

$$-2 \ln \lambda_n(x^{(n)}) > \chi^2_{r,\alpha},$$

где $\chi^2_{r,\alpha}$—верхняя α-квантиль χ^2_r-распределения, будет АП-критерием уровня α.

Простой и строгий вывод предельного распределения статистики ОП при более слабых, чем у Уилкса, предположениях, дан Роем [251]. Это доказательство вошло во многие монографии (например, Уилкс [63], Кендалл и Стьюарт [27]). Отметим, что результаты Уилкса и Роя получены в предположении, что существуют асимптотически нормальные и эффективные оценки максимального правдоподобия (ОМП) для мешающего параметра.

В ряде работ рассмотрено предельное распределение статистики ОП в случаях, когда не выполняются те или иные условия работ Уилкса — Роя. Прежде всего отметим работу Хогга [148], в которой носитель распределения P_ω зависит от параметра ω; в этом случае распределение ОМП уже не будет асимптотически нормальным. Как показал Хогг, при сложной нулевой гипотезе для некоторых плотностей статистика $(-2 \ln \lambda_n)$ распределена как χ_{2r}^2. Близкие результаты содержатся также в работах [149, 150, 153, 154, 161, 162]; часть этих результатов (в основном, ранних) приведена в монографии Кендалла и Стьюарта [27]. Чернов в работах [111, 112] обобщил результаты Уилкса на случай, когда области, в которых лежит параметр ω при нулевой и альтернативной гипотезах, не являются, соответственно, гиперплоскостью и дополнением к ней, а являются некоторыми произвольными множествами Ω_0 и Ω_1 с общей границей; в частности, рассмотрен случай, когда Ω_0 и Ω_1 являются выпуклыми конусами с общей граничной точкой $\omega_0=0$. В этом случае, конечно, неверна классическая хи-квадрат аппроксимация распределения статистики ОП, и Чернов в своей работе получил предельные распределения (при H_0) статистик $(-2\ln\lambda_n)$ и $(-2\ln\lambda_n^*)$, где

$$\lambda_n^*(x^{(n)})=\frac{\sup\{L_n(x^{(n)},\omega),\ \omega\in\Omega_0\}}{\sup\{L_n(x^{(n)},\omega),\ \omega\in\Omega_1\}};\tag{7}$$

эти предельные распределения не зависят от мешающих параметров. Аналогичные задачи описаны также в монографии Кокса и Хинкли [28], см. п. 4 § 9.3.

В работе Мак-Дональда и Крана [191] нулевая гипотеза заключается в том, что m-мерный параметр ω лежит на s-мерном многообразии

$$\omega_j=g_j(\beta_1,\ldots,\beta_s),\quad j=1,\ldots,m.\tag{8}$$

Пусть $\hat{\beta}$ — ОМП параметра $\beta=(\beta_1,\ldots,\beta_s)'$. Тогда при нулевой гипотезе распределение статистики $(-2\ln\lambda_n)$ сходится при $n\to\infty$ к центральному хи-квадрат распределению с числом степеней свободы $m-\mathrm{Rank}\,M$, $M=\left\|\frac{\partial g_i(\beta)}{\partial\beta_j}\right\|$. Рассмотрен также вопрос о подходящих методах вычисления ранга матрицы M.

Андерсен в работе [78] рассмотрел пример, когда при наличии мешающего параметра статистика $(-2\ln\lambda_n)$ не имеет в пределе хи-квадрат распределения. Для этого случая вводится понятие «условного ОП» и строится некоторый аналог статистики $(-2\ln\lambda_n)$, который в пределе (при H_0) имеет хи-квадрат распределение.

2.3. Предельное распределение статистики ОП при альтернативе. Прежде чем перейти к обзору работ, сделаем одно замечание общего характера. Если мы зафиксируем значение информативного параметра $\xi'\neq\xi_0$ и будем рассматривать возрастающие объемы выборок, то для большинства разумных критериев $\{\varphi_n\}$ мощность $\beta_n(\xi',\theta|\varphi_n)$ при $n\to\infty$ будет стремиться к 1 (свойство состоятельности критериев, введенное Вальдом и Волфовицем в статье [263]), и мы не можем сравнивать различные критерии. В частности, при весьма слабых предположениях, свойством состоятельности обладают и критерии ОП. Поэтому для получения более точной информации о поведении функции мощности последовательности критериев при больших объемах выборки рассматривают так называемые «сближающиеся альтернативы», т. е. рассматривается не фиксированное значение ξ' параметра ξ, а последовательность значений $\xi_1, \xi_2, \ldots$, сходящихся к ξ_0 при $n \to \infty$, причем последовательность $\{\xi_n\}$ выбирается таким образом, чтобы значения функции мощности $\beta_n(\xi_n, \theta|\varphi_n)$ при $n \to \infty$ сходились к нетривиальному пределу (т. е. пределу, отличному от 0 и 1). Обычно в регулярном случае

$$\xi_n = \xi_0 + \frac{\lambda}{\sqrt{n}}, \tag{9}$$

где λ — некоторый параметр, и функцию

$$\beta(\lambda, \theta | \{\varphi_n\}) = \lim_{n \to \infty} \beta_n \left(\frac{\lambda}{\sqrt{n}}, \ \theta | \varphi_n \right)$$

называют предельной функцией мощности. Впервые такой подход был предложен Нейманом в [211] и Эйзенхартом в [129]; он обсуждается также в работах [216, 242].

Предельная функция мощности критерия ОП при альтернативах вида (9) была получена Вальдом в работе [262]. Им показано, что предельное распределение статистики $(-2 \ln \lambda_n)$ есть нецентральное хи-квадрат распределение с r степенями свободы и параметром нецентральности $\delta(\lambda, \theta) = \lambda' V(\xi_0, \theta) \lambda$, где $V(\xi, \theta)$ — блок матрицы, обратной фишеровской информационной матрице, относящийся к параметру ξ.

Результат Вальда в дальнейшем уточнялся и обобщался во многих работах. Прежде всего отметим работу Строуда [259], где указаны некоторые неточности и ошибки, содержащиеся в статье Вальда, и приведены соответствующие контрпримеры и исправления. Дэвидсон и Левер [120] получили предельное распределение статистики ОП (при альтернативах вида (9)) при существенно менее жестких, чем у Вальда, условиях: в [120] на плотность наложены условия крамеровского типа. Несколько другим способом результаты Вальда получены (с использованием множителей Лагранжа) в статье Силви [254]. Федер и [132] получил предельное распределение статистик $(-2 \ln \lambda_n)$ и $(-2 \ln \lambda_n^*)$ (см. (7)) при альтернативах (9) в условиях работы Чернова [112]. В этой работе изучается также случай, когда ξ_n сходится к ξ_0 со скоростью бóльшей, чем $n^{-1/2}$.

Джейсвелл и Кхатри [153] получили предельное распределение статистики ОП при локальных альтернативах (9) в условиях работы Хогга [148] (когда носитель плотности зависит от параметра); см. также работы [154, 161, 162]. Строуд [260] в предположении, что исходное семейство распределений принадлежит экспоненциальному типу, удалось существенно ослабить условия регулярности Вальда.

Вейс в работе [267] нашел асимптотическое распределение ОП при некоторых отклонениях от стандартной ситуации, главным из которых является то, что сл. в. $X_1, \ldots, X_n$ не являются независимыми и одинаково распределенными. Кроме того, в связи с тем, что вычисление статистики ОП часто вызывает вычислительные трудности (особенно при наличии мешающих параметров), в цитируемой статье приводится некоторый легко вычислимый эквивалент статистики $\ln\lambda_n$, т. е. такая статистика, разность между которой и $\ln\lambda_n$ сходится при $n\to\infty$ по вероятности к нулю.

Эйтчисон в работе [75] рассмотрел некоторые параметрические задачи с ограничениями, приводящие к проверке сложных гипотез с мешающими параметрами. Для проверки этих гипотез использованы критерии ОП, а также критерии Вальда, основанные на ОМП, и критерии с использованием множителей Лагранжа (см. п. 2.5 этого параграфа). Доказана асимптотическая эквивалентность этих критериев и получено их предельное распределение. Статью Эйтчисона дополняет статья [119]. В работе [253] изучается связь между асимптотической теорией ОП и линейной теорией проверки гипотез: для данной задачи проверки гипотезы $\omega\in\Omega_0$ (см. (1)) строится асимптотически эквивалентная ей задача проверки линейной гипотезы о векторе средних нормального распределения. Гупта [141] рассмотрел распределение критерия ОП в комплексном случае. О получении распределения статистики критерия ОП, основанном на современном асимптотическом подходе, см. п. 2.7 этого параграфа.

2.4. Оптимальные свойства критериев ОП. Первой работой, в которой исследовались оптимальные свойства критерия ОП, является работа Вальда [262]. Рассмотрим семейство эллипсоидов

$$E_{n,c}(\theta)=\{\xi_n\in R^r: n\xi_n' V(0,\theta)\,\xi_n=c\} \tag{10}$$

(предполагается, что $\xi_0=0$). Пусть $\nu_{n,\theta}$ — мера на эллипсоиде (10), индуцируемая из равномерного распределения на сфере $n\xi_n'\xi_n=c$ линейным преобразованием, переводящим эту сферу в эллипсоид. Тогда, как показал Вальд, для любой АП последовательности критериев $\{\psi_n\}$ при альтернативах (9) имеет место предельное неравенство

$$\varliminf_{n\to\infty}\ \inf_{0<c<b}\int\limits_{E_{n,c}(\theta)}[\beta_n(\xi,\theta\,|\,\varphi_n)-\beta_n(\xi,\theta\,|\,\psi_n)]\,\nu_{n,\theta}(d\xi)\geqslant 0;$$

здесь $\{\varphi_n\}$ — последовательность критериев ОП, а $b>0$ — произвольная константа. Заметим, что и эллипсоиды (10), и априорные меры $\nu_{n,\theta}(\cdot)$, по которым происходит усреднение функций мощности, зависят от мешающего параметра θ. Кроме того, там же показано, что критерий ОП является асимптотически ЛНМ (АЛНМ) при альтернативах (9) среди всех АП критериев, предельная функция мощности которых зависит от параметров λ и θ только через $\delta(\lambda,\theta)$ (параметр нецентральности у предельного распределения статистики критерия ОП при альтернативах

(9)). Критерий ОП имеет асимптотически наименьший супремум отклонения функции мощности от огибающей функции мощности всех АП критериев, когда параметр ξ лежит на эллипсоидах вида (10), т. е. критерий ОП является асимптотически локально наиболее строгим критерием. Фактически, имеют место аналоги теорем 2.1, 2.2 и 6.1 главы VI монографии Русаса [60] с естественной модификацией на случай распределений с мешающими параметрами.

Другие оптимальные свойства критериев ОП изучал Бахадур, он рассматривал следующую конструкцию. Пусть критерий для проверки сложной гипотезы $\omega \in \Omega_0$ основан на статистике $T_n(X_1, \ldots, X_n)$; $F_n(T_n) = 1 - G_n(T_n)$, где $G_n(t) = \inf\{P_\omega(T_n < t), \omega \in \Omega_0\}$, и критерий отвергает H_0 при $F_n(T_n) \leqslant \alpha$ (т. е. при больших значениях статистики T_n). Величина α, очевидно, является размером критерия (если Ω_0 состоит из одной точки, то сл. в. $F_n(T_n)$ при H_0 распределена равномерно на [0; 1]). Бахадур показал, что для любой точки $\omega \in \Omega_1 = \Omega \setminus \Omega_0$ с P_ω-вероятностью 1

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln F_n \geqslant -J(\omega) = -\inf_{\omega_0 \in \Omega_0} \left[-\int \ln \frac{p(x, \omega_0)}{p(x, \omega)} \, dP_\omega \right], \quad (11)$$

здесь под знаком inf стоит информация Кульбака. Критерий ОП (с $T_n = -n^{-1} \ln \lambda_n$) обладает следующим оптимальным свойством: предел (11) существует и равен в точности $[-J(\omega)]$, т. е. скорость стремления к нулю (при альтернативе) статистики F_n наибольшая у критерия ОП. Если обозначить $N(\alpha)$ наименьшее из чисел k таких, что при $n \geqslant k$ выполняется соотношение $F_n \leqslant \alpha$ (если такого числа k не существует, то $N(\alpha) = \infty$), то при $\omega \in \Omega_1$ с P_ω-вероятностью 1 для любого критерия T_n

$$\varliminf_{\alpha\to 0} \frac{N(\alpha)}{\log 1/\alpha} \geqslant \frac{1}{J(\omega)}, \quad (12)$$

причем для критерия ОП предел (12) существует и равен $(J(\omega))^{-1}$. Так как $N(\alpha)$ — наименьший объем выборки, начиная с которого принимается альтернативная гипотеза, то у критерия ОП этот объем асимптотически (при $\alpha \to 0$) минимален (при истинности альтернативной гипотезы). Эти свойства Бахадур получил в работе [80]. В работе [81] рассматривается класс критериев, у которых при $\omega \in \Omega_1$ с P_ω-вероятностью 1 существует предел (11) и равен $-c(\omega)/2$ (величина $c(\omega)$ названа точным наклоном). Пусть для данного числа $\beta \in (0, 1)$ и $\omega \in \Omega_1$ существует последовательность $k_n = k_n(\omega)$ такая, что $P_\omega(T_n \geqslant k_n) = \beta$ (т. е. зафиксирована мощность критерия). Пусть

$$\alpha_n = \alpha_n(\omega) = \sup\{P_{\omega_0}[T_n \geqslant k_n], \ \omega_0 \in \Omega_0\}$$

— размер критерия. Тогда имеет место сходимость $n^{-1} \ln \alpha_n(\omega) \to -c(\omega)/2$. Если $M(\varepsilon, \omega)$ — наименьшее целое k такое, что при $n \geqslant k$ $\alpha_n(\omega) \leqslant \varepsilon$, то

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{M(\varepsilon,\omega)}{\ln 1/\varepsilon}=\frac{2}{c(\omega)}.$$

Так как всегда $c(\omega)\leqslant 2J(\omega)$ (см. (11)) и для критерия ОП $c(\omega)=2J(\omega)$, то отсюда следуют следующие оптимальные свойства критериев ОП: при фиксированной, отграниченной от 0 и 1 мощности критерия наибольшую скорость стремления к нулю размера критерия имеет критерий ОП, и для него асимптотически ($\varepsilon\to 0$) минимален объем выборки, начиная с которого этот размер станет меньше ε. Результаты работ [80] и [81] обобщаются в работе [83] на случай более широкого класса выборочных пространств. Описанные выше результаты Бахадура содержатся также в его монографии [82].

Оптимальные свойства критерия ОП, связанные с байесовской постановкой, получил А. А. Боровков в [11]. Пусть при $\omega=(\xi,\theta)'$ заданы априорное распределение $a_1(\theta)$ мешающего параметра θ при $H_0:\xi=\xi_0$; $a_2(\omega)$ — априорное распределение на множестве Ω при альтернативе; априорные вероятности π и $1-\pi$ гипотез и функции потерь $R_2(\theta)$ и $R_1(\omega)$ при ошибках I и II рода. Рассматривается класс критериев ψ с фиксированным значением потерь I рода:

$$\int R_2(\theta)\,\beta(\xi_0,\theta\,|\,\psi)\,a_1(\theta)\,d\theta=\alpha \tag{13}$$

(при $R_2\equiv 1$ величина (13) выражает средний уровень значимости критерия). При этом в явном виде можно выписать критерий, имеющий наименьшие потери среди всех критериев, удовлетворяющих (13). Основной результат, приведенный в работе [11] без доказательства, заключается в том, что критерий ОП асимптотического уровня α обладает потерями, отношение которых к минимально возможным (для произвольных функций $a_i(\cdot)$, $R_i(\cdot)$, π,а задающих потери — они должны лишь удовлетворять некоторым условиям регулярности) стремится при $n\to\infty$ к некоторой конечной постоянной. Эта постоянная стремится к 1 при $\alpha\to 0$. Эти результаты являются следствием общего факта, заключающегося, грубо говоря, в том, что если мы рассмотрим множество байесовских критериев (с произвольными априорными распределениями и функциями потерь), и среди них выделим подкласс критериев, удовлетворяющих (13), то все критерии этого подкласса асимптотически эквивалентны одному критерию, не зависящему от априорных распределений и функций потерь и определяемому в явном виде по числу α.

Отметим, что в работе [11] описан лишь общий подход, и доказательства даны лишь для случая, когда нулевая гипотеза является простой.

Браун [103] доказал, что критерии типа критериев ОП обладают оптимальными нелокальными свойствами (т. е. альтернативы не сближаются с нулевой гипотезой). Браун рассмотрел некоторые специально подобранные расширения $\Omega_0^*\supset\Omega_0$ и $\Omega_1^*\supset\Omega_1$

класса распределений P_ω, и критерий λ_n^* вида (7), где вместо Ω_0 и Ω_1 рассмотрены Ω_0^* и Ω_1^*. Если $\{\psi_n\}$ — произвольная последовательность критериев, для размеров $\alpha_n(\psi_n)$ которых выполнено соотношение $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,\alpha_n(\psi_n)<1$, а φ_n — критерий, отвергающий H_0 при $\lambda_n^*\geqslant c_n$, где $c_n=\inf\{c:\alpha_n(\varphi_n)\leqslant\alpha_n(\psi_n)\}$, то для любой точки $\omega\in\Omega_1$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, n^{-1}\left[\ln\beta_n(\omega\mid\varphi_n)-\ln\beta_n(\omega\mid\psi_n)\right]\geqslant 0.$$

2.5. АП критерии, использующие оценки параметров. Вычисление статистики (6) требует вычисления ОМП для всех параметров, причем для мешающего параметра θ дважды — при нулевой гипотезе и при альтернативе. Поэтому в ряде работ строились статистики, асимптотически эквивалентные статистике $(-2\ln\lambda_n)$, построение которых связано с меньшими вычислительными трудностями. Прежде всего отметим уже цитированную работу Вальда [262], где нулевая гипотеза рассматривалась в виде $\omega\in\Omega_0$; Ω_0 определено в (1). Критерий Вальда основан на статистике

$$T_n(x^{(n)})=n\mathbf{h}'(\omega_n^*)\,[H'(\omega_n^*)\,\Sigma^{-1}(\omega_n^*)\,H(\omega_n^*)]^{-1}\,\mathbf{h}(\omega_n^*), \tag{14}$$

где

$$\mathbf{h}(\omega)=(h_1(\omega),\,\ldots,\,h_r(\omega))',\quad H(\omega)=\left\|\frac{\partial h_j(\omega)}{\partial\omega_i}\right\|,$$

$$\Sigma(\omega)=\left\|-\mathbf{E}\,\frac{\partial^2\ln p(X,\,\omega)}{\partial\omega_i\partial\omega_j}\right\|$$

— фишеровская информационная матрица, а ω_n^* — ОМП параметра ω, построенная без ограничений (1) (для простоты полагаем, что константы $a_1,\ldots,a_r$ в (1) равны нулю). Статистика (14) асимптотически имеет хи-квадрат распределение с r степенями свободы, центральное при нулевой гипотезе и нецентральное при альтернативе. В частности, вывод предельного распределения статистики ОП при альтернативах (9) и заключался в [262] в доказательстве асимптотической эквивалентности статистик $(-2\ln\lambda_n)$ и T_n, а для последней статистики предельное распределение вычисляется стандартными методами.

Критерий, предложенный Рао в [239], основан на статистике

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\ln p(x_i,\,\omega)}{\partial\omega}\bigg|_{\bar\omega_n}\right)'\Sigma^{-1}(\bar\omega_n)\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\ln p(x_i,\,\omega)}{\partial\omega}\bigg|_{\bar\omega_n}\right), \tag{15}$$

где $\dfrac{\partial}{\partial\omega}=\left(\dfrac{\partial}{\partial\omega_1},\ldots,\dfrac{\partial}{\partial\omega_m}\right)'$, а $\bar\omega_n$ — ОМП для ω, вычисленная при нулевой гипотезе (которая задается в виде (1) или (8)). Статистика (15) асимптотически эквивалентна статисткам $(-2\ln\lambda_n)$ и T_n. Критерий Рао обобщался на случай зависимых величин, образующих случайный процесс, в работе К. О. Джапаридзе [19]. По этому поводу см. также п. 2.7. настоящего параграфа.

Другая форма статистики, асимптотически эквивалентная статистике ОП и основанная на статистике множителей Лагранжа, получена Силви [254] и Эйтчисоном и Силви [76]. Эта форма критерия особенно удобна, когда H_0 задается в виде (1). Предложенный в этих работах критерий также основан на ОМП $\hat{\omega}_n$ параметра ω при нулевой гипотезе, для отыскания которой используется система уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \ln p(x_i, \omega)}{\partial \omega}+\sum_{\nu=1}^{r} R_\nu \frac{\partial h_\nu}{\partial \omega}=0; \\ \mathrm{h}(\omega)=0, \end{cases}$$

где $R_1, \ldots, R_r$ — множители Лагранжа. В работе [77] изучаются вычислительные аспекты построения критериев с использованием множителей Лагранжа и критериев Вальда; этой тематике посвящена также работа [190].

Строуд [258] построил критерий, обобщающий критерий Вальда на случай, когда вместо ОМП используется некоторая другая $\sqrt{n}$-состоятельная оценка параметров; при этом удалось несколько ослабить условия регулярности, содержащиеся в статье Вальда. Мур [199] обобщил результаты Вальда и Строуда на случай, когда ОМП имеет вырожденное предельное распределение (например, оцениваются вероятности в мультиномиальной схеме): для построения критерия в этом случае используется обобщенная обратная матрица (которая может выбираться неоднозначно). Показано, что асимптотическое распределение критерия не зависит от выбора этой матрицы.

В работе Бхапкара [96] статистика критерия Вальда строится для проверки сложных гипотез для категоризованных данных: показано, что эта статистика асимптотически эквивалентна χ_1^2-статистике Неймана [213], и обе они эквивалентны статистике ОП.

В работе [159] рассмотрен случай одномерных параметров ξ и θ. Пусть $G(\theta)$ — априорное распределение мешающего параметра θ и

$$f(x, \xi)=\int p(x, \xi, \theta)\, dG(\theta). \tag{16}$$

Рассматривая $x^{(n)}$ как повторную выборку из распределения с плотностью (16), автор строит ОМП $\hat{\xi}_n$ и обычный критерий, основанный на $\hat{\xi}_n$. Естественно, и $\hat{\xi}_n$, и этот критерий зависят от априорного распределения G. Однако в некоторых случаях удается построить оценку $\hat{\xi}_n^*$, зависящую только от выборки $x^{(n)}$ и асимптотически эквивалентную $\hat{\xi}_n$. При этом критерий, основанный на $\hat{\xi}_n^*$, будет АЛНМ подобным критерием.

2.6. Асимптотическое разложение распределения статистики ОП. Как указывалось выше, в общем случае известно лишь предельное распределение статистики ОП, что затрудняет использование критериев ОП при конечных объемах выборки. Существуют работы, в которых предлагается использовать для распределения статистики $(-2\ln\lambda_n)$ при конечных n не обычную хи-квадрат аппроксимацию, а вводить дополнительные поправочные множители. Этот прием, в частности, описан в монографии Кендалла и Стьюарта [27].

В нескольких работах рассмотрено разложение распределения статистики $(-2\ln\lambda_n)$ по степеням $1/\sqrt{n}$ при нулевой гипотезе и альтернативах вида (9). Хайякава [146] нашел разложение функции мощности критерия ОП и распределения статистики Вальда T_n до порядка $1/\sqrt{n}$ при альтернативах (9) (при простой гипотезе аналогичное разложение получил Пирс [232]). В следующей работе [147] Хайякава получил разложение до порядка $\frac{1}{n}$ при нулевой гипотезе и до порядка $1/\sqrt{n}$ для произвольных питменовских альтернатив.

В работах Ли Хоанг Ту [34—36] показано, что точность оптимальных свойств критерия Вальда имеет порядок $O(n^{-1/2+\varepsilon})$, где ε — произвольное положительное число.

2.7. В 60-х годах появилась серия работ, в которых при достаточно общих условиях (налагаемых на многомерные распределения вероятностей) исследуется асимптотическое поведение широкого класса статистических оценок и критериев. Эти работы вскрыли глубокую связь между асимптотическим поведением отношения правдоподобия и существованием (и нахождением) тех или иных оптимальных статистических процедур. В этих работах вскрыта также связь между асимптотически оптимальными процедурами для исходных семейств с оптимальными процедурами для экспоненциальных семейств, асимптотически аппроксимирующих исходные. Элементы такого подхода прослеживаются в работе Вальда [262], где введено понятие «асимптотически достаточной» статистики T_n. Это означает, что в пространстве выборок $X^{(n)}$ существует плотность $q_n(x^{(n)}, \omega)$ (по мере μ^n) распределения вектора $X^{(n)}$, представимая в виде

$$q_n(x^{(n)}, \omega) = g_n(T_n(x^{(n)}), \omega)\cdot r_n(x^{(n)}),$$

такая, что для любого компакта $K \subset R^m$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\omega\in K} \int |L_n(x^{(n)}, \omega) - q_n(x^{(n)}, \omega)|\, d\mu^n = 0.$$

Тем самым, T_n — статистика, достаточная для семейства с плотностью q_n, которое асимптотически близко к исходному. В частности, там же показано, что такой асимптотически достаточной статистикой является ОМП $\hat{\omega}_n = \hat{\omega}_n(X^{(n)})$, и имеет место асимптотическое представление

$$L_n(X^{(n)}, \omega)=L_n(X^{(n)}, \hat\omega_n)\times$$
$$\times\exp\left\{-\frac{1}{2}(\hat\omega_n-\omega)'\Sigma^{-1}(\omega)(\hat\omega_n-\omega)+o_p(1)\right\}, \qquad (17)$$

где здесь и далее $o_p(1)$ обозначает сл. в., сходящуюся к нулю по вероятности P_ω при $n\to\infty$. Представление (17) делает понятным, почему асимптотически эквивалентны критерий ОП и критерий Вальда (14), основанный на ОМП. Эти результаты в дальнейшем уточнялись и дополнялись Ле Камом [172, 173], Михелем и Пфанцаглем [192]. Попутно отметим, что при весьма общих условиях для ОМП имеет место представление

$$\sqrt{n}\,(\hat\omega_n-\omega)=\Sigma^{-1}(\omega)\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\ln p(X_i,\omega)}{\partial\omega}+\zeta_n.$$

Во многих работах показывалось, что $\zeta_n=o_p(1)$ (например, [28], стр. 330). И. А. Ибрагимов и Р. З. Хасьминский показали, что с P_ω-вероятностью 1 равномерно по компактам $\zeta_n=O(n^{-\varepsilon})$ для некоторого $\varepsilon>0$ (см. монографию [23], § 8 гл. I). Отсюда нетрудно заметить, что критерии Вальда (14) и Рао (15) асимптотически эквивалентны.

Рассмотрение этих частных вопросов привело Ле Кама [174] к введению одного общего понятия, которое оказало глубокое влияние на все развитие асимптотической статистики — понятие локальной асимптотической нормальности (ЛАН) семейства мер. Семейство мер P_ω называется ЛАН в точке ω_0, если имеет место следующее представление логарифма ОП:

$$\ln\frac{L_n\left(X^{(n)}, \omega_0+\frac{h}{\sqrt{n}}\right)}{L_n(X^{(n)}, \omega_0)}=h'\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\Delta(X_i, \omega_0)-\frac{1}{2}h'B(\omega_0)h+\zeta_n,$$

здесь $\Delta(x)=(\Delta_1(x),\ldots,\Delta_m(x))'$ — вектор-функция такая, что

$$\int\Delta_i(x)\,dP_{\omega_0}=0, \quad i=1,\ldots,m;$$

$$b_{ij}=\int\Delta_i(x)\Delta_j(x)\,dP_{\omega_0}<\infty, \quad i, j=1,\ldots,m; \quad B=\|b_{ij}\|;$$

и сл. в. $\zeta_n\to0$ равномерно по $h\in K$, где $K\subset R^m$ — произвольный компакт. При этом, очевидно, вектор $Y_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\Delta(X_i)$ распределен (при распределении P_{ω_0}) асимптотически нормально с параметрами $(0, B)$. При обычных условиях регулярности в качестве $\Delta(x)$ обычно можно выбрать $\left.\frac{\partial\ln p(x,\omega)}{\partial\omega}\right|_{\omega=\omega_0}$. Гаек [142] в качестве $\Delta_i(x)$ рассматривал $\left.(2\sqrt{p(x,\omega)})'_{\omega_i}\right|_{\omega=\omega_0}$, здесь производная понимается в среднеквадратичном смысле. Так построенные $\Delta_i(x)$, $i=1,\ldots,m$, не зависят от выбора варианта плотности. Условия, при которых имеет место ЛАН, впервые были получены Ле Камом [174], а затем уточнялись и дополнялись во многих работах, см., например, работы Д. М. Чибисова [67], теорему 5.1; Ле Кама [175—178]; Гаека [143, 144]; Русаса [248]; И. А. Ибрагимова и Р. З. Хасьминского (см. [23] и имеющуюся там библиографию). Условия ЛАН для неодинаково распределенных наблюдений получали Ле Кам [174], А. Ф. Кушнир [30], Филлипоу и Русас [237]; И. А. Ибрагимов и Р. З. Хасьминский [23], § 3 гл. II; условия ЛАН для наблюдений, связанных в марковскую цепь, впервые получил Русас [247] (см. также его монографию [60], гл. 2, и статью А. Ф. Кушнира и А. И. Пинского [31]).

Если семейство вероятностных мер обладает в данной точке ω_0 свойством ЛАН, то, как будет показано ниже, его можно в окрестности данной точки аппроксимировать экспоненциальным семейством. Пусть $N(n)$ — некоторая последовательность, $S_n = \{y \in R^m : |y| \leqslant N(n)\}$ — сфера в R^m, а $Y_n^* = Y_n \cdot \chi(Y_n;\ S_n)$, где $\chi(\cdot;\ A)$ — индикатор множества A. Определим семейство вероятностных мер

$$R_{n,h}(A) = C_n(h) \int\limits_A \exp(h'Y_n^*)\, dP_{\omega_0}^{(n)},$$

здесь $C_n(h)$ — нормирующий множитель. Существует последовательность $N(n) \to \infty$ такая, что для любого компакта $K \subset R^m$ равномерно по $h \in K$ при $n \to \infty$

$$\left\| P^{(n)}_{\omega_0 + h/\sqrt{n}} - R_{n,h} \right\| \to 0; \quad P^{(n)}_{\omega_0 + h/\sqrt{n}} \{Y_n^* \neq Y_n\} \to 0,$$

здесь $\|\cdot\|$ — расстояние по вариации. Статистика Y_n^* является достаточной для экспоненциального семейства $R_{n,h}$, аппроксимирующего семейство $P_\omega^{(n)}$ в окрестности точки $\omega = \omega_0$, и является (так же, как и асимптотически эквивалентная ей статистика Y_n) асимптотически достаточной для исходного семейства. Пусть $Q_{n,h}$ — распределение сл. вектора Y_n при распределении $P^{(n)}_{\omega_0 + h/\sqrt{n}}$, а $Q^*_{n,h}$ — распределение сл. вектора Y_n^*, когда выборка $X_1, \ldots, X_n$ распределена в соответствии с $R_{n,h}$. Другими словами, $Q^*_{n,h}$ — экспоненциальное семейство

$$\frac{dQ^*_{n,h}}{dQ^*_{n,0}} = C_n(h) \exp(h'y), \quad y \in R^m. \tag{18}$$

Тогда для любого компакта $K \subset R^m$

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{h \in K} \| Q_{n,h} - Q^*_{n,h} \| = 0.$$

Пусть $\varphi_n(X_1, \ldots, X_n)$ — произвольный критерий. Обозначим $\bar{\varphi}_n(Y_n) = E_{n,\omega_0}(\varphi_n | Y_n)$ — условное математическое ожидание при фиксированном Y_n (выбирается такой вариант условного мат.

ожидания, чтобы было $0 \leqslant \bar{\varphi}_n(Y_n) \leqslant 1$). Тогда равномерно по множеству всех критических функций $\{\varphi\}$

$$\sup_{h \in K} \left\| \int \varphi_n(x^{(n)})\, dP^{(n)}_{\omega_0+h/\sqrt{n}} - \int \bar{\varphi}_n(y)\, dQ^*_{n,h}(y) \right\| \to 0$$

при $n \to \infty$. Следовательно, с точки зрения асимптотической мощности, в статистической задаче проверки гипотез можно заменить исходное вероятностное семейство соответствующим экспоненциальным семейством (18) и рассматривать лишь критерии, основанные на асимптотически достаточной статистике Y_n. Эти результаты Ле Кама приведены в работе Д. М. Чибисова [67], теор. 2.1 и 2.2; в монографии Русаса [60] гл. III; их уточнения и дополнения содержатся в статьях Гаека [144], Русаса и Сомса [249].

Как указывалось выше, распределение вектора Y_n при распределении $P^{(n)}_{\omega_0}$ — асимптотически нормально; оказывается, оно асимптотически нормально и при распределении $P^{(n)}_{\omega_0+h/\sqrt{n}}$, но уже с параметрами $(Bh,\ B)$.

В работе К. О. Джапаридзе [19] этот асимптотический подход применен к построению критериев для проверки сложных гипотез о параметрах случайных процессов. В частном случае повторной выборки, который в основном и рассматривается в обзоре, предложенный в [19] критерий принимает гипотезу $H_0: \xi = 0$ (рассматривается случай, когда $\omega = (\xi,\ \theta)'$) при

$$Z_n = (\tilde{Y}_n(X^{(n)},\ \hat{\theta}_n))' V^{-1}(0,\ \hat{\theta}_n)(\tilde{Y}_n(X^{(n)},\ \hat{\theta}_n)) \leqslant \chi^2_{r,\alpha}, \tag{19}$$

здесь $\tilde{Y}_n$ — подвектор вектора Y_n, содержащий его первые r компонент (относящихся к параметру ξ); $V(0,\ \theta) = B_{11} - B_{12}B_{22}^{-1}B_{21}$, где B_{ij} — блоки матрицы

$$B = B(0,\ \theta) = \begin{Vmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{Vmatrix} \left(= \sum(\omega_0) \right),$$

соответствующие разбиению вектора ω на компоненты ξ и θ, а $\hat{\theta}_n$ — эффективная оценка θ при нулевой гипотезе (например, ОМП). Сл. в. Z_n, стоящая в левой части (19), асимптотически имеет при альтернативах (9) нецентральное хи-квадрат распределение с r степенями свободы и параметром нецентральности $\lambda' V(0,\ \theta)\lambda$. Критерий (19) асимптотически эквивалентен критерию ОП и критерию Рао (15) и является их обобщением для случая сл. в., образующих сл. процесс. К критерию (19), а также к некоторой его модификации, когда вместо $\hat{\theta}_n$ может использоваться произвольная $\sqrt{n}$-состоятельная оценка, мы еще вернемся в п. 3.7 и п. 4.5.

В заключение этого пункта заметим следующее. Рассмотрим экспоненциальную аппроксимацию исходного семейства. Как отмечалось выше, семейство мер $\{Q^*_{n,h}\}$ слабо сходится при

$n \to \infty$ к нормальному распределению с параметрами (Bh, B). Естественно ожидать, что если для предельного нормального семейства построить оптимальный в каком-либо смысле критерий $\varphi(y)$, то последовательность $\{\varphi_n\}$, где $\varphi_n(y) = \varphi(y)$ для всех n, будет асимптотически оптимальной в этом же смысле. Подробно этот вопрос был исследован Д. М. Чибисовым в [67] (при отсутствии мешающих параметров). Поэтому результаты Вальда об асимптотической оптимальности критериев ОП нетрудно получить из известных результатов об оптимальных свойствах критерия ОП для проверки гипотезы о среднем значении нормально распределенного сл. вектора по одному наблюдению (см., например, [60], теорему 4.4. П).

Работа [102] посвящена проверке сложной гипотезы о параметрах диффузионного случайного процесса. Рассматриваются критерии ОП, статистика которых, как и в случае повторной выборки, имеет предельное хи-квадрат распределение. Все результаты получены как следствие центральной предельной теоремы для стохастических интегралов.

§ 3. АСИМПТОТИЧЕСКИ ПОДОБНЫЕ КРИТЕРИИ СОГЛАСИЯ И ОСНОВАННЫЕ НА НИХ КРИТЕРИИ ДЛЯ ПРОВЕРКИ СЛОЖНЫХ ГИПОТЕЗ

3.1. Обычные критерии согласия при определенных условиях могут быть использованы для построения АП критериев для проверки сложных гипотез с мешающими параметрами, хотя так построенные критерии не будут, как правило, обладать какими-либо оптимальными свойствами и иметь низкую асимптотическую эффективность. Ввиду того, что обзор посвящен не критериям согласия вообще, а лишь критериям согласия, асимптотически сохраняющим постоянный уровень значимости при всех значениях мешающего параметра, в этот параграф не вошли критерии, являющиеся АП-критериями лишь для некоторых специальных случаев. Так, например, распределение статистики Крамера—Мизеса—Смирнова ω^2, в которую вместо неизвестного параметра подставлена его оценка, в общем случае зависит от этого неизвестного параметра, хотя для некоторых частных случаев, когда распределение зависит только от параметров сдвига—масштаба, можно надлежащим образом выбрать оценки, чтобы предельное распределение не зависело от мешающих параметров (см. [46], § 2 гл. I). То же относится и к критерию Колмогорова—Смирнова. Ниже, в п. 3.7 этого параграфа, мы еще коснемся этого вопроса.

3.2. Критерии типа хи-квадрат. Критерии, основанные на классическом хи-квадрат критерии Пирсона [231], сводят исходную задачу к задаче проверки сложной гипотезы для мультиномиального распределения. Пусть выборочное пространство $\mathscr{X}$ разбито на k непересекающихся подмножеств: $\mathscr{X} = \mathscr{X}_1 \cup \ldots \cup \mathscr{X}_k$. Пусть $\pi_i(\xi, \theta) = P_{\xi,\theta}(\mathscr{X}_i)$ — вероятности этих областей, а N_i — число наблюдений из выборки $X_1, \ldots, X_n$, попавших в $\mathscr{X}_i$, $i = 1, \ldots, k$.

Пусть θ_n — оценка мешающего параметра θ. Критерии типа хи-квадрат основаны на статистике

$$X^2(\theta_n) = \sum_{i=1}^{k} \frac{(N_i - n\pi_i(\xi_0, \theta_n))^2}{n\pi_i(\xi_0, \theta_n)}. \tag{20}$$

Классический результат о критериях типа хи-квадрат был получен Фишером в работах [133, 134] и заключается в следующем (см. также монографию Крамера [29]). Если в качестве θ_n взять ОМП $\bar{\theta}_n$ для θ при нулевой гипотезе $\xi = \xi_0$, основанную только на величинах $N_1, \ldots, N_k$ (в работе [69] она названа мультиномиальной ОМП), или какую-либо асимптотически эквивалентную ей оценку (напр., оценку минимума хи-квадрат), то распределение статистики $X^2(\bar{\theta}_n)$ будет сходиться (при H_0) при $n \to \infty$ к центральному хи-квадрат распределению с $(k - s - 1)$ степенями свободы. Следовательно, критерий, принимающий H_0 при $X^2(\bar{\theta}_n) < \chi^2_{k-s-1,\alpha}$, будет АП критерием уровня α.

Строгий вывод предельного распределения был получен Бёрчем [99]; см. также теорему 4.1 в статье Д. М. Чибисова [69]. Состоятельность хи-квадрат критерия исследовалась Нейманом в [213].

Функция мощности рассматриваемого критерия при альтернативах вида (9) впервые была получена Эйзенхартом [129] для простой гипотезы, а для сложной гипотезы — Митрой [195]. Подробное и строгое исследование статистики (20) при $\theta_n = \bar{\theta}_n$ при альтернативах (9) содержится в п. 6 уже цитированной статьи Д. М. Чибисова [69] (см., также [68]); предельное распределение будет уже нецентральным хи-квадрат распределением с $(k—s—1)$ степенями свободы и некоторым параметром нецентральности (он выписан, например, в [69]).

3.3. Задача отыскания мультиномиальной ОМП обычно вызывает большие вычислительные трудности, и во многих работах исследовалась статистика (20) с другими оценками мешающего параметра.

Стали уже классическими результаты Чернова — Лемана [113] о распределении статистики $X^2(\hat{\theta}_n)$, где $\hat{\theta}_n$ — обычная ОМП параметра θ, построенная по всей выборке $X_1, \ldots, X_n$. На многомерный случай этот результат обобщил Мур [198]. Вывод распределения $X^2(\hat{\theta}_n)$ при близких альтернативах содержится в [69]. Оказывается, даже при H_0 предельное распределение статистики $X^2(\hat{\theta}_n)$ отлично от хи-квадрат распределения: оно зависит в общем случае от мешающего параметра θ, и, следовательно, критерий, основанный на $X^2(\hat{\theta}_n)$, не будет АП-критерием. Отметим, что, как показал Л. Г. Гванцеладзе [13], распределения статистик $X^2(\hat{\theta}_n)$ и $X^2(\overline{\theta}_n)$ при нулевой гипотезе и близких альтернативах сближаются при увеличении числа классов k.

Молинэри [197] нашел предельное распределение статистики (20) (при нулевой гипотезе), когда в качестве θ_n взята оценка метода моментов. Так же, как и в работе Чернова—Лемана, предельное распределение отлично от хи-квадрат распределения и оно зависит от мешающих параметров.

3.4. В ряде работ рассматривалась модификация статистики (20), когда области $\mathscr{X}_1, \ldots, \mathscr{X}_k$ выбирались случайными, зависящими от наблюдений. Рассмотрим частный случай такой конструкции; $\mathscr{X}=R^1$. Пусть заданы вероятности $p_1, \ldots, p_k$, $\sum_{i=1}^{k} p_i=1$ классов и пусть $a_\nu(\theta)=F^{-1}\left(\sum_{l-1}^{\nu} p_l, \theta\right)$, где $F(x, \theta)$ — функция распределения (ф. р.) сл. в. X_1, а $F^{-1}(x, \theta)=$ $=\inf\{u: F(u, \theta) \geqslant x\}$. Пусть $\hat{N}_j$ — число наблюдений, попавших в интервал $(a_{j-1}(\theta_n), a_j(\theta_n))$, где θ_n — некоторая оценка, а $p_j(\theta_n, \theta)=F(a_j(\theta_n), \theta)-F(a_{j-1}(\theta_n), \theta)$. Рассматривается статистика

$$X^2(\theta_n, \theta_n')=\sum_{i=1}^{k} \frac{(\hat{N}_i-np_i(\theta_n, \theta_n'))^2}{np_i} \tag{21}$$

или некоторая ее модификация (с заменой np_i в знаменателе (21) на $np_i(\theta_n, \theta_n')$). В частности, если $F(x, \theta)=$ $=G\left(\frac{x-\theta_1}{\theta_2}\right)$, т. е. F зависит только от параметров сдвига — масштаба, то $a_j(\theta)=\theta_{2n}a_j+\theta_{1n}$, где $a_j=G^{-1}\left(\sum_{i=1}^{j} p_i\right)$, а θ_{1n} и θ_{2n} — оценки. В последнем случае, как показали Рой [250], Ватсон [265, 266], при использовании в качестве оценок θ_{1n}, θ_{2n} ОМП, предельное распределение статистики (21) не зависит от параметров θ_1, θ_2, хотя и не является хи-квадрат распределением. Этот факт сохранится, если в качестве θ_{1n} и θ_{2n} выбрать, соответственно, выборочное среднее и корень из выборочной дисперсии (Дехия и Гурлянд, [117]). Виттинг [271] обобщил эти результаты на многомерный случай, а также рассмотрел случай, когда в качестве границ выбирались выборочные квантили. В последнем случае, при использовании оценки минимума хи-квадрат, предельное распределение будет χ^2_{k-s-1} (см. также работу [100]). В общем случае критерии типа (21) рассмотрели Д. М. Чибисов [69] и Мур [198]. Они независимо показали, что если в качестве θ_n выбрать состоятельную, а в качестве θ'_n — $\sqrt{n}$-состоятельную оценки, то разность $X_n^2(\theta_n, \theta'_n) - X^2(\theta'_n)$ стремится по вероятности к нулю; это же верно и для модификации статистики (21). Мур обобщил этот результат на многомерный случай, когда в качестве θ'_n выбирается ОМП, а в качестве областей $\mathscr{X}_1, \ldots, \mathscr{X}_k$ — прямоугольники. Если рассмотреть статистики (20) и (21) при альтернативе, когда $X_1, \ldots, X_n$ имеют распределения $P_{\xi_n,\theta}$, где $\xi_n = \xi_0 + \lambda/\sqrt{n}$, и семейство $P_{\xi,\theta}$ обладает свойством ЛАН в точке $\xi = \xi_0$ (см. п. 2.7 § 2), то факт асимптотической эквивалентности статистик (20) и (21) сохранится, это следует из общих результатов Ле Кама [174] (см. также [60], предложение 6.1 гл. 2 и определение 2.1 гл. 1).

Статистики (20) и (21) соответствуют разным статистическим процедурам. Статистика (20) возникает в случае, когда границы классов фиксированы заранее (независимо от наблюдений); вероятности π_j классов в этом случае неизвестны. В случае же (21) заданы сами вероятности классов, а границы классов неизвестны.

Для выборок из дискретных распределений (биномиального, пуассоновского, отрицательного геометрического) критерии типа хи-квадрат исследовались Л. Н. Большевым и М. Мирвалиевым [10]. В этой работе рассматривалась достаточная статистика; группировка производилась при помощи условного распределения (не зависящего от мешающих параметров), а оценка параметров вычислялась в терминах достаточной статистики (по негруппированным данным).

Л. Н. Большев в [101] предложил критерий, использующий расстояния между выборочными квантилями. Этот критерий исследовался также в работе Д. М. Чибисова [69]; при некоторых предположениях этот критерий асимптотически эквивалентен критерию типа (20).

3.5. Л. Н. Большев предложил некоторое видоизменение $Y_n^2(\cdot)$ статистики (21) такое, что предельное распределение статистики $Y^2(\hat{\theta}_n)$ ($\hat{\theta}_n$ — ОМП) не зависит ни от θ, ни от s и есть χ^2_{k-1}. Эта статистика исследовалась М. С. Никулиным в [48, 49]. Рассматривается случай со сл. границами $a_1(\theta_n), \ldots, a_{k-1}(\theta_n)$, как это описано в предыдущем пункте. Пусть $\hat{N} = (\hat{N}_1, \ldots, \hat{N}_k)'$ — вектор частот, попавших в эти интервалы. Как показал Мур [198], вектор $(\hat{N} - np)(\sqrt{n})^{-1}$ распределен асимптотически нормально с параметрами $(0, B(\theta))$, где матрица $B(\theta)$ явно выписывается и имеет ранг $(k-1)$, здесь $p = (p_1, \ldots, p_k)'$ — вектор из вероятностей класс-интервалов. Пусть $\tilde{\nu} = (\hat{N}_1, \ldots, \hat{N}_{k-1})'$, $\tilde{p} = (p_1, \ldots, p_{k-1})'$, и $\tilde{B}$ — подматрица,

$$Y^2(\hat{\theta}_n) = n^{-1}(\tilde{\nu} - n\tilde{p})' (\tilde{B}(\hat{\theta}_n))^{-1} (\tilde{\nu} - n\tilde{p}). \qquad (22)$$

В [48] показано, что при альтернативах (9) статистика (22) имеет нецентральное хи-квадрат распределение с $k-1$ степенью свободы и некоторым параметром нецентральности. В [49] исследовался частный случай (22) для семейства с параметрами сдвига-масштаба. Матрица B в этом случае не зависит от θ. Для случая проверки нормальности в [49] в явном виде найдена статистика (22) и табулированы ее коэффициенты. Напомним, что в критерии (22) была использована вполне определенная оценка (ОМП). Если же мы хотим, чтобы критерий был АП при использовании любой $\sqrt{n}$-состоятельной оценки, то в общем случае произойдет потеря числа степеней свободы. В частности, в работе [20] К. О. Джапаридзе и М. С. Никулин рассмотрели другое видоизменение $W^2(\theta_n)$ статистики (22) (рассмотрен случай фиксированных границ) такое, что $W^2(\theta_n)$ распределена асимптотически как χ^2_{k-s-1} для любой $\sqrt{n}$-состоятельной оценки θ_n. Рао и Робсон [241] строили аналог статистики (22) для случая, когда выборка берется из экспоненциального семейства распределений. На тех же идеях строится и предложенная Камбхампати в [160] статистика; ее асимптотическое распределение при нулевой гипотезе и близких альтернативах найдено в [200].

В работе [152] рассматриваются статистики типа (22), когда в качестве оценки берутся оценки метода моментов (или обобщенного метода моментов). Найдено асимптотическое распределение нормированного вектора частот, как для случая случайных, так и для случая фиксированных границ. Так же, как и в (22), строятся статистики Q_n и Q_n^* (для первого и второго случая), асимптотически распределенные как χ^2_{k-1}. В работе Дехия и Гурлянда [116] для двумерного случая предложен так называемый Q-критерий, являющийся квадратичной формой от выборочных моментов; статистика $\min_\theta Q(\theta)$ имеет асимптотическое хи-квадрат распределение, центральное при H_0 и нецентральное при альтернативе.

Отметим, что критерий (22) получается как частный случай в работе К. О. Джапаридзе [19]. М. С. Никулин в [50] предложил некоторое видоизменение квантильного критерия такое, что статистика этого критерия имеет хи-квадрат распределение. В частном случае семейств сдвига и масштаба это было сделано им в [49].

В нескольких работах изучались статистики типа хи-квадрат, когда неизвестные параметры оцениваются по дополнительной, независимой выборке. В [110] получено распределение статистики типа (20), когда ОМП или МОМП найдены по независимой выборке $X_{n+1}, \ldots, X_{n+m}$, где $m = m(n) \to \infty$ при $n \to \infty$ и фиксированных границ, и распределения полученных в [110] и [206] статистик не были в пределе хи-квадрат распределениями и зависели в общем случае от неизвестных параметров. М. С. Никулин и Й. Юсас в работах [51] и [52] построили видоизменения типа (22) статистик, предложенных в статьях [110] и [206], соответственно, которые имели в пределе распределение χ^2_{k-1}. В качестве оценок использовались ОМП и оценки минимума хи-квадрат в [52], и оценки минимума хи-квадрат в [51].

Некоторый аналог критерия хи-квадрат для проверки сложных гипотез предложен Ли Шинь-Линем в [37]; в [39] была найдена мощность этого критерия для сближающихся альтернатив; применение полученного критерия к задаче проверки однородности содержится в [40].

Рао [240] рассмотрел критерий для проверки гипотезы о том, что параметр ω распределения P_ω лежит на многообразии (8). Если $\hat{\beta}_n$ — эффективная оценка параметра β, а $\hat{\omega}_n$ — эффективная оценка параметра ω (без всяких ограничений), то критерий Рао основан на статистике

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{(n\pi_i(\hat{\omega}_n) - n\pi_i(\omega(\hat{\beta}_n)))^2}{n\pi_i(\omega(\hat{\beta}_n))},$$

которая асимптотически распределена как χ_r^2. Критериям типа хи-квадрат для проверки сложных гипотез посвящены также работы [106, 135].

А. Г. Осидзе в работах [53—55] рассмотрел критерии типа хи-квадрат для проверки сложной гипотезы относительно спектральной плотности стационарного гауссовского случайного процесса (эта плотность зависит от неизвестных параметров). В [53] получен аналог теоремы Чернова—Лемана; в [55] в качестве оценки неизвестных параметров используется оценка минимума хи-квадрат и предельное распределение статистики критерия не зависит от мешающего параметра. В [55] предлагается видоизменить статистику критерия таким образом, чтобы свойство асимптотического подобия имело место и при использовании ОМП для мешающих параметров.

В ряде работ [49, 69, 198, 200, 241, 266] содержится обзор работ по критериям согласия типа хи-квадрат. В работах Ланкастера [170, 171] содержится исторический обзор по этим критериям.

3.6. «Гладкие» критерии Неймана. Критерии типа хи-квадрат не рассматривают, как правило, возможных альтернатив, вследствие чего основанные на них АП критерии имеют низкую эффективность и даже могут оказаться несостоятельными. Нейман в работе [211] ввел, так называемые «гладкие» критерии согласия. Рассматривается задача проверки согласия выборки с семейством, обладающим плотностями $p(x, \theta)$, зависящими от неизвестного параметра θ. Это семейство распределений вкладывается в семейство с плотностями

$$f(x, \theta, \vartheta) = c(\theta, \vartheta)\, p(x, \theta) \exp\left\{\sum_{j=1}^{k} \vartheta_j p_j(x, \theta)\right\}, \tag{23}$$

для которого проверяется гипотеза $\vartheta_1 = \ldots = \vartheta_k = 0$. Семейство (23) может «гладко» изменяться, отклоняясь от нулевого распределения. Нейман рассматривал случай простой гипотезы, нулевое распределение предполагалось равномерным на $[0, 1]$, а в качестве $p_j(x)$ выбирались полиномы Лежандра $\pi_j(x)$, $j = 1, \ldots, k$. Критерий Неймана основан на статистике

$$\Psi_k^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{n} \pi_j(x_i)\right)^2,$$

которая имеет предельное хи-квадрат распределение с k степенями свободы, центральное при H_0 и нецентральное при альтернативах $\vartheta_j = \frac{\lambda_j}{\sqrt{n}}$, $j = 1, \ldots, k$, с параметром нецентральности $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j^2$. Аналогичные критерии ввел Бартон [87].

В работах Бартона [88, 89] (см. также статью Ватсона [266]) Ψ_k^2-критерии Неймана обобщались на случай сложных гипотез. Рассматривались сгруппированные наблюдения, и вместо мешающего параметра θ подставлялась его мультиномиальная ОМП. Предельное распределение статистики критерия при H_0 было χ^2_{k-s}.

В общем случае применение Ψ_k^2-критерия Неймана для проверки гипотезы $\xi = 0$ (ξ — одномерный параметр) из распределения $P_{\xi,\theta}$ с плотностью $p(x, \xi, \theta)$ (не обязательно вида (23)) рассмотрел Д. М. Чибисов в работе [66]. Пусть

$$l_\xi(x, \theta) = \left.\frac{\partial \ln p(x, \xi, \theta)}{\partial \xi}\right|_{\xi=0}; \quad l_{\theta j}(x, \theta) = \left.\frac{\partial \ln p(x, \xi, \theta)}{\partial \theta_j}\right|_{\xi=0}, \tag{24}$$

$$j = 1, \ldots, s;$$

и функции $\varphi_1(x, \theta), \ldots, \varphi_k(x, \theta)$ удовлетворяют условиям

$$\mathrm{E}_{0\theta}\varphi_i(X_1, \theta) = 0; \quad \mathrm{E}_{0\theta}\{\varphi_i(X_1, \theta)\, \varphi_\nu(X_1, \theta)\} = \delta_{i\nu}; \tag{25}$$

$$\mathrm{E}_{0\theta}\{\varphi_i(X_1, \theta)\, l_{\theta j}(X_1, \theta)\} = 0; \quad i, \nu = 1, \ldots, k; \quad j = 1, \ldots, s; \tag{26}$$

где $\mathrm{E}_{0\theta}$ — символ математического ожидания, отвечающего распределению $P_{0\theta}$. Критерий, предложенный Д. М. Чибисовым, основан на статистике

$$\Psi_k^2(X^{(n)}) = \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{l=1}^{n} \varphi_j(X_l, \hat\theta_n)\right)^2, \tag{27}$$

где $\hat{\theta}_n$ — произвольная $\sqrt{n}$-состоятельная оценка параметра θ. Статистика (27) имеет при альтернативах $\lambda/\sqrt{n}$ хи-квадрат распределение с k степенями свободы и параметром нецентральности $\lambda^2 \sum_{j=1}^{k} (E_{0\theta}\{\varphi_j(X_1, \theta) l_\xi(X_1, \theta)\})^2$. В [66] также обсуждается выбор функций $\{\varphi_j(x, \theta)\}$ и числа k. Применяя критерий (19), предложенный К. О. Джапаридзе, к семейству (23) при условии, что функции $p_j(x, \theta)$, $j=1, \ldots, k$, удовлетворяют условиям (25), получаем критерий, имеющий тот же вид, что и критерий Д. М. Чибисова (27). Но при этом, вообще говоря, в качестве θ_n можно брать не любую $\sqrt{n}$-состоятельную оценку (как в работе Д. М. Чибисова), а ОМП (или асимптотически эквивалентную ей оценку). Для того, чтобы в качестве θ_n можно было бы брать любую $\sqrt{n}$-состоятельную оценку, либо функции $p_j(x, \theta)$ должны удовлетворять дополнительному условию (26), либо надо несколько видоизменить критерий (19) — «спроектировать» функции $p_j(x, \theta)$ на некоторое подпространство. Такая модификация также содержится в работе [19], и она будет обсуждена ниже, в § 4; см. также п. 3.7 § 3. Рассмотрим лишь один частный случай критерия (19), когда $p_j(x, \theta) = (\pi_j(\theta))^{-1/2} \times \chi(\cdot;\ [a_{j-1}, a_j])$, $j=1, \ldots, k$; здесь $-\infty = a_0 < a_1 < \ldots < a_{h-1} < a_h = \infty$ — разбиение R^1, $\chi(\cdot, A)$ — индикатор множества A, а $\pi_j(\theta)$ — вероятность попадания в $[a_{j-1}, a_j]$ при H_0. В этом случае критерий (19) совпадает с критерием (22), предложенным в [48]. Небольшим видоизменением функций $p_j(x, \theta)$, $j=1, \ldots, k$, легко получить аналог критерия (22) для сл. границ.

3.7. При изучении критериев согласия в последние годы все чаще стали применяться методы, связанные с построением и исследованием эмпирических процессов (мер). В этом пункте будут кратко рассмотрены идеи, связанные с таким подходом.

Пусть проверяется гипотеза H_0 согласия выборки $(X_1, \ldots, X_n)$ с семейством вероятностных мер $\mathscr{P} = \{P(\cdot, \theta)\}$, зависящим от неизвестного параметра $\theta \in \Theta \subset R^s$. Построим по выборке эмпирическую меру P_n, «ставящую» в каждую точку X_i массу $1/n$, и рассмотрим сл. меру

$$\nu_n(\cdot, \theta) = \sqrt{n}\, [P_n(\cdot) - P(\cdot, \theta)]. \qquad (28)$$

Если θ_0 — истинное значение параметра θ — известно, то естественно проверку гипотезы основывать на том, насколько мера $\nu_n(\cdot, \theta_0)$ отличается от нулевой меры, т. е. меры, тождественно равной нулю. Если θ_0 неизвестно, то выводы основываются на отличии от нулевой сл. меры $\nu_n(\cdot, \theta_n)$, где θ_n — некоторая оценка θ_0. Рассмотренные выше критерии согласия основаны на статистиках, которые являются функциями некоторых линейных функционалов от меры (28). Например, критерии типа хи-квадрат используют линейные функционалы

$$l_i(\nu_n(\cdot, \theta)) = \nu_n(\mathscr{X}_i, \theta), \quad i = 1, \ldots, k, \tag{29}$$

где $\mathscr{X}_1, \ldots, \mathscr{X}_k$ — разбиение пространства $\mathscr{X}$, и основаны на статистиках типа

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{[l_i(\nu(\cdot, \theta_n))]^2}{P(\mathscr{X}_i, \theta_n)}, \tag{30}$$

которая, как нетрудно видеть, есть просто статистика (20). При определенных условиях регулярности на семейство $\mathscr{P}$ и оценку θ_n мера (28) будет слабо сходиться к некоторой гауссовской мере ν, зависящей, вообще говоря, от θ_0. Следовательно, статистика (30) будет сходиться по распределению к сл. в.

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{[l_i(\nu(\cdot, \theta_0))]^2}{P(\mathscr{X}_i, \theta_0)}.$$

Естественно стараться подобрать статистику так, чтобы предельное распределение не зависело от параметра θ_0. В частности, статистика критерия (22) есть просто $l'(\nu_n(\cdot, \theta_n))\Sigma^{-1}(\theta_n) \times \times l(\nu_n(\cdot, \theta_n))$, где $l(\nu) = (l_1(\nu), \ldots, l_k(\nu))'$, а $\Sigma(\theta)$ — ковариационная матрица гауссовского сл. вектора $l(\nu(\cdot, \theta))$. Исследование статистик типа хи-квадрат в работах Мура [198, 200] основано на исследовании эмпирических процессов. Доказательства (для одномерного случая) слабой сходимости эмпирических процессов типа (28) (после соответствующей замены времени) к гауссовским процессам в пространствах $C[0, 1]$ непрерывных функций и $D[0, 1]$ — функций без разрывов второго рода (с метрикой Скорохода) — содержатся в работах Дурбина [125, 126]; в них явно выписана корреляционная функция предельных процессов для случая, когда θ_n — $\sqrt{n}$-состоятельная оценка, допускающая некоторое стохастическое разложение.

Э. В. Хмаладзе в [65] исследовал слабую сходимость в пространстве $L_2[0, 1]$; он, в частности, показал, что подставление в эмпирический процесс вместо θ_0 оценки θ_n приводит к проектированию броуновского моста на некоторое подпространство (если θ_n — ОМП, это будет ортопроекция).

Рассматриваются и функционалы более общего типа, например,

$$l_i(\nu(\cdot, \theta)) = \int \varphi_i(x)\, \nu(dx, \theta), \quad i = 1, \ldots, k. \tag{31}$$

(На функционалах такого типа основаны гладкие критерии согласия Неймана). Если $\Sigma(\theta)$ — ковариационная матрица сл. вектора $l(\nu) = (l_1(\nu), \ldots, l_k(\nu))'$, где ν — предельная мера, к которой слабо сходится последовательность $\nu_n(\cdot, \theta_n)$, то статистика

$$l'(\nu_n(\cdot, \theta_n))\, \Sigma^{-1}(\theta_n)\, l(\nu_n(\cdot, \theta_n)) \tag{32}$$

распределена асимптотически как χ_k^2. Отметим, что в общем случае ковариационная матрица $\Sigma(\theta)$ и, следовательно, статистика

(32), зависят от вида оценки θ_n (так же, как и критерии вида (22)). Если же мы хотим получить статистики, в которые вместо θ_0 можно подставлять любую $\sqrt{n}$-состоятельную оценку, мы должны наложить некоторые дополнительные ограничения на функционалы (31). В частности, если функции φ_i зависят и от параметра $\theta : \varphi_i = \varphi_i(x, \theta)$, и удовлетворяют условиям (26), то матрица $\Sigma(\theta)$ от вида оценки не зависит и предельное распределение статистики (32) одинаково для всех $\sqrt{n}$-состоятельных оценок (см. Д. М. Чибисов [66]). Ю. Н. Тюрин в работе [62], пользуясь геометрическими представлениями, подробно и наглядно пояснил естественность условий типа (26) для построения АП критериев согласия.

Рассмотрим семейство $\mathcal{H} = \{H\}$ мер, плотности которых $h(x) = \frac{dH}{dP_0}$ относительно некоторой выделенной меры P_0 принадлежат $L_2(P_0)$. Введем в $\mathcal{H}$ скалярное произведение (ск. п.) $\langle H_1, H_2 \rangle = \int \frac{dH_1 dH_2}{dP_0}$. Пусть по выборке $X_1, \ldots, X_n$ проверяется согласие с семейством

$$\mathcal{P} = \{P(\cdot, \theta), \theta \in \Theta \subset R^s\} \subset \mathcal{H}, \text{ и } P_0 = P(\cdot, \theta_0).$$

Пусть P_n^* — проекция эмпирической меры P_n на $T(P_0)$ — касательное линейное многообразие к $\mathcal{P}$ в точке P_0; в качестве базиса в $T(P_0)$ можно выбрать меры $G_1, \ldots, G_s$:

$$G_i(A) = \left(\frac{\partial P(\cdot, \theta)}{\partial \theta_i}\right)(A) = \int_A \frac{\partial \ln p(x, \theta)}{\partial \theta_i} dP_0, \tag{33}$$

где $p(x, \theta) = \frac{dP(\cdot, \theta)}{d\mu}$ (мера μ доминирует $\mathcal{P}$). Нетрудно видеть, что $P_n^* = P(\cdot, \hat{\theta}_n)$, где $\hat{\theta}_n$ — ОМП. Сл. мера $\nu_n(\cdot, \hat{\theta}_n)$ слабо сходится к мере ν, которая есть проекция стандартной гауссовской меры ν_0 (с $E\nu_0(A) = 0$, $E\nu_0(A)\nu_0(B) = P_0(AB)$) на подпространство, ортогональное $L = \{P_0, G_1, \ldots, G_s\}$. Поэтому естественно, проверяя гипотезу согласия с $\mathcal{P}$ с помощью функционалов вида (31), выбирать $\varphi_i(x)$ в виде $\varphi_i(x) = \frac{dH_i}{dP_0}$, $i = 1, 2, \ldots,$ а меры H_i выбирать ортогональными L. Рассмотрим в $L^\perp$ конечномерное подпространство, натянутое на $H_1, \ldots, H_k$, и построим критерий вида (32). Этот критерий зависит от θ_0 (проекции строились при помощи ск. п., определяемого θ_0), но предельное распределение не изменится, если заменить θ_0 произвольной $\sqrt{n}$-состоятельной оценкой. Таким образом строился критерий для проверки сложной гипотезы согласия в работе Ю. Н. Тюрина [61].

Э. В. Хмаладзе в [64, 65] рассмотрел класс билинейных функционалов от эмпирических процессов и показал, как строить основанные на таких функционалах критерии согласия, имеющие заданные предельные распределения (например, χ^2 или ω^2).

Другой подход, также связанный с геометрическими соображениями и в частных случаях приводящий к критериям типа хи-квадрат, предложен в работах А. М. Кагана [157] и О. В. Герлейна и Р. Пинкуса [14]. Пусть $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ — заданные функции, $H = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\}$ — натянутое на них линейное пространство (предполагается, что функция $\varphi_0(x) \equiv 1$ принадлежит H), и $\mathcal{P} = \{P : \varphi_1, \ldots, \varphi_k \in L_2(P)\}$ — семейство мер. Пусть $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$, введем ск. п. $(\cdot, \cdot)_\alpha$, $\alpha = 1, 2$, определяемое матрицей $A_\alpha = \| a_{ij}^\alpha \|$, где $a_{ij}^\alpha = \int \varphi_i(x) \varphi_j(x) \, dP_\alpha$. Функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ можно рассматривать в качестве ортонормированного базиса с некоторым ск. п. $(\cdot, \cdot)$, тогда $(\varphi, \psi)_\alpha = (\varphi, A_\alpha \psi)$. За меру расхождения между P_1 и P_2 принята некоторая мера $\omega(1:2)$ расхождения между ск. п. $(\cdot, \cdot)_1$ и $(\cdot, \cdot)_2$:

$$\omega(1:2) \equiv \omega(A_1 : A_2) = \| A_1^{-1} (A_2 - A_1) \varphi_0 \|_1^2,$$

норма $\| \cdot \|_1$ соответствует ск. п. $(\cdot, \cdot)_1$. Пусть теперь $P_0 \in \mathcal{P}$ — распределение, заданное с точностью до $a_{ij}^0 = \int \varphi_i(x) \varphi_j(x) dP_0$. Определим на $\mathcal{P}$ линейные функционалы $\pi_i(P) = \int \varphi_i dP$, $i = 1, \ldots, k$, и пусть по выборке $X_1, \ldots, X_n$ проверяется простая гипотеза $\pi_i(P_0) = \pi_{i0}$, $i = 1, \ldots, k$. Пусть $A_0 = \| a_{ij}^0 \|$ и $A_n = \| \bar{a}_{ij} \|$ — операторы, отвечающие гипотетическому распределению P_0 и эмпирическому P_n $\left(\bar{a}_{ij} = \int \varphi_i \varphi_j dP_n = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} \varphi_i(X_t) \varphi_j(X_t) \right)$. За статистику критерия в [157] предлагается принять расхождение

$$n\omega(A_0 : A_n) = n \| A_0^{-1} (A_0 - A_n) \varphi_0 \|_0^2 \tag{34}$$

между векторами $A_0 \varphi_0$ и $A_n \varphi_0$, имеющими в базисе $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ представления

$$A_0 \varphi_0 = (\pi_{10}, \ldots, \pi_{k0})', \quad \pi_{i0} = (\varphi_i, \varphi_0)_0, \quad i = 1, \ldots, k;$$

$$A_n \varphi_0 = (\bar{\varphi}_1, \ldots, \bar{\varphi}_k), \quad \bar{\varphi}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \varphi_i(X_j), \quad i = 1, \ldots, k.$$

Статистика (34) имеет при гипотезе предельное распределение χ_{k-1}^2. В частности, если $\varphi_i(x) = \chi(\cdot, \mathcal{X}_i)$, $i = 1, \ldots, k$, — индикаторы множеств $\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_k$, образующих разбиение $\mathcal{X}$, то критерий (34) есть обычный хи-квадрат критерий (см. (20)). В [14] этот подход применен к проверке согласия выборки с параметрическим семейством распределений $\{P(\cdot, \theta), \theta \in \Theta \subset R^s\}$; гипотеза заключается в принадлежности значений функционалов $\pi_i(P)$, $i = 1, \ldots, k$, заданному семейству: $\pi_i(P) = \pi_i(\theta)$, $i = 1, \ldots, k$. В качестве статистики критерия предлагается статистика $n\omega(A_{\theta_n}; A_n)$, где $A_\theta = \| a_{ij}^\theta \| = \left\| \int \varphi_i \varphi_j dP(\cdot, \theta) \right\|$, а θ_n — оценка θ по выборке $X_1, \ldots, X_n$. Наложив некоторые условия регулярности на семейство $P(\cdot, \theta)$ и оценку θ_n, в [14] получено предельное распределение этой статистики, в частности, получены аналоги результатов Чернова — Лемана. Предлагаются стандартные видоизменения этой статистики, предельные распределения которых (при гипотезе) есть χ^2_{k-1} или χ^2_{k-s-1}. Предлагается также использовать этот подход для проверки гипотезы $\omega \in \Omega_0$ о параметре ω распределения P_ω, где Ω_0 определено в (1). Найдена мощность полученного критерия и обсуждается связь между ним и критериями ψ^2_k и ОП.

§ 4. АСИМПТОТИЧЕСКИ ПОДОБНЫЕ $C(\alpha)$-КРИТЕРИИ

4.1. Построение статистик большинства из рассмотренных АП критериев, основанных на принципе ОП, связано с вычислением ОМП как для информативных, так и для мешающих параметров. Кроме вычислительных трудностей, связанных с необходимостью вычисления ОМП, для возможности применения описанных результатов распределение $P_{\xi,\theta}$ должно удовлетворять сильным условиям регулярности, обеспечивающих существование, $\sqrt{n}$-состоятельность, асимптотическую нормальность и эффективность ОМП. В 50-х годах появились работы, в которых АП критерии строились другим, более простым способом — так называемые $C(\alpha)$-критерии. Методы получения этих критериев связаны с идеей подстановки оценок мешающих параметров в критерии для проверки гипотез, полученные в предположении, что значения мешающих параметров известны. Естественно, исходные критерии должны «выдерживать» эту подстановку, т. е. не должно меняться асимптотическое распределение статистик этих критериев. Общие результаты о том, когда статистики «выдерживают» подстановку оценки, содержатся в работе Ле Кама [174, стр. 88—93].

Первыми работами, где применялись эти методы, являются работы Бартлетта [85, 86]; в них предложен критерий, близкий критерию $C(\alpha)$, и указана его связь с критерием ОП. В работе Неймана [214] рассмотрены условия, которым должны удовлетворять критические области АП критериев. В статье Ле Кама [173] фактически строится $C(\alpha)$-критерий для случая когда и информативный и мешающий параметры — одномерные (Ле Кам указывает, что эти результаты ему сообщены Нейманом). В окончательном виде $C(\alpha)$-критерии (для одномерного информативного параметра и произвольной размерности мешающего параметра) были введены Нейманом в [215].

4.2. Результаты Неймана. Пусть $f(x, \theta)$ — некоторая функция такая, что сл. в. $f(X_1, \theta)$ имеет при распределении $P_{0\theta}$ нулевое математическое ожидание и единичную дисперсию. В силу центральной предельной теоремы при нулевой гипотезе $\xi=0$ сл. в.

$$Z_n(X^{(n)}, \theta, f)=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} f(X_i, \theta) \tag{35}$$

распределена асимптотически нормально с параметрами (0, 1). Нейман получил следующий результат:

Пусть $\hat{\theta}_n=(\hat{\theta}_{1n},\ldots, \hat{\theta}_{sn})'$ — $\sqrt{n}$-состоятельная оценка θ при нулевой гипотезе такая, что никакая невырожденная линейная комбинация $\sqrt{n}\sum_{\nu=1}^{s} a_\nu(\hat{\theta}_{\nu n}-\theta_\nu)$ не сходится по вероятности $P_{0\theta}^{(n)}$ к нулю. Тогда для того чтобы сл. в. (35) «выдерживала» подстановку оценки $\hat{\theta}_n$, т. е. чтобы разность $Z_n(X^{(n)}, \hat{\theta}_n, f)-Z_n(X^{(n)}, \theta, f)$ сходилась по вероятности $P_{0,\theta}^{(n)}$ к нулю, необходимо и достаточно, чтобы

$$\mathrm{E}_{0\theta}\{f(X_1, \theta)\, l_{\theta j}(X_1, \theta)\}=0, \quad j=1,\ldots, s, \tag{36}$$

(функции $l_{\theta j}$ введены в (24)). Рассмотрен также случай, когда часть компонент $\hat{\theta}_{jn}-\theta_j$ сходится к нулю со скоростью $o(n^{-1/2})$.

Функции, удовлетворяющие (36), могут быть построены из любой функции $g(\cdot)$ с конечной дисперсией следующим образом. Пусть при $a_j=a_j(\theta)$, $j=1,\ldots, s$, минимизируется дисперсия

$$\mathrm{E}_{0\theta}\left\{g(X_1)-E_{0\theta}g(X_1)-\sum_{j=1}^{s} a_j l_{\theta j}(X_1, \theta)\right\}^2,$$

и $\sigma^2(\theta, g)$ равно этому минимальному значению. Пусть $\sigma(\theta, g)>0$ для всех $\theta\in\Theta$. Тогда функция

$$f(x, \theta)=\frac{g(x)-\mathrm{E}_{0\theta}g(X_1)-\sum_{j=1}^{s} a_j(\theta)\, l_{\theta j}(x, \theta)}{\sigma(\theta, g)} \tag{37}$$

имеет при H_0 нулевое среднее, единичную дисперсию и удовлетворяет (36). Такие функции названы в [215] крамеровскими.

Следовательно, если f — крамеровская функция, а $\hat{\theta}_n$ — произвольная $\sqrt{n}$-состоятельная оценка θ при H_0, критерий, принимающий H_0 при

$$Z_n(X^{(n)}, \hat{\theta}_n, f)\in B(\alpha) \tag{38}$$

будет АП критерием уровня α; здесь $B(\alpha)\subset R^1$ — измеримое множество, $N(0, 1)$-мера которого равна $(1-\alpha)$, а лебегова мера границы равна 0. Класс критериев вида (38) назван в [215] классом $C(\alpha)$-критериев; критерии этого класса задаются парой $(f, B(\alpha))$.

Наложив условия на функцию $f(x, \theta)$ и оценку $\hat{\theta}_n$ (условие локальной $\sqrt{n}$-состоятельности) при близких альтернативах $\xi=\xi_n=\frac{\lambda}{\sqrt{n}}$, Нейман показал, что статистика $Z_n(X^{(n)}, \hat{\theta}_n, f)$ имеет при таких альтернативах асимптотически нормальное распределение с параметрами $(\lambda a(\theta, f), 1)$, где $a(\theta, f)= =\mathrm{E}_{0\theta}\{f(X_1, \theta)\, l_\xi(X_1, \theta)\}$ (см. (24)).

Пусть $l_\xi^*(x, \theta)$ — функция, получаемая из $l_\xi(x, \theta)$ при помощи конструкции (37). Нейман показал, что $|a(\theta, f)| \leqslant a(\theta, l_\xi^*)$, и, следовательно, для односторонних альтернатив $\xi > 0$ наибольшую асимптотическую мощность имеет $C(\alpha)$-критерий $(l_\xi^*, (-\infty, \nu(\alpha))$, где $\nu(\alpha)=\Phi^{-1}(1-\alpha)$ — верхняя α-квантиль распределения $N(0, 1)$. При двухсторонних альтернативах наибольшую асимптотическую мощность (среди асимптотически несмещенных $C(\alpha)$-критериев) имеет критерий $\left(l_\xi^*, \left(-\nu\left(\frac{\alpha}{2}\right), \nu\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)\right)$. Эти критерии были названы Нейманом АЛНМ и, соответственно, АЛНМН критериями.

Общая теория $C(\alpha)$-критериев (с некоторыми обобщениями) излагается также в работах Неймана и Скотт [222, 223], Барту и Пури [90], А. В. Бернштейна [5], а также во вступительном докладе Бартозжинского и Клонецкого [91] на симпозиуме в честь Неймана.

4.3. В работе Неймана [215] оптимальность АЛНМ и АЛНМН критериев доказана только в классе критериев $C(\alpha)$. Ле Кам в работе [174] (а для частного случая $s=1$ — в [173]) доказал, что эти асимптотически оптимальные критерии являются таковыми и в более широком классе всех дифференциально АП критериев, т. е. таких критериев $\varphi_n(x^{(n)})$, у которых сходимость (3) уровня значимости к заданному предельному значению равномерна по сужающимся множествам вида $(\theta+\frac{1}{\sqrt{n}}K)$, где K — произвольный компакт в R^s: для наилучшего $C(\alpha)$-критерия $\varphi_n{}^*$ и произвольного дифференциально АП критерия ψ_n имеет место неравенство

$$\lim_{n\to\infty} \int [\varphi_n^*(x^{(n)})-\psi_n(x^{(n)})]\, dP^{(n)}_{\lambda/\sqrt{n},\,\theta} \geqslant 0.$$

Этот факт впоследствии был получен также в работах В. М. Баронкина, А. Ф. Кушнира, А. И. Пинского [1, 2] и А. В. Бернштейна [5].

В краткой заметке Ли Ши-лина [38] утверждается, что при некоторых условиях критерии, наилучшие в классе $C(\alpha)$-критериев, являются таковыми в классе всех АП критериев. Однако доказательства в [38] отсутствуют, и в дальнейшем более подробных публикаций автора не появилось.

Д. М. Чибисов в работе [115] доказал более сильный факт о совпадении функции мощности наилучшего $C(\alpha)$-критерия с огибающей функцией мощности всех дифференциально АП критериев до порядка $1/\sqrt{n}$.

4.4. Обобщение на многомерный случай впервые появилось независимо в работе Бхата и Нагнура [98] и Бюлера и Пури [105]. В [105] рассматривался вектор $\mathbf{f}(x,\theta)=(f_1(x,\theta),\ldots$ $\ldots,f_r(x,\theta))'$ (r — размерность параметра ξ) из крамеровских функций. Пусть $\Sigma(\theta,\mathbf{f})$ — ковариационная матрица вектора $\mathbf{f}(X_1,\theta)$ при H_0 — невырождена при всех θ и непрерывно зависит от θ. Статистика

$$T_n(X^{(n)},\ \hat{\theta}_n,\ \mathbf{f})=(Z_n(X^{(n)},\ \hat{\theta}_n,\ \mathbf{f}))'(\Sigma(\hat{\theta}_n,\ \mathbf{f}))^{-1}Z_n(X^{(n)},\ \hat{\theta}_n,\ \mathbf{f}),$$

где $\hat{\theta}_n$ — произвольная $\sqrt{n}$-состоятельная оценка θ, асимптотически имеет хи-квадрат распределение с r степенями свободы, центральное при H_0 и нецентральное, с некоторым параметром нецентральности $\delta(\lambda,\ \theta,\ \mathbf{f})$ (он выписан в [105]) при альтернативах (9). Показано, что $\delta(\lambda,\ \theta,\ \mathbf{f})\leqslant\delta(\lambda,\ \theta,\ \mathbf{l}_\xi^*)$, где компоненты вектора $\mathbf{l}_\xi^*$ строятся при помощи конструкции (37) из функций $l_{\xi j}(x,\theta)=\left.\frac{\partial\ln p(x,\ \xi,\ \theta)}{\partial\xi_j}\right|_{\xi=0}$, $j=1,\ldots,r$. Следовательно, среди всех критериев, принимающих H_0 при

$$T_n(X^{(n)},\ \hat{\theta}_n,\ \mathbf{f})\leqslant\chi^2_{r,\alpha} \tag{39}$$

(они были названы в [105] $C(\alpha)$-критериями), наибольшую асимптотическую мощность имеет критерий, основанный на статистике $T_n(X^{(n)},\ \hat{\theta}_n,\ \mathbf{l}_\xi^*)$, он назван в [105] АЛНМ критерием.

В [98] рассматривался такой же класс многомерных $C(\alpha)$-критериев, и в нем отыскивались АЛНС (наиболее строгие) критерии на некотором семействе эллипсоидов, зависящих от мешающего параметра θ. Естественно, АЛНМ и АЛНС $C(\alpha)$-критерии совпадают; это легко углядеть из работы Вальда [262] (см., также, монографию Русаса [60], теоремы 2.1, 2.2 и 6.1 гл. VI и п. 2.4, 4.5 настоящего обзора).

$C(\alpha)$-критерии вида (39) подробно описаны в работах Калкарни [166], Нагнура [207], Беавера [94]; их состоятельность исследовалась в [244, 136].

Более широкий класс $C(\alpha)$-критериев для многомерного параметра введен в работах А. В. Бернштейна [8, 9]. Пусть $C(\theta)\subset R^r$ — выпуклое множество, имеющее $N(0,I)$-меру, равную $(1-\alpha)$, и непрерывно зависящее от θ (топология в пространстве выпуклых множеств определяется метрикой Хаусдорфа). Если $Q(\theta,\ \mathbf{f})$ — квадратный корень из матрицы $\Sigma(\theta,\ \mathbf{f})$, то обобщенный $C(\alpha)$-критерий $\varphi_n(x^{(n)}\,|\,\mathbf{f},\ C(\cdot))$ определяется парой $(\mathbf{f},\ C(\cdot))$ и принимает H_0 при

$$(Q(\hat{\theta}_n,\ \mathbf{f}))^{-1}Z_n(X^{(n)},\ \hat{\theta}_n,\ \mathbf{f})\in C(\hat{\theta}_n), \tag{40}$$

где $\hat{\theta}_n$ — произвольная $\sqrt{n}$-состоятельная оценка θ при нулевой гипотезе.

Критерии работ [98, 105] являются частным случаем (40) при $C(\theta) \equiv C_0 = \{x \in R^r : |x| \leqslant \chi^2_{r,\alpha}\}$. Отметим, что в [8, 9] все результаты получены при существенно более слабых условиях, чем в [98, 105]; в частности, в [8, 9] не накладываются условия на поведение функции $\mathfrak{f}$ и оценки $\hat{\theta}_n$ при альтернативе.

Если рассматривать только «односторонние» альтернативы (в условиях работ Итона [127, 128]; см. также п. 1.3 настоящего обзора), то даже наилучшие $C(\alpha)$-критерии работ [98, 105] оказываются асимптотически недопустимыми: найдется $C(\alpha)$-критерий вида (40) с равномерно большей асимптотической мощностью.

В некоторых случаях среди всех критериев вида (40) асимптотически полный класс составляют критерии $\varphi_n(x^{(n)} | l_\xi^*, C(\cdot))$, отсюда, в частности, следуют результаты работы [105].

4.5. Результаты, полученные Нейманом, могут быть легко поняты, если мы обратимся к асимптотическим методам, связанным с аппроксимацией данного семейства экспоненциальным семейством мер, см. п. 2.7 § 2. Асимптотически достаточной статистикой для исходного семейства будет вектор $(U_n, T_{1n}, \ldots, T_{sn})'$, где

$$U_n = Z_n(X^{(n)}, \theta, l_\xi); \quad T_{jn} = Z_n(X^{(n)}, \theta, l_{\theta j}), \quad j = 1, \ldots, s.$$

Рассмотрим для экспоненциального семейства (18) с плотностью

$$\frac{dQ^*_{\lambda,\vartheta}}{dQ^*_{0,0}} = C_n(\lambda, \vartheta, \theta) \exp\left\{\lambda U_n + \sum_{j=1}^{s} \vartheta_j T_{jn}\right\},$$

аппроксимирующего семейство $P^{(n)}_{\lambda/\sqrt{n},\,\theta+\vartheta/\sqrt{n}}$ в точке $(0, \theta)$, РНМ подобный критерий, описанный в п. 1.2; он принимает гипотезу на множества вида $U_n \leqslant C_n(T_{1n}, \ldots, T_{sn})$. Так как вектор $(U_n, T_{1n}, \ldots, T_{sn})'$ асимптотически нормален (при H_0) с параметрами $(0, B)$, это множество асимптотически эквивалентно множеству вида

$$\left(\sigma\left(\theta, l_\xi - \sum_{j=1}^{s} a_j(\theta) l_{\theta j}\right)\right)^{-1} \times \left(U_n - \sum_{j=1}^{s} a_j(\theta) T_{jn}\right) \leqslant \nu(\alpha), \tag{41}$$

при этом коэффициенты $\{a_j(\theta)\}$ выбраны так, чтобы для функции $l_\xi - \sum_{j=1}^{s} a_j(\theta) l_{\theta j}$ выполнялось соотношение ортогональности (36). Подставив в (41) вместо θ произвольную $\sqrt{n}$-состоятельную оценку θ_n, получим область принятия наилучшего $C(\alpha)$-критерия. В многомерном случае асимптотически достаточной статистикой будет вектор $(U_n, T_n)'$, где $U_n = (U_{1n}, \ldots, U_{rn})'$, $T_n = (T_{1n}, \ldots, T_{sn})'$, $U_{jn} = Z_n(X^{(n)}, \theta, l_{\xi j})$. Используя асимптотическую нормальность вектора $(U_n, T_n)'$, рассмотрим критерий ОП для проверки критерия $\lambda = 0$ для семейства $N\left(B\begin{pmatrix}\lambda\\ \vartheta\end{pmatrix}, B\right)$, являющегося предельным для распределения вектора $(U_n, T_n)'$ при распределении $P_{\lambda/\sqrt{n}, \theta+\vartheta/\sqrt{n}}$. Этот критерий принимает гипотезу при

$$(U_n - A(\theta)T_n)'(B_{11} - AB_{22}A')^{-1}(U_n - A(\theta)T_n) \leqslant \chi^2_{r,\alpha}, \qquad (42)$$

здесь матрица $A(\theta)$ выбрана так, чтобы компоненты вектора $U_n - A(\theta)T_n$ удовлетворяли соотношению ортогональности (36). Подставив в (42) вместо θ любую $\sqrt{n}$-состоятельную оценку, получаем наилучший $C(\alpha)$-критерий вида (39). Используя тот факт, что в задаче проверки гипотезы о среднем значении многомерного нормального вектора не существует наилучшего критерия, а существует лишь полный класс допустимых критериев (см. п. 1.3 обзора, а также работу Д. М. Чибисова [67]), в этой задаче естественно рассмотреть более общий класс критериев вида (40).

Заметим, что если бы мы рассматривали статистики критериев $C(\alpha)$ как статистики, основанные на линейных функционалах вида (31), то условие ортогональности мер $H_1, \ldots, H_r$ подпространству $L(P_{0\theta}, G_1, \ldots, G_s)$ эквивалентно условиям (36). Выбрав в качестве $H_1, \ldots, H_k$, $k = r$, меры, имеющие относительно $P_{0\theta}$ плотности $l_{\xi j}(x, \theta)$, $j = 1, \ldots, r$, и спроектировав их на $L^{\perp}$ (это эквивалентно конструкции (37)), мы получим критерий (32), совпадающий с критериями (39) и (42).

4.6. Различные обобщения. В нескольких работах рассматривался случай, когда наблюдения $X_1, \ldots, X_n$ являются независимыми, но разнораспределенными сл. в. Впервые такой случай рассмотрен Барту и Пури [90], где наблюдения связаны в схему серий $(X_{1n}, \ldots, X_{nn})$, и сл. в. X_{kn} имеет плотность $p_{kn}(x, \xi, \theta)$. На плотности наложены условия крамеровского типа, которые обеспечивают условия выполнения закона больших чисел и центральной предельной теоремы для последовательностей независимых, но разнораспределенных сл. в. В. М. Баронкин, А. Ф. Кушнир и А. И. Пинский в [1, 2] рассмотрели частный случай $p_{kn}(x, \xi, \theta) = p(x, \alpha_{kn}\xi, \theta)$, где $\{\alpha_{kn}\}$ — известная последовательность; в цитируемых статьях это названо «нестационарной альтернативой» (разнораспределенность имеет место только при альтернативе). Отметим, что результаты этих статей основаны на современном асимптотическом подходе.

В работах [98, 105] многомерные $C(\alpha)$-критерии вводились также для случая независимых разнораспределенных слагаемых.

Ряд работ посвящен обобщению $C(\alpha)$-критериев на случай, когда не выполнены те или иные условия регулярности, носящие принципиальный характер. Нейман [218] рассмотрел случай, когда плотность $p(x, \xi, \theta)$ не дифференцируема по ξ при $\xi=0$ (рассматривается случай $r=1$), но существуют неравные правосторонняя и левосторонняя производные. Примеры статистических задач, в которых возникают подобные эффекты, рассмотрены в [226]. При проверке гипотезы $\xi=0$ против двухсторонней альтернативы $\xi\neq 0$ полный класс составляют $C(\alpha)$-критерии, основанные на линейных комбинациях функций, получающихся при помощи конструкции (37) из правосторонней и левосторонней логарифмической производной плотности по информативному параметру (Рэй [245]). Нейман [218] построил наилучшие $C(\alpha)$-критерии в классе сильно симметричных критериев (т. е. критериев с четной функцией мощности) и в классе слабо симметричных критериев (максимизирующих $\frac{\partial}{\partial\lambda}[\beta(\lambda)+\beta(-\lambda)]|_{\lambda=0}$). Рэй в статье [245] (см. также [243]) построил $C(\alpha)$-критерий, максимизирующий $\min\{\beta(\lambda), \beta(-\lambda)\}$.

А. В. Бернштейн в работах [4, 5] рассмотрел случай, когда $l_\xi(x, \theta)$ является линейной комбинацией функций $l_{\theta j}(x, \theta)$, $j=1, \ldots, s$. В этом случае для любой крамеровской функции f коэффициент сдвига $a(\theta, f)$ при альтернативе равен 0, и все классические $C(\alpha)$-критерии асимптотически эквивалентны тривиальному критерию $\varphi_0\equiv\alpha$, т. е. они не в состоянии различить гипотезы, сближающиеся со скоростью $1/\sqrt{n}$.

В [5] найдена для этого случая правильная скорость сближения альтернатив и построены АЛНМ и АЛНМН критерии. Эти наилучшие критерии уже не основаны на крамеровской функции l_ξ^*. Результаты Неймана [215] получены в [5] как частный случай при более слабых условиях; в частности, в [5] не накладываются условия на поведение функции f и оценки $\hat{\theta}_n$ при альтернативе.

Результаты работ [4, 5] основаны на идеях, описанных в п. 2.7 и п. 4.5 обзора, но разложение логарифма ОП будет в этом случае нестандартным — в цитируемых работах рассмотрены специальным образом подобранные последовательности альтернатив (не вида (9)), и в качестве компонент вектора $\Delta(x)$ выбраны не обычные логарифмические производные плотности, а функции более сложного вида.

В ряде работ $C(\alpha)$-критерии обобщались на случай зависимых наблюдений. Впервые на такую возможность указывал еще Бартлетт [85] (хотя им рассмотрен только пример авторегрессии 1-го порядка); в [2] также указывается на возможность обобщить полученные результаты на случай, когда наблюдения образуют k-связную марковскую цепь. Дэвис [122] привел условия, при которых семейства распределений, соответствующие гауссовским стационарным временным рядам, являются асимптотически дифференцируемыми по Ле Каму [174]. Используя эти результаты и классические результаты Неймана, Дэвис построил АП критерии для проверки сложных гипотез о параметрах сл. процессов.

К. О. Джапаридзе в [18, 19] среди прочих результатов построил класс АП $C(\alpha)$-критериев, обобщающих обычные критерии на случай наблюдений, образующих сл. процесс. В качестве примера рассмотрены критерии для проверки гипотез о параметрах спектральной плотности гауссовского процесса; в частном случае получены критерии Вольда, Кенуя и др.

Для случая повторной выборки критерий, предложенный К. О. Джапаридзе, совпадает с критериями вида (39) и (42). Применяя этот критерий для построения критерия согласия для семейства, вложенного в (23) и выбирая в качестве $p_j(x)$ — индикатор множества $\mathscr{X}_j$, $j=1,\ldots,k$, получаем критерий согласия, предложенный в работе [20].

4.7. Сравнение $C(\alpha)$-критериев с другими АП критериями. Как показал в частном случае Моран [203, 204] и в общем случае Чант [108, 109], в случае, когда параметр ξ — одномерный, наилучший $C(\alpha)$-критерий асимптотически эквивалентен критерию Вальда [262], основанному на ОМП, и критерию ОП, независимо от того, является ли точка $\xi=\xi_0$, отвечающая нулевой гипотезе, внутренней точкой параметрического пространства или лежит на его границе (хотя в этих двух случаях асимптотические распределения статистик $C(\alpha)$-критерия и критерия Вальда будут различны, области принятия гипотез у обоих критериев асимптотически одни и те же). В случае же многомерного параметра ситуация иная. Как показал Чант [109], в многомерном случае наилучший $C(\alpha)$-критерий (имеются в виду критерии работ [98, 105]) асимптотически эквивалентен критерию Вальда, если $\xi=\xi_0$ — внутренняя точка параметрического пространства, и эта эквивалентность может нарушиться, если точка ξ_0 лежит на границе; в [109] построен пример, когда проверялась гипотеза $\xi=0$ против альтернативы $\xi\neq0$ при условии, что часть компонент ξ неотрицательны (т. е. в ситуации работ Итона [127, 128]). Асимптотическое распределение ОМП в этом случае отлично от нормального [204], а $C(\alpha)$-критерии вида (39) никак не используют информации о поведении параметра ξ при альтернативе. В классе же обобщенных $C(\alpha)$-критериев вида (40) уже найдутся критерии, асимптотически эквивалентные критериям Вальда и ОП.

В работах Гаека [142], Микульского [193, 194], Джеймса [155], Калиша и Микульского [158] вычисляется асимптотическая относительная эффективность критериев Неймана и некоторых непараметрических критериев для различных статистических задач с мешающими параметрами. В [121] приведен пример сравнения $C(\alpha)$-критерия с некоторыми ранговыми критериями в терминах допредельной мощности.

В уже цитированной работе [2] вычисляется питменовская эффективность $C(\alpha)$-критерия относительно асимптотически наилучшего критерия, построенного при известном значении мешающего параметра.

В интересной работе Вейса и Волфовица [268] рассматриваются асимптотически минимаксные критерии для проверки сложных гипотез. Исходя из совершенно других посылок (в [268] для построения минимаксного критерия используется байесовский подход) в этой работе получены критерии, основанные на тех же статистиках, что и $C(\alpha)$-критерии Неймана. В цитируемой работе сначала строится вспомогательный критерий в предположении, что мешающий параметр «асимптотически известен»: параметр θ предполагается зависящим от n и известен вектор $\mathbf{a}=(a_1, \ldots, a_s)'$ такой, что $|\theta_{jn}-a_j|\leqslant M(n)n^{-1/2}$, $j=1, \ldots, s$, где $M(n)\to\infty$ и $n^{-1/2}M(n)\to 0$ при $n\to\infty$. Естественно, вспомогательный критерий зависит от $\mathbf{a}$, и окончательный критерий получается при замене $\mathbf{a}$ на $\sqrt{n}$-состоятельную оценку $\hat{\theta}_n$ параметра θ.

4.8. Уточнение распределения статистики $C(\alpha)$-критерия. В нескольких работах Д. М. Чибисова [70, 71, 114, 115] при различных условиях получено асимптотическое разложение для распределений статистик $C(\alpha)$-критериев как при нулевой, так и при альтернативных гипотезах по степеням $1/\sqrt{n}$. Полученные разложения являются следствием общих результатов Д. М. Чибисова [72, 73] об асимптотическом распределении статистик, допускающих асимптотическое разложение. Пфанцагль [235] построил, исходя из асимптотического распределения ОМП до порядка $o\left(n^{-\frac{k-2}{2}}\right)$, критерий, подобный с точностью до $o\left(n^{-\frac{k-2}{2}}\right)$ и оптимальный с точностью до $o(n^{-1/2})$ при альтернативах (9) в классе критериев уровня $\alpha+o(n^{-1/2})$. В этой статье содержится обзор по асимптотическому разложению функции мощности и вычисляется дефект $C(\alpha)$-критериев.

В работе [115] Д. М. Чибисов построил $C(\alpha)$-критерий, являющийся АП до порядка $o(n^{-1/2})$ и АЛНМ (при $r=1$ и односторонних альтернативах) до порядка $o(n^{-1/2})$. Этот критерий асимптотически (до порядка $n^{-1/2}$) эквивалентен критерию Пфанцагля [235]. В работе [236] показано, что для порядка $o(n^{-1})$ АЛНМ критерия уже не существует, и в этой работе строится полный класс критериев, допустимых до порядка $o(n^{-1})$ и являющихся АП критериями до порядка $o(n^{-1})$.

Результаты об асимптотическом разложении хотя и уточняют поведение функции мощности $C(\alpha)$-критерия, но так же, как и классические результаты, носят асимптотический характер и не позволяют судить ни об уровне значимости, ни о мощности $C(\alpha)$-критериев при конечных n. Единственными работами, где даются оценки мощности $C(\alpha)$-критериев при конечных n, являются работы И. Г. Журбенко [21, 22] и работа Сингха и И. Г. Журбенко [255]. В работе [255] получены верхние границы для размера и мощности критерия, которые выражаются через верхние и нижние границы для вероятностей типа

$$\mathbf{P}\{\hat{\theta}_n-\theta\geqslant\delta\},\quad \mathbf{P}\left\{\sum_{i=1}^{n} l_{\xi}^{*}(X_i,\theta)\geqslant n\gamma\right\}$$

и т. п. (рассматривается случай одномерного мешающего параметра). Среди прочих результатов, в [255] получен, в частности, следующий: истинный уровень значимости $\alpha_n(\theta)$ сходится при $n\to\infty$ к своему предельному значению α со скоростью $\frac{\ln n}{\sqrt{n}}$. В работе [22] приведены нижние и верхние оценки для функции мощности наилучшего $C(\alpha)$-критерия $\beta_n(\xi,\theta)$; отсюда, в частности, следуют все классические результаты о $C(\alpha)$-критериях, если в верхних и нижних оценках перейти к пределу одновременно при $n\to\infty$ и $\xi\to\xi_0$ таким образом, чтобы $\sqrt{n}(\xi-\xi_0)\to\lambda$.

Другие оценки допредельной мощности наилучшего $C(\alpha)$-критерия содержатся в работе Л. С. Воробьёва и И. Г. Журбенко [12]. В ней подробно рассмотрен частный случай плотности, которой описываются наблюдения, получающиеся в рандомизированных экспериментах, см. п. 4.9 обзора.

В [226] приведен пример использования членов асимптотического разложения функции мощности при использовании $C(\alpha)$-критериев в случае выборок конечного объема. Приведено численное сравнение предельной и допредельной функции мощности (допредельная функция мощности вычислялась монтекарловским методом).

В статье Ю. Ч. Неймана [47] для вычисления допредельной функции мощности приведена некоторая приближенная формула; качество ее неизвестно.

4.9. В этом пункте содержится обзор работ, где $C(\alpha)$-критерии применяются для решения различных статистических задач. Часть этих работ посвящена непосредственно теории $C(\alpha)$-критериев, и различные статистические задачи, приведенные там, призваны лишь проиллюстрировать полученные результаты. Другая часть работ посвящена непосредственно решению статистических или естественно-научных задач. В итоге эти задачи сводились к проверке сложных гипотез, и здесь использовались $C(\alpha)$-критерии. Не содержа, как правило, новых результатов по $C(\alpha)$-критериям, эти работы иллюстрируют сложности и «подводные камни», с которыми может столкнуться статистик при использовании этих критериев. В частности, в обширной литературе по применению $C(\alpha)$-критериев для обработки рандомизированных экспериментов по воздействию на облачность, подробно описаны успехи и неудачи использования $C(\alpha)$-критериев при выборках конечного объема.

Критерии однородности. В ряде уже цитированных работ [222, 223, 90], а также в работах Морана [203, 205], Клонецкого [163], А. В. Бернштейна [6] (см. также работы [104, 202]) рассматривались $C(\alpha)$-критерии для проверки однородности выборки из различных частных распределений (пуассоновского, гамма-распределения и др.). Общая постановка задачи проверки однородности и ее решение с использованием $C(\alpha)$-критериев содержится в работах Клонецкого [164] и А. В. Бернштейна [7]. Постановка в [164] заключается в следующем.

Пусть в выборке $X_1, \ldots, X_n$ сл. в. X_i имеет распределение с плотностью $g(x, \theta^i, \theta)$, где $\theta^i \in \Theta \subset R^1$, а $\theta = (\theta_2, \ldots, \theta_s)' \in R^{s-1}$, $i = 1, \ldots, n$. Предполагается, что параметры $\{\theta^1, \ldots, \theta^n\}$ сами образуют выборку из распределения F. Нулевая гипотеза заключается в том, что $F = F_{\theta_1}$, где F_{θ_1} — вырожденное распределение, сосредоточенное в (неизвестной) точке θ_1. При альтернативе распределение F зависит от параметра $\xi \in \Xi \subset R^1 : F = F_{\xi, \theta_1}$, и при $\xi \to 0$ F_{ξ, θ_1} сходится к F_{θ_1}. В [7] постановка конкретизируется: предполагается, что $\theta^i = \vartheta(\theta_1, \eta_i, \xi)$, $i = 1, \ldots, n$, где $\eta_1, \ldots, \eta_n$ — независимые сл. в. с распределением F, а ξ — некоторый параметр, характеризующий влияние сл. возмущений η на параметр θ_1, напр., $\theta^i = \theta_1 + \eta_i \sqrt{\xi}$ или $\theta^i = \theta_1 \exp\{\eta_i \sqrt{\xi}\}$ (отметим, что именно в такой постановке рассмотрены задачи проверки однородности в [90, 6, 203, 205, 22, 223].

Безусловная плотность сл. в. $X_1, \ldots, X_n$ есть

$$p(x, \xi, \theta_1, \ldots, \theta_s) = \int g(x, \theta, \theta_2, \ldots, \theta_s)\, dF_{\xi, \theta_1}(\theta), \qquad (43)$$

и для проверки гипотезы $\xi = 0$ по повторной выборке $X_1, \ldots, X_n$ из распределения с плотностью (43) стандартным способом строятся $C(\alpha)$-критерии. Во многих случаях оказывается, что полученные критерии не зависят от вида распределения F (см., например, [7]), и это свойство названо в [90, 223] устойчивостью.

Критерии независимости в таблицах сопряженности признаков с использованием $C(\alpha)$-критериев строились в работах Рэя [246], Джонсона [156], Нагнура [207] (рассматриваются таблицы с тремя входами), Бхата и Калкарни [97], Берксона [95].

Критерии для обработки результатов рандомизированных экспериментов. По-видимому, в настоящее время самое большое применение теория $C(\alpha)$-критериев нашла при обработке результатов экспериментов по искусственному воздействию на облачность.

Этим вопросом долгое время занимался сам Нейман с группой сотрудников. Этой проблематике посвящена статья Ю. Ч. Неймана [47] на русском языке, статьи Неймана [216, 217, 219]; статьи Неймана и его сотрудников [188, 222—229]; см. также [124] (отметим, что этой теме посвящена бóльшая часть 5-го тома трудов 5-го Берклеевского симпозиума). Этой проблемой занималась и группа австралийских статистиков (см. работы Калкарни [165, 166, 169] и Морана [201, 202]).

Некоторые результаты о границах для функции мощности критериев, предлагавшихся в работах [47, 222] при выборках конечного объема, содержатся в работе [12].

Отдельные работы. В работе А. И. Пинского [57] рассмотрена следующая двухвыборочная задача: по двум выборкам $x^{(n_1)}=(x_1, \ldots, x_{n_1})$ и $y^{(n_2)}=(y_1, \ldots, y_{n_2})$ из распределений с плотностями $f_{n_1}^{(1)}(x^{(n_1)}, \mu_1)$ и $f_{n_2}^{(2)}(y^{(n_2)}, \mu_2)$, соответственно, проверяется гипотеза $\xi=\mu_1-\mu_2=0$ против альтернативы $\xi>0$. В качестве мешающего параметра можно, например, рассматривать $\theta=\mu_1+\mu_2$. В статье строится аналог асимптотически оптимального $C(\alpha)$-критерия. Близкая асимптотическая двухвыборочная задача (обобщение проблемы Беренса — Фишера) рассматривается в [238], где строится АП критерий, основанный на критерии Вилкоксона.

В работе Дэвида и Фергюсона [121] $C(\alpha)$-критерий используется для проверки независимости; проверка гипотез о независимости рассмотрена также в [196].

В статье [131] $C(\alpha)$-критерий используется для проверки гипотез о параметрах обобщенного пуассоновского распределения, в работе Морана [201] — для проверки гипотез о параметрах двумерного гамма-распределения. В работе [123] рассмотрена ситуация, когда мешающий параметр присутствует только при альтернативе; при этом иногда не удается применить стандартные методы $C(\alpha)$-критериев или ОП, и в [123] используется техника случайных процессов.

Работа Б. Р. Левина и А. И. Пинского [32] посвящена задачам классификации, в ней рассмотрен случай, когда обе обучающие выборки принадлежат одному параметрическому семейству, но отвечают разным значениям параметра. Рассматривается асимптотическая постановка, когда с ростом объема выборок обучающих и классифицируемой совокупностей эти параметры сближаются, «центр сближения» при этом неизвестен. В статье для различных понятий оптимальности строятся АП оптимальные критерии. Результаты основаны на асимптотическом подходе, связанном с понятием ЛАН. На эту тему см. также статьи [15—17].

Бивер в работе [94] использовал $C(\alpha)$-критерии в задаче парных сравнений. В статье Бхата и Калкарни [97] излагаются классические результаты Неймана и их применение для обработки результатов полиномиальных экспериментов. В работах [167, 168] $C(\alpha)$-критерии используются для сравнения эффектов k способов наблюдений.

БИБЛИОГРАФИЯ

1. *Баронкин В. М., Кушнир А. Ф., Пинский А. И.,* Асимптотическая проверка сложной гипотезы против нестационарной альтернативы. Тр. Сиб. физ.-техн. ин-та при Томск. ун-те, 1973, вып. 63, 111—130 (РЖМат, 1973, 9В176)
2. —, —, —, Асимптотически подобные критерии для проверки сложной гипотезы против нестационарной альтернативы. Пробл. передачи информ., 1974, *10*, № 4, 65—78 (РЖМат, 1975, 5В144)
3. *Барра Ж.-Р.,* Основные понятия математической статистики. М., Мир, 1974, 275 с. (РЖМат, 1975, 1В309К)
4. *Бернштейн А. В.,* О проверке сложных статистических гипотез при нарушениях условий регулярности. В сб. «VI Конф. по теории кодир. и передачи информ. Ч. 6, Доклады». Москва — Томск, 1975, 19—23 (РЖМат, 1976, 1В251)
5. —, Об асимптотически оптимальных критериях для проверки сложных гипотез в нестандартных условиях. Теория вероятностей и ее применения, 1976, *21*, № 1, 34—47 (РЖМат, 1976, 7В152)
6. —, Об асимптотически оптимальных $C(\alpha)$-критериях в нестандартных условиях. Теория вероятностей и ее применения, 1976, *21*, № 2, 457—458
7. —, Об асимптотически оптимальных критериях однородности. Теория вероятностей и ее применения, 1977, *22*, № 2, 387—392 (РЖМат, 1977, 11В146)
8. —, О полном классе асимптотически подобных критериев в многомерном случае. В сб. «VII Всес. конф. по теории кодир. и передачи информ. Ч. 1», Москва — Вильнюс, 1978, 29—32 (РЖМат, 1978, 9В168)
9. —, Обобщенные $C(a)$-критерии в многомерном случае. Теория вероятностей и ее применения, 1979, *24*, № 3, 654—655
10. *Большев Л. Н., Мирвалиев М.,* Критерий согласия хи-квадрат для пуассоновского, биномиального и отрицательного биномиального распределений. Теория вероятностей и ее применения, 1978, *23*, № 3, 481—494 (РЖМат, 1979, 1В192)
11. *Боровков А. А.,* Асимптотически оптимальные критерии для проверки сложных гипотез. Теория вероятностей и ее применения, 1975, *20*, № 3, 463—487 (РЖМат, 1976, 2В200)
12. *Воробьев Л. С., Журбенко И. Г.,* Оценки мощности $C(\alpha)$-критериев и их применение. Теория вероятностей и ее применения, 1979, *24*, № 2, 252—266 (РЖМат, 1979, 9В133)
13. *Гванцеладзе Л. Г.,* Об асимптотическом поведении мощности критериев типа хи-квадрат. Сакартвелос ССР Мецниеребата Академиис моамбе, Сообщ. АН ГрузССР, 1976, *81*, № 2, 285—288 (РЖМат, 1976, 8В159)
14. *Герлейн О. В., Пинкус Р.,* Критерии согласия, основанные на одной мере дивергенции между двумя скалярными произведениями. Теория вероятностей и ее применения, 1978, *23*, № 2, 263—274 (РЖМат, 1978, 12В241)
15. *Гольцов В. О., Левин Б. Р., Пинский А. И.,* Асимптотически оптимальные адаптивные алгоритмы классификации наблюдений. В сб. «VI Конф. по теории кодир. и передачи информ. Ч. 6. Доклады». Москва — Томск, 1975, 29—33 (РЖМат, 1976, 1В338)
16. —, —, —, Минимаксные алгоритмы классификации «близких образов». В сб. «Тр. IV Междун. Симп. по теории передачи информ.. Тезисы докладов. Ч. 1», 1976, М.-Л., 28—32
17. —, *Пинский А. И.,* Асимптотические оптимальные подобные правила классификации. Радиотехника и электроника, 1975, *20*, № 7, 1522—1526
18. *Джапаридзе К. О.,* О проверке сложных гипотез относительно локально асимптотически нормального семейства мер. Теория вероятностей и ее применения, 1976, *21*, № 2, 456—457

19. —, Критерии для проверки сложных гипотез о случайных величинах и процессах. Теория вероятностей и ее применения, 1977, *22*, № 1, 106—121 (РЖМат, 1977, 8В226)
20. —, *Никулин М. С.*, Об одном видоизменении стандартной статистики Пирсона. Теория вероятностей и ее применения, 1974, *19*, № 4, 886—888 (РЖМат, 1975, 4В179)
21. *Журбенко И. Г.*, О мощности критериев проверки сложных гипотез. Теория вероятностей и ее применения, 1976, *21*, № 1, 223—225
22. —, Оценка мощности критериев проверки сложных гипотез. Докл. АН СССР, 1976, *226*, № 6, 1253—1256 (РЖМат, 1976, 7В151)
23. *Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З.*, Асимптотическая теория оценивания. М., Наука, 1979, 527 с.
24. *Каган А. М.*, Новые классы семейств распределений, допускающих подобные зоны. Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1965, *79*, 11—16 (РЖМат, 1965, 10В73)
25. —, *Линник Ю. В.*, Один класс семейств распределений, допускающих подобные зоны. Вестн. Ленингр. ун-та, 1964, № 7, 16—18 (РЖМат, 1964, 12В107)
26. —, —, Один класс семейств, допускающих подобные зоны. Вестн. Ленингр. ун-та, 1964, № 13, 25—36
27. *Кендалл М., Стьюарт А.*, Статистические выводы и связи. М., Наука, 1973. 899 с. (РЖМат, 1974, 4В179К)
28. *Кокс Д., Хинкли Д.*, Теоретическая статистика. М., Мир, 1978, 560 с. (РЖМат, 1979, 2В176)
29. *Крамер Г.*, Математические методы в статистике. М., Мир, 1975, 648 стр.
30. *Кушнир А. Ф.*, Асимптотически оптимальные критерии для регрессионной задачи проверки гипотез. Теория вероятностей и ее применения, 1968, *13*, № 4, 682—700 (РЖМат, 1969, 5В122)
31. —, *Пинский А. И.*, Асимптотические оптимальные критерии для проверки гипотез при зависимой выборке наблюдений. Теория вероятностей и ее применения, 1971, *16*, № 2, 280—291 (РЖМат, 1971, 12В414)
32. *Левин Б. Р., Пинский А. И.*, О классификации случайных совокупностей. В сб. «Обучающиеся алгоритмы в системах управления и обработки информации», Новосибирск, Наука, 1978, 8—15 (РЖМат, 1979, 3В436)
33. *Леман Э.*, Проверка статистических гипотез. М., Наука, 1964, 498 стр. (РЖМат, 1964, 9В66К)
34. *Ли Хоанг Ту*, Приближенно-оптимальные свойства тестов Вальда и задача проверки статистических гипотез. Докл. АН СССР, 1969, *189*, № 2, 250—253 (РЖМат, 1970, 4В171)
35. —, Приближенно-оптимальные свойства тестов Вальда и задача проверки статистических гипотез. I. Вестн. Ленингр. ун-та, 1972, № 19, 33—40 (РЖМат, 1973, 3В168)
36. —, Приближенно-оптимальные свойства тестов Вальда и задача проверки статистических гипотез. II. Вестн. Ленингр. ун-та, 1973, № 1, 37—43 (РЖМат, 1973, 6В123)
37. *Лі Ші-Лінь*, Про один критерій згоди, аналогічний χ^2, при наявності емпірично визначених параметрів. Доповіді АН УРСР, 1963, № 2, 161—164 (РЖМат, 1964, 4В89)
38. —, Асимптотично найпотужніший критерій для перевірки складних гіпотез. Доповіді АН УРСР, 1963, № 5, 583—588 (РЖМат, 1964, 1В102)
39. —, Про асимптотичну потужність непараметричного критерію, аналогічного до статистики χ^2. Доповіді АН УРСР, 1963, № 7, 856—861 (РЖМат, 1964, 12В145)
40. —, Про один непараметричний критерій однорідності k виборок, аналогічний χ^2. Доповіді АН УРСР, 1964, № 1, 42—46 (РЖМат, 1964, 12В146)
41. *Линник Ю. В.*, К теории статистически подобных зон. Докл. АН СССР, 1962, *146*, № 2, 300—302 (РЖМат, 1964, 5В97)

42. —, Тесты, несмещенные оценки и котестовые идеалы. Докл. АН СССР, 1965, *161*, № 3, 520—522 (РЖМат, 1965, 8В54)
43. —, Статистические задачи с мешающими параметрами. М., Наука, 1966, 252 стр. (РЖМат, 1968, 4В102)
44. —, *Романовский И. В., Судаков В. Н.*, Нерандомизированный однородный тест в проблеме Беренса — Фишера. Докл. АН СССР, 1964, *155*, № 6, 1262—1264 (РЖМат, 1964, 10В60)
45. *Ляпунов А. А.*, О вполне аддитивных вектор-функциях. Изв. АН СССР, сер. мат., 1940, № 4, 467—478
46. *Мартынов Г. В.*, Критерии омега-квадрат. М., Наука, 1978, 80 с. (РЖМат, 1978, 11В198)
47. *Нейман Ю. Ч.*, Опыты, выясняющие возможность активного воздействия на осадки, и некоторые связанные с ними задачи математической статистики. Изв. АН Узб. ССР, сер. физ.-мат., 1974, *18*, № 1, 15—27
48. *Никулин М. С.*, О критериях хи-квадрат для непрерывных распределений. Теория вероятностей и ее применения, 1973, *18*, № 3, 675—676
49. —, Критерий хи-квадрат для непрерывных распределений с параметрами сдвига и масштаба. Теория вероятностей и ее применения, 1973, *18*, № 3, 583—592 (РЖМат, 1973, 12В172)
50. —, О квантильном критерии. Теория вероятностей и ее применения, 1974, *19*, № 2, 431—434 (РЖМат, 1974, 10В98)
51. —, *Юсас И. С.*, Замечание к работе Г. Чейза «Критерий хи-квадрат в случае, когда параметры оцениваются независимо от выборки». Лит. мат. сб., 1976, *14*, № 2, 221—222
52. —, —, О распределении статистики типа хи-квадрат, когда при вычислении оценки неизвестного параметра участвуют дополнительные наблюдения. Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР, 1977, *72*, 98—102, 221 (РЖМат, 1978, 1В201)
53. *Осидзе А. Г.*, О критерии согласия в случае зависимости спектральной плотности гауссовского процесса от неизвестных параметров. Сакартвелос ССР Мецниеребата Академиис моамбе, Сообщ. АН ГрузССР, 1974, *74*, № 2, 273—276 (РЖМат, 1974, 11В236)
54. —, О критерии χ^2 для проверки гипотезы относительно спектральной плотности гауссовского случайного процесса с неизвестными параметрами. Сакартвелос ССР Мецниеребата Академиис моамбе. Сообщ. АН ГрузССР, 1974, *75*, № 2, 273—276 (РЖМат, 1975, 4В226)
55. —, Об одной статистике для проверки сложной гипотезы относительно вида спектральной плотности стационарного гауссовского случайного процесса. Сакартвелос ССР Мецниеребата Академиис моамбе, Сообщ. АН ГрузССР, 1975, *77*, № 2, 313—316 (РЖМат, 1975, 9В147)
56. *Паламодов В. П.*, О проверке многомерной полиномиальной гипотезы. Докл. АН СССР, 1967, *172*, № 2, 291—293 (РЖМат, 1967, 6В75)
57. *Пинский А. И.*, Двухвыборочная задача проверки гипотез при больших размерах выборок. Пробл. передачи информ., 1976, *12*, № 3, 28—34 (РЖМат, 1977, 3В141)
58. *Рао С. Р.*, Линейные статистические методы и их применения. М., Наука, 1968, 548 стр. (РЖМат, 1969, 5В117К)
59. *Романовский И. В., Судаков В. Н.*, О существовании независимых разбиений. Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1965, *79*, 5—10 (РЖМат, 1966, 2В11)
60. *Русас Дж.*, Контигуальность вероятностных мер. Применения к статистике. М., Мир, 1975, 256 стр. (РЖМат, 1975, 8В172К)
61. *Тюрин Ю. Н.*, Проверка гипотезы о нормальности многомерной выборки большого объема. Теория вероятностей и ее применения, 1973, *18*, № 3, 651—655 (РЖМат, 1974, 2В221)
62. —, Линейная модель в многомерной непараметрической статистике. Уч. зап. по стат., 1974, *26*, 7—24 (РЖМат, 1975, 4В187)
63. *Уилкс С.*, Математическая статистика. М., Наука, 1967, 632 стр. (РЖМат, 1968, 5В111К)

64. *Хмаладзе Э. В.*, О применении критерия типа ω^2 для проверки параметрических гипотез. Теория вероятностей и ее применения, 1977, *22*, № 3, 644—645
65. —, Применение критериев типа ω^2 для проверки параметрических гипотез. Теория вероятностей и ее применения, 1979, *24*, № 2, 280—297
66. *Чибисов Д. М.*, О применении критерия ψ_h^2 Неймана к проверке сложных гипотез. Теория вероятностей и ее применения, 1962, *7*, № 3, 357—358
67. —, Теорема о допустимых критериях и ее применение к одной асимптотической задаче проверки гипотез. Теория вероятностей и ее применения, 1967, *12*, № 1, 96—111 (РЖМат, 1967, 12В123)
68. —, Некоторые критерии типа χ^2 для непрерывных распределений. В сб. «Сов.-Японск. симпозиум по теории вероятностей, 1969. [Ч. I]», Новосибирск, 1969, 306—314 (РЖМат, 1970, 6В160)
69. —, Некоторые критерии типа хи-квадрат для непрерывных распределений. Теория вероятностей и ее применения, 1971, *16*, № 1, 3—20 (РЖМат, 1971, 9В173)
70. —, Уточнение асимптотической нормальности для одного класса статистик. Теория вероятностей и ее применения, 1971, *14*, № 2, 397—399
71. —, Асимптотическое разложение для распределения некоторых статистик проверки сложных гипотез. Теория вероятностей и ее применения, 1972, *17*, № 3, 600—602
72. Асимптотическое разложение для распределения статистики, допускающей асимптотическое разложение. Теория вероятностей и ее применения, 1972, *17*, № 4, 658—668 (РЖМат, 1973, 3В150)
73. —, Асимптотическое разложение для одного класса оценок, включающего оценки максимального правдоподобия. Теория вероятностей и ее применения, 1973, *18*, № 2, 303—311 (РЖМат, 1973, 10В138)
74. *Шметтерер Л.*, Введение в математическую статистику. М., Наука, 1976. 520 стр. (РЖМат, 1976, 10В101К)
75. *Aitchison J.*, Large-sample restricted parametric tests. J. Roy. Statist. Soc., 1962, *B24*, № 1, 234—250 (РЖМат, 1964, 6В103)
76. —, *Silvey S. D.*, Maximum-likelihood estimation of parameters subject to restraints. Ann. Math. Statist., 1958, *29*, № 3, 813—828 (РЖМат, 1961, 5В31)
77. —, —, Maximum likelihood estimation procedures and associated tests of significance. J. Roy. Statist. Soc., 1960, *B22*, № 1, 154—171
78. *Andersen E. B.*, The asymptotic distribution of conditional likelihood ratio tests. J. Amer. Statist. Assoc., 1971, *66*, № 335, 630—633 (РЖМат, 1972, 5В113)
79. *Arató M.*, О подобных критериях и допустимых оценках стационарного гауссовского марковского процесса. Studia scient. Math. hung., 1968, *3*, № 1-3, 159—166 (РЖМат, 1969, 4В164)
80. *Bahadur R. R.*, An optimal property of the likelihood ratio statistic. Proc. 5th Berkeley Symp. Math. Statist. and Probab., 1965—1966. Vol. 1, Berkeley — Los Angeles, 1967, 13—26 (РЖМат, 1970, 1В151)
81. —, Rates of convergence of estimates and test statistics. Ann. Math. Statist., 1967, *38*, № 2, 303—324 (РЖМат, 1971, 8В176)
82. —, Some limit theorems in statistics. Philadelphia, SIAM, 1971
83. —, *Raghavachari M.*, Some asymptotic properties of likelihood ratios on general sample spaces. Proc. 6th Berkeley Symp. Math. Statist. and Probab., Univ. Calif., 1970. Vol. 1. Berkeley—Los Angeles, 1972, 129—152 (РЖМат, 1973, 2В131)
84. *Bartlett M. S.*, Properties of sufficiency and statistical tests. Proc. Roy. Soc., 1937, *A160*, 268—282
85. —, Approximate confidence intervals. II. More than one unknown parameter. Biometrika, 1953, *40*, part 3, 4, 306—317 (РЖМат, 1955, 5188)
86. —, Approximate confidence intervals. III. A bias correction. Biometrika, 1955, *42*, № 1-2, 201—204 (РЖМат, 1957, 1638)

87. *Barton D. E.*, On Neyman's smooth test of goodness of fit and its power with respect to a particular system of alternatives. Scand. aktuarietidskr., 1953, Häft. 1-2, 24—63 (РЖМат, 1955, 3321)
88. —, Neyman's ψ_k^2 test of goodness of fit when the null hypothesis is composite. Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 274—275 (РЖМат, 1957, 8810)
89. —, Neyman's ψ_k^2 tests of goodness of fit when the null hypothesis is composite. Scand. actuarietidskr., 1956, № 3-4, 216—245 (РЖМат, 1959, 7235)
90. *Bartoo J. B., Puri P. S.*, On optimal asymptotic tests of composite statistical hypotheses. Ann. Math. Statist., 1967, *38*, № 6, 1845—1852 (РЖМат, 1971, 8В217)
91. *Bartoszyński R., Klonecki W.*, Some throughts about the contribution of Jerzy Neyman to statistics. Proc. Symp. Honour Jerzy Neyman, Warszawa, 1974. Warszawa PWN, 1977, 9—15 (РЖМат, 1978, 4В111К)
92. *Basu D.*, On the elimination on the nuisance parameters. J. Amer. Statist. Assoc., 1977, *72*, № 358, 355—366 (РЖМат, 1978, 2В156)
93. —, On partial sufficiency: a review. J. Statist. Plann. and Inference, 1978, *2*, № 1, 1—13 (РЖМат, 1978, 9В128)
94. *Beaver R. J.*, Locally asymptotically most stringent tests for paired comparison experiments. J. Amer. Statist. Assoc., 1974, *69*, № 346, 423—427 (РЖМат, 1975, 3В184)
95. *Berkson J., Nagnur B. N.*, A note on the minimum χ^2 estimate and a LAMST χ^2 in the «no interaction» problem. J. Amer. Statist. Assoc., 1974, *69*, № 348, 1038—1040 (РЖМат, 1975, 10В154)
96. *Bhapkar V. P.*, A note on the equivalence of two test criteria for hypotheses in categorical data. J. Amer. Statist. Assoc., 1966, *61*, № 313, 228—235 (РЖМат, 1968, 1В125)
97. *Bhat B. R., Kulkarni S. R.*, LAMP tests of linear and loglinear hypotheses in multinomial experiments. J. Amer. Statist. Assoc., 1966, *61*, № 313, 236—245 (РЖМат, 1967, 4В93)
98. —, *Nagnur B. N.*, Locally asymptotically most stringent tests and Lagrangian multiplier tests of linear hypotheses. Biometrika, 1965, *52*, № 3-4, 459—468 (РЖМат, 1966, 9В79)
99. *Birch M. W.*, A new proof of the Pearson-Fisher theorem. Ann. Math. Statist., 1964, *35*, № 2, 817—824 (РЖМат, 1966, 2В72)
100. *Bofinger E.*, Goodness-of-fit test using sample quantiles. J. Roy. Statist. Soc., 1973, *B35*, № 2, 277—284 (РЖМат, 1974, 1В141)
101. *Bolshev L. N.*, Cluster analysis. Bull. Intern. Statist. Inst., 1969, *43*, 411—425
102. *Brown B. M., Hewitt J. I.*, Asymptotic likelihood theory for diffusion processes. J. Appl. Probab., 1975, *12*, № 2, 228—238 (РЖМат, 1976, 2В273)
103. *Brown L. D.*, Non-local asymptotic optimality of appropriate likelihood ratio tests. Ann. Math. Statist., 1971, *42*, № 4, 1206—1240 (РЖМат, 1972, 2В128)
104. *Bühler W. J., Fein H., Goldsmith D., Neyman J., Puri P. S.*, Locally optimal test for homogeneity with respect to very rate events. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1965, *54*, № 3, 673—680 (РЖМат, 1966, 11В84)
105. —, *Puri P. S.*, On optimal asymptotic tests of composite hypotheses with several constraints. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb., 1966, *5*, № 1, 71—88 (РЖМат, 1967, 10В88)
106. *Caussinus H.*, Sur certaines généralizations de l'emploi du test du χ^2. C. r. Acad. Sci., 1962, *154*, № 19, 3306—3308 (РЖМат, 1962, 12В51)
107. *Chanda K. C.*, On some simplification in the construction of similar regions. Calcutta Statist. Assoc. Bull., 1959, *8*, № 32, 159—161 (РЖМат, 1961, 10В94)
108. *Chant D. C.*, Some results in statistical inference. Bull. Austral. Math. Soc., 1974, *11*, № 1, 159—160

109. —, On asymptotic tests of composite hypotheses in nonstandard conditions. Biometrika, 1974, *61*, № 2, 291—298 (РЖМат, 1975, 12B203)
110. *Chase G. R.*, On the chi-square test when the parameters are estimated independently of the sample. J. Amer. Statist. Assoc., 1972, *67*, № 339, 609—611 (РЖМат, 1973, 3B170)
111. *Chernoff H.*, On the distribution of the likelihood ratio. Ann. Math. Statist., 1954, *25*, № 3, 573—578 (РЖМат, 1956, 8198)
112. —, Large-sample theory: parametric case. Ann. Math. Statist., 1956, *27*, № 1, 1—22 (РЖМат, 1958, 5950)
113. —, *Lehmann E. L.*, The use of maximum likelihood estimates in χ^2 tests for goodness of fit. Ann. Math. Statist., 1954, *25*, № 3, 579—586 (РЖМат, 1956, 8183)
114. *Chibisov D. M.*, On the normal approximation for a certain class of statistics. Proc. 6th Berkeley Symp. Math. Statist. and Probab., Univ. Calif., 1970. Vol. 1. Berkeley — Los Angeles, 1972, 153—174 (РЖМат, 1973, 1B167)
115. —, Asymptotic expansions for Neyman's $C(\alpha)$ tests. Lect. Notes Math., 1973, *330*, 16—45 (РЖМат, 1974, 1B138)
116. *Dahiya Ram C.*, *Gurland J.*, A test of fit for bivariate distributions. J. Roy. Statist. Soc., 1973, *B35*, № 3, 452—465 (РЖМат, 1974, 8B120)
117. —, —, Pearson chi-squared test of fit with random intervals. Biometrika, 1972, *59*, № 1, 147—153 (РЖМат, 1972, 8B158)
118. *Dantzig G.*, On the non existence of tests of «Student's» hypothesis having power function independent of σ. Ann. Math. Statist., 1940, *11*, № 2, 186—191
119. *Darroch J. N.*, *Silvey S. D.*, On testing more than one hypothesis. Ann. Math. Statist., 1963, *34*, № 2, 555—567 (РЖМат, 1964, 4B85)
120. *Davidson R. R.*, *Lewer W. E.*, The limiting distribution of the likelihood ratio statistic under a class of local alternatives. Sankhya, 1970, *A32*, № 2, 209—224 (РЖМат, 1971, 7B229)
121. *Davied T.*, *Ferguson N.*, Some tests for independence. Austral. J. Statist., 1974, *16*, № 1, 11—19
122. *Davies R. B.*, Asymptotic inference in stationary Gaussian time-series. Adv. Appl. Probab., 1973, *5*, № 3, 469—497 (РЖМат, 1974, 7B264)
123. —, Hypothesis testing when a nuisance parameter is present only under the alternative. Biometrika, 1977, *64*, № 2, 247—254 (РЖМат, 1978, 2B168)
124. —, *Puri P. S.*, Some technique of summary evalutions of several independent experiments. Proc. 5th Berkeley Symp. Math. Statist. and Probab., 1965—1966. Vol. 5, Berkely — Los Angeles, 1967, 385—388
125. *Durbin J.*, Weak convergence of the sample distribution function when parameters are estimated. Ann. Statist., 1973, *1*, № 2, 279—290 (РЖМат, 1973, 11B252)
126. —, Distribution theory for tests based on the sample distribution function. (Reg. Conf. Ser. Appl. Math., № 9.) Philadelphia, SIAM, 1973. 64 pp. (РЖМат, 1973, 6B133)
127. *Eaton M. L.*, A complete class theorem for multidimensional one-sided alternatives. Ann. Math. Statist., 1970, *41*, № 6, 1884—1888 (РЖМат, 1971, 12B319)
128. —, Complete class theorems derived from conditional complete class theorems. Ann. Statist., 1978, *6*, № 4, 820—827 (РЖМат, 1979, 2B179)
129. *Eisenhart G.*, The power function of the χ^2-test. Bull. Amer. Math. Soc., 1938, *44*, № 2, 32
130. *Fabian V.*, A modified maximum likelihood test. Metrika, 1977, *24*, № 2, 107—112 (РЖМат, 1977, 11B144)
131. *Fazal S.*, A test for a generalised Poisson distribution. Biometr. J., 1977, *19*, № 4, 245—251 (РЖМат, 1978, 3B119)
132. *Feder P. I.*, On the distribution of the log likelihood ratio test statistic when the true parameter is «near» the boundaries of the hypothesis re-

gions. Ann. Math. Statist., 1968, *39*, № 6, 2044—2055 (РЖМат, 1971, 7B253)
133. *Fisher R. A.*, On the interpretation of χ^2 from contingency tables and calculation of *P*. J. Roy. Statist. Soc., 1922, *85*, 87—94
134. —, The conditions under which χ^2 measures the discrepancy between observation and hypothesis. J. Roy. Statist. Soc., 1924, *87*, 442—450
135. *Fix E., Hodges J. L., Lehmann E. L.*, The restricted chi-squared test. Probability and statistics. Stockholm, Almqvist and Wiksell; New York, John Wiley and Sons, 1959, 92—107 (РЖМат, 1962, 1B70)
136. *Foutz R. V.*, On the consistency of locally asymptotically most stringent tests. Can. J. Statist., 1976, *4*, № 2, 211—219 (РЖМат, 1977, 12B180)
137. *Fraser D. A. S.*, Sufficient statistics with nuisance parameters. Ann. Math. Statist., 1956, *27*, № 3, 838—842 (РЖМат, 1957, 8805)
138. *Giri N. C.*, On a multivariate testing problem. Calcutta Statist. Assoc. Bull., 1962, *11*, № 41-42, 55—60 (РЖМат, 1962, 12B52)
139. —, On the likelihood ratio test of a normal multivariate testing problem. Ann. Math. Statist., 1964, *35*, № 1, 181—189 (РЖМат, 1965, 4B72)
140. —, On the likelihood ratio test of a normal multivariate testing problem. II. Ann. Math. Statist., 1965, *36*, № 3, 1061—1065 (РЖМат, 1966, 1B123)
141. *Gupta A. K.*, Distribution of Wilks' likelihood ratio criterion in the complex case. Ann. Inst. Statist. Math., 1971, *23*, № 1, 77—87 (РЖМат, 1971, 11B182)
142. *Hájek J.*, Asymptotically most powerful rank-order tests. Ann. Math. Statist., 1962, *33*, № 3, 1124—1147 (РЖМат, 1964, 1B137)
143. —, A characterization of limiting distributions of regular estimates. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb., 1970, *14*, № 4, 323—330 (РЖМат, 1970, 9B116)
144. —, Local asymptotic minimax and admissibility in estimation. Proc. 6th Berkeley Symp. Math. Statist. and Probab., Univ. Calif., 1970, Vol. 1. Berkeley—Los Angeles, 1972, 175—194 (РЖМат, 1973, 1B189)
145. *Hall I. J., Kudo Akio, Yeh Neng-che,* On slippage tests. II. Similar slippage tests. Ann. Math. Statist., 1968, *39*, № 6, 2029—2037 (РЖМат, 1971, 8B225)
146. *Hayakawa Takesi,* The likelihood ratio criterion for a composite hypothesis under a local alternative. Biometrika, 1975, *62*, № 2, 451—460 (РЖМат, 1976, 1B229)
147. —, The likelihood ratio criterion and the asymptotic expansion of its distribution. Ann. Inst. Statist. Math., 1977, *29*, № 3, 359—378 (РЖМат, 1978, 12B237)
148. *Hogg R. V.*, On the distribution of the likelihood ratio. Ann. Math. Statist., 1956, *27*, № 2, 529—532 (РЖМат, 1957, 5767)
149. —, On the resolution of statistical hypotheses. J. Amer. Statist. Assoc., 1961, *56*, № 296, 978—989 (РЖМат, 1962, 7B46)
150. —, *Craig A. T.*, Sufficient statistics in elementary distribution theory. Sankhya, 1956, *17*, № 3, 209—216 (РЖМат, 1958, 3105)
151. *Hotelling H.*, The selection of variates for use in prediction with some comments on the general problem of nuisance parameters. Ann. Math. Statist., 1940, *11*, № 3, 271—283
152. *Hsuan A., Robson D. S.*, The χ^2 goodness-of-fit tests with moment type estimators. Communs Statist., 1976, *A5*, № 15, 1509—1519
153. *Jaiswal M. C., Khatri C. G.*, Power function of the likelihood ratio test when range depends upon the parameter. Ann. Inst. Statist. Math., 1969, *21*, № 1, 127—136 (РЖМат, 1969, 10B93)
154. —, —, On certain tests and monotonicity of their power for the parameters involved in the nonregular density functions. Ann. Inst. Statist. Math., 1971, *23*, № 2, 199—210 (РЖМат, 1972, 2B131)
155. *James B. R.*, On Pitman efficiency of some tests of scale for the gamma distribution. Proc. 5th Berkeley Symp. Math. Statist. and Probab., 1965—1966. Vol. 5, Berkeley — Los Angeles, 1967, 389—393

156. *Johnson N. S.,* C_α-method for testing for significance in the $r \times c$ contingency table. J. Amer. Statist. Assoc., 1975, *70*, № 352, 942—947 (РЖМат, 1976, 9В169)
157. *Kagan A. M.,* On a measure of divergency between two scalar products and its statistical application. Sankhya, 1975, *A37*, № 4, 492—501 (РЖМат, 1978, 2В167)
158. *Kalish G., Mikulski P. W.,* The asymptotic behavior of a Smirnov test compared to standard «optimal procedures». Ann. Math. Statist., 1971, *42*, № 5, 1742—1747 (РЖМат, 1972, 5В121)
159. *Kamimura Hideki, Okuma Akimichi,* On the asymptotically most powerful test for a model with nuisance parameter. Tamkang J. Math., 1974, *5*, № 2, 247—256 (РЖМат, 1976, 8В157)
160. *Kambhampati C.,* A chi-square statistic for goodness of fit tests. Thesis Cornell. Univ., 1971
161. *Khatri C. G., Jaiswell M. S.,* On testing the equality of parameters in *k* triangular populations with unequal observations. Ann. Inst. Statist. Math., 1969, *21*, № 1, 137—148 (РЖМат, 1969, 10В98)
162. —, —, Testing the equality of parameters in the distributions when the range depends upon the parameter. Austral. J. Statist., 1969, *11*, № 2, 79—84 (РЖМат, 1970, 2В176)
163. *Klonecki W.,* A note on optimal $C(\alpha)$-tests for homogeneity of the Poisson distribution. Zast. mat., 1973, *13*, № 4, 497—505 (РЖМат, 1974, 2В214)
164. —, Optimal $C(\alpha)$-tests for homogeneity. Proc. Symp. Honour Jerzy Neyman, Warszawa, 1974. Warszawa, PWN, 1977, 161—175 (РЖМат, 1978, 6В160)
165. *Kulkarni S. R.,* On the optimal asymptotic tests for the effects of cloud seeding on rainfall. (1). The case of fixed effects. Austral. J. Statist., 1968, *10*, № 3, 105—115
166. —, On the optimal asymptotic tests for the effects of cloud seeding on rainfall. (2). The case of variable effects. Austral. J. Statist., 1969, *11*, № 1, 39—51 (РЖМат, 1970, 2В190)
167. —, Locally asymptotically most powerful tests about the effects of *k* treatments. Ann. Inst. Statist. Math., 1970, *22*, № 1, 145—158 (РЖМат, 1971, 2В136)
168. —, Locally asymptotically most powerful tests about the effects of *k* treatments. A comment. Ann. Inst. Statist. Math., 1970, *22*, № 2, 399 (РЖМат, 1971, 4В158)
169. —, On tests of hypotheses about treatment effects and treatment *x* places interactions in two heteroscedastic experiments. Ann. Inst. Statist. Math., 1973, *25*, № 1, 187—203 (РЖМат, 1973, 12В231)
170. *Lancaster H. O.* Forerunners of the Pearson χ^2. Austral. J. Statist., 1966, *8*, № 3, 117—126 (РЖМат, 1967, 9В76)
171. —, The chi-squared distribution. New York — London — Sydney — Toronto, John Wiley and Sons, 1969, xvi, 356 pp. (РЖМат, 1970, 4В120К)
172. *Le Cam L.,* On some asymptotic properties of the maximum likelihood estimates and related Bayes' estimates. Univ. Calif. Publs Statist., 1953, *1*, № 11, 277—329 (РЖМат, 1956, 641)
173. —, On the asymptotic theory of estimation and testing hypotheses. Proc. 3rd Berkeley Symp. Math. Statist. and Probab. Vol. 1, Berkeley — Los Angeles, 1956, 129—156 (РЖМат, 1959, 6075)
174. —, Locally asymptotically normal families of distributions. Certain approximations to families of distributions and their use in the theory of estimation and testing hypotheses. Univ. Calif. Publs Statist., 1960, *3*, № 2, 37—98 (РЖМат, 1961, 11В50)
175. —, Likelihood functions for large numbers of independent observations. Res. papers statist., London — New York—Sydney, John Wiley and Sons, 1966, 167—187 (РЖМат, 1966, 12В80)
176. —, On the assumptions used to prove asymptotic normality of maximum likelihood estimates. Ann. Math. Statist., 1970, *41*, № 3, 802—828 (РЖМат, 1971, 11В203)

177. —, Theorie asymptotique de la decision statistique. Monréal, 1970
178. —, Notes on asymptotic methods in statistical decision theory. Monréal, 1974
179. *Ledwina T.*, Admissible tests for exponential families with finite support. Math. Operationsforsch. und Statist., 1978, *9*, № 1, 105—118 (РЖМат, 1979, 1B233)
180. *Lehmann E. L.*, On optimal tests of composite hypotheses with one constraint. Ann. Math. Statist., 1947, *18*, № 4, 473—494
181. —, Significance level and power. Ann. Math. Statist., 1958, *29*, № 4, 1167—1176 (РЖМат, 1961, 10B92)
182. —, *Scheffé H.*, Completeness, similar regions and unbiased estimation, Sankhya, 1950, *10*, 305—340
183. —, —, Completeness, similar regions and unbiased estimation. Sankhya, 1955, *15*, № 3, 219—236 (РЖМат, 1959, 4970)
184. —, *Stein C.*, Most powerful tests of composite hypotheses. I. Normal distributions. Ann. Math. Statist., *1948*, *19*, № 4, 495—516
185. *Linnik Yu. V.*, Sur certaines questions de statistique analytique. Ann. Fac. Sci. Univ. Clermont. Math., 1962, № 8, 53—61 (РЖМат, 1965, 12B77)
186. —, Leçons sur les problèmes de statistique analytique. Paris, Gauthier-Villars, 1967, 119 p. (РЖМат, 1968, 8B89K)
187. —, On the elimination of nuisance parameters in statistical problems. Proc. 5th Berkeley Sympos. Math. Statist. and Probab., 1965—1966. Vol. 1. Berkeley—Los Angeles, 1967, 267—280 (РЖМат, 1969, 12B117)
188. *Lovasich J. L.,Neyman J., Scott E. L., Wells M. A.*, Statistical aspects of rain simulation-problems and prospects. Rev. Intern. Statist. Inst., 1970, *38*, № 2, 155—170
189. *Matthes T. K., Truax D. R.*, Tests of composite hypotheses for the multivariate exponential family. Ann. Math. Statist., 1967, *38*, № 3, 681—697 (РЖМат, 1971, 8B213)
190. *Matthieu J.-R.*, Une propriété des tests par les multiplicateurs de Lagrange. C. r. Acad. sci., 1971, *272*, № 10, A683—A686 (РЖМат, 1971, 11B229)
191. *McDonald R. P., Krane W. R.*, A note on local identifiability and degrees of freedom in the asymptotic likelihood ratio test. Brit. J. Math. and Statist. Psychol., 1977, *30*, № 2, 198—203 (РЖМат, 1978, 6B204)
192. *Michel R., Pfanzagl J.*, Asymptotic normality. Metrika, 1970, *16*, № 2-3, 188—205 (РЖМат, 1971, 11B166)
193. *Mikulski P. W.*, Some problems in the asymptotic theory of testing statistical hypotheses (efficiency of nonparametric procedures). Ph. D. Thesis, Univ. of California, Graduate Division, Northern Section, 1961
194. —, On the efficiency of optimal nonparametric procedures in the two sample case. Ann. Math. Statist., 1963, *34*, № 1, 22—32 (РЖМат, 1964, 4B113)
195. *Mitra Sujit Kumar*, On the limiting power function of the frequency chi-square test. Ann. Math. Statist., 1958, *29*, № 4, 1221—1233 (РЖМат, 1961, 8B72)
196. *Mohamad Salahuddin Ahmed*, On a locally most powerful boundary randomized similar test for the independence of two Poisson variables. Ann. Math. Statist., 1961, *32*, № 3, 809—827 (РЖМат, 1962, 5B43)
197. *Molinari Luciano*, Distribution of the chi-squared test in nonstandard situation. Biometrika, 1977, *64*, № 1, 115—121 (РЖМат, 1977, 9B149)
198. *Moore D. S.*, A chi-square statistic with random cell boundaries. Ann. Math. Statist., 1971, *42*, № 1, 147—156 (РЖМат, 1972, 1B223)
199. —, Generalized inverses, Wald's method, and the construction of chi-squared tests of fit. J. Amer. Statist. Assoc., 1977, *72*, № 357, 131—137 (РЖМат, 1977, 12B182)
200. —, *Spruill M. C.*, Unified large-sample theory of general chi-squared statistics for tests of fit. Ann Statist., 1975, *3*, № 3, 599—616 (РЖМат, 1976, 3B259)
201. *Moran P. A. P.*, Statistical inference with bivariate gamma distributions. Biometrika, 1969, *56*, № 3, 627—634 (РЖМат, 1970, 7B118)

202. —, Methodology of rain-making experiments. Rev. Inst. Intern. Statist., 1970, *38*, № 1, 105—119
203. —, On asymptotically optimal tests of composite hypotheses. Biometrika, 1970, *57*, № 1, 47—55 (РЖМат, 1970, 9В149)
204. —, Maximum-likelihood estimation in non-standard conditions. Proc. Cambridge Phil. Soc., 1971, *70*, № 3, 441—450 (РЖМат, 1972, 4В121)
205. —, Asymptotic properties of homogeneity tests. Biometrika, 1973, *60*, № 1, 79—85 (РЖМат, 1973, 9В80)
206. *Murthy V. K., Gafarian A. V.,* Limiting distributions of some variations of the chi-square statistic. Ann. Math. Statist., 1970, *41*, № 1, 188—194 (РЖМат, 1971, 10В193)
207. *Nagnur B. N.,* LAMST and the hypotheses of no three factor interaction in contingency tables. J. Amer. Statist. Assoc., 1969, *64*, № 325, 207—215 (РЖМат, 1970, 3В175)
208. *Neyman J.,* Sur la verification des hypotheses statistiques composees. Bull. Soc. Math. de France, 1935, *63*, 346—366
209. —, Su une theorema concernehte le cossidette statistiche sufficiency. Giornale dell' Instituto Italiano degli Attuari, 1935, *6*, 320—334
210. —, Outline of a theory of statistical estimation based on the classical theory of probability. Phil. Trans. Roy. Soc., London, 1937, *A236*, 333—380
211. —, «Smooth test» for goodness of fit. Scand. aktuarietidskr, 1937, *20*, 149—199
212. —, On a statistical problem in routine analyses and in sampling inspectious of mass production. Ann. Math. Statist. 1941, *12*, № 1, 46—76
213. —, Contribution to the theory of χ^2 test. Proc. Berkeley Symp. Math. Statist. and Probab., 1945—1946. Vol. 1, Berkeley — Los Angeles, 1949, 239—273
214. —, Sur une famille de tests asymptotiques des hypothèses statistiques composées. Trab. Estadist., 1954, *5*, 161—168 (РЖМат, 1958, 3110)
215. —, Optimal asymptotic tests of composite statistical hypotheses. Probability and statistics. Stockholm, Almqvist and Wiksell, New York, John Wiley and Sons, 1959, 213—234 (РЖМат, 1962, 2В75)
216. —, Discussion of Hoffding's paper «Asymptotically optimal tests for multinomial distribution». Ann. Math. Statist., 1965, *36*, № 2, 401—405
217. —, Experimentation with weather control. J. Roy Statist. Soc., 1967, *A130*, № 3, 285—326
218. —, The symmetric test of a composite hypotheses. J. Amer. Statist. Assoc., 1969, *64*, № 328, 1154—1171 (РЖМат, 1970, 11В127)
219. —, $C(\alpha)$-tests and their use. Adv. Inst. Stat. Ecology in the USA., Pensulvania Univ., 1972
220. —, *Pearson E. S.,* On the use and interpretation of certain test criteria for purposes of statistical inference. Biometrika, 1928, *20A*, part I, 175—240; part II, 263—294
221. —, —, On the problem of most efficient tests of statistical hypotheses. Phil. Trans. Roy. Soc., London, 1933, *A231*, 289—337
222. —, *Scott E. L.,* Asymptotically optimal tests of composite hypotheses for randomized experiments with noncontrolled predictor variables. J. Amer. Statist. Assoc., 1965, *60*, № 311, 699—721 (РЖМат, 1968, 1В121)
223. —, —, On the use of $C(\alpha)$ optimal tests of composite hypotheses. Bull. Internat. Statist. Inst., 1965, *41*, № 1, 476—497 (РЖМат, 1968, 12В172)
224. —, —, Planning and experiment with cloud seeding. Proc. 5th Berkely Symp. Math. Statist. and Probab., 1965—1966. Vol. 5, Berkeley — Los Angeles, 1967, 327—350
225. —, —, Some outstanding problems relating to rain modification. Proc. 5th Berkeley Symp. Math. Statist. and Probab., 1965—1966. Vol. 5, Berkeley — Los Angeles, 1967, 293—326

226. —, —, Note on techniques of evalution of single rain stimulation experiments. Proc. 5th Berkeley Symp. Math. Statist. and Probab., 1965—1966. Vol. 5, Berkeley — Los Angeles, 1967, 371—384
227. —, —, Asymptotically optimal tests of composite hypotheses for randomized experiments with noncontrolled predictor variables. Stud. Math. Statist., Budapest, Akad. kiadó, 1968, 89—99 (РЖМат, 1968, 11В136)
228. —, —, *Vasilevskis M.*, Statistical evalution of the Santa-Barbara randomized cloud-seeding experiments. Bull. Amer. Math. Soc., 1960, *41*, 531—547
229. —, —, *Wells M. A.*, Statistics in meteorology. Rev. Intern. Statist. Inst., 1969, *37*, № 2, 119—147
230. *Nölle G.*, Zur Theoric der begingten Tests. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb., 1969, *11*, № 3, 208—229 (РЖМат, 1969, 7В86)
231. *Pearson K.*, On a criterion that a given system of deviations from the probable in the case of a correlated system of variables is such that it can be reasonably supposed to have arisen in random sampling. Phil. Mag. Ser., 1900, *5*, № 50, 157—172
232. *Peers H. W.*, Likelihood ratio and associated test criteria. Biometrika, 1971, *58*, № 3, 577—587 (РЖМат, 1972, 4В136)
233. *Perlman M. D.*, Multivariate one-sided testing problems involving Fisher's discriminant function. Sankhya, 1971, *A33*, № 1, 19—34 (РЖМат, 1972, 5В115)
234. —, One-sided testing problems in multivariate analysis. Ann. Math. Statist., 1969, *40*, № 2, 549—567 (РЖМат, 1971, 7В236)
235. *Pfanzagl J.*, Asymptotically optimum estimation and test procedures. Proc. Prague Symp. Asymptotic Statist., 1973. Vol. 1. Prague, Charles Univ., 1974, 201—272 (РЖМат, 1976, 4В178)
236. —, *Wefelmeyer W.*, An asymptotically complete class of tests. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb., 1978, *45*, № 1, 49—72 (РЖМат, 1979, 5В180)
237. *Philippou A. N.*, *Roussas G. G.*, Asymptotic distribution of the likelihood function in the independent not identically distributed case. Ann. Statist., 1973, *1*, № 3, 454—471 (РЖМат, 1974, 2В170)
238. *Potthoff R. F.*, Use of the Wilcoxon statistic for a generalized Behrens-Fisher problem. Ann. Math. Statist., 1963, *34*, № 4, 1596—1599 (РЖМат, 1965, 1В103)
239. *Rao C. Radhakrishna*, Large sample tests of statistical hypotheses concerning several parameters with applications to problem of estimation. Proc. Cambridge Phil. Soc., 1948, *44*, № 1, 50—57
240. —, A study of large sample test criteria through properties of efficient estimates. Part I. Tests for goodness of fit and contingency tables. Sankhya, 1961, *A23*, № 1, 25—40 (РЖМат, 1964, 11В78)
241. *Rao K. C.*, *Robson D. S.*, A chi-square statistics for goodness of fit tests within the exponential family. Communs Statist., 1974, *A3*, № 12, 1139—1154
242. *Raoult J.-P.*, Propriétés asymptotiques locales des tests. Ann. Inst. H. Poincaré, 1970, *B6*, № 1, 61—113 (РЖМат, 1970, 8В118)
243. *Ray R. M.*, Studies of symmetric $C(\alpha)$-tests. Ph. D. Dissertation, Univ. of California, Berkeley, 1972
244. —, Note on consistency of $C(\alpha)$ tests. Paper presented at the 140th meeting (Central Regional) of the Institute of Math. Statistics, Lowa City, 1973
245. —, Maxmin $C(\alpha)$-tests against two-sided alternatives. Ann. Statist., 1974, *2*, № 6, 1175—1188 (РЖМат, 1975, 6В167)
246. —, A new $C(\alpha)$-tests for 2×2 tables. Communs Statist., 1976. *A5*, № 6, 545—563 (РЖМат, 1977, 12В220)
247. *Roussas G. G.*, Asymptotic inference in Markov processes. Ann. Math. Statist., 1965, *336*, № 3, 978—992
248. —, Some applications of the asymptotic distribution of likelihood functions to the asymptotic efficiency of estimates. Z. Wahrscheinlichkeitstheor.

und verw. Geb., 1968, *10*, № 3, 252—260 (РЖМат, 1969, 4В102)
249. —, *Soms A.*, On the exponential approximation of a family of probability measures and a representation theorem of Hájek-Inagaki. Ann. Inst. Statist. Math., 1973, *25*, № 1, 27—39 (РЖМат, 1973, 12В149)
250. *Roy A. R.*, On χ^2-statistics with variable intervals. Tehn. Rep., Stanford Univ., Statist. Dept., 1956
251. *Roy K. P.*, A note on the asymptotic distribution of likelihood ratio. Calcutta Statist. Assoc. Bull., 1957, *7*, № 26, 73—77 (РЖМат, 1958, 10081)
252. *Scheffé H.*, On the theory of testing composite hypotheses with one constraint. Ann. Math. Statist., 1942, *13*, № 3, 280—293
253. *Seber G. A. F.*, The linear hypothesis and large sample theory. Ann. Math. Statist., 1964, *35*, № 2, 773—779 (РЖМат, 1966, 2В84)
254. *Silvey S. D.*, The Lagrangian multiplier test. Ann. Math. Statist., 1959, *30*, № 2, 389—407 (РЖМат, 1960, 9280)
255. *Singh A. C., Zhurbenko I. G.*, The power of the optimal asymptotic tests of composite statistical hypotheses. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1975, *72*, № 2, 577—580 (РЖМат, 1975, 8В91)
256. *Spjøtvoll E.*, Most powerful tests for some nonexponential families. Ann. Math. Statist., 1968, *39*, № 3, 772—784 (РЖМат, 1971, 8В219)
257. *Stein C. M.*, The admissibility of Hotelling's T^2-test. Ann. Math. Statist., 1956, *27*, № 3, 616—623 (РЖМат, 1957, 8804)
258. *Stroud T. W. F.*, On obtaining large-sample tests from asymptotically normal estimators. Ann. Math. Statist., 1971, *42*, № 4, 1412—1424 (РЖМат, 1972, 1В235)
259. —, Fixed alternatives and Wald's formulation of the noncentral asymptotic behavior of the likelihood ratio statistic. Ann. Math. Statist., 1972, *43*, № 2, 447—454 (РЖМат, 1972, 11В95)
260. —, Noncentral convergence of Wald's large-sample test statistic in exponential families. Ann. Statist., 1973, *1*, № 1, 161—165 (РЖМат, 1973, 10В141)
261. *Sverdrup E.*, Similarity, unbiassedness, minimaxibility and admissibility of statistical test procedures. Scand. aktuarietidskr., 1953, Häft. 1-2, 64—86 (РЖМат, 1957, 687)
262. *Wald A.*, Tests of statistical hypotheses concerning several parameters when the number of observations is large. Trans. Amer. Math. Soc., 1943, *54*, № 3, 426—482
263. —, *Wolfowitz J.*, On a test whether two samples are from the same population. Ann. Math. Statist., 1940, *11*, № 2, 147—162
264. *Watson G. S.*, Sufficient statistics, similar regions and distribution-free tests. J. Roy. Statist. Soc., 1957, *B19*, № 2, 262—267 (РЖМат, 1959, 2952)
265. —, On chi-square goodness-of-fit tests for continuous distributions. J. Roy. Statist. Soc., 1958, *B20*, № 1, 44—61 (РЖМат, 1960, 5612)
266. —, Some recent results in chi-square goodness-of-fit tests. Biometrics, 1959, *15*, № 3, 440—468 (РЖМат, 1963, 4В147)
267. *Weiss L.*, The asymptotic distribution of the likelihood ratio in some nonstandard cases. J. Amer. Statist. Assoc., 1975, *70*, № 349, 204—208 (РЖМат, 1976, 3В215)
268. —, *Wolfowitz J.*, Asymptotically minimax tests of composite hypotheses. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb., 1969, *14*, № 2, 161—168 (РЖМат, 1970, 8В117)
269. *Wijsman R. A.*, Incomplete sufficient statistics and similar tests. Ann. Math. Statist., 1958, *29*, № 4, 1028—1045 (РЖМат, 1961, 10В66)
270. *Wilks S. S.*, The large-sample distribution of the likelihood ratio for testing composite hypothesis. Ann. Math. Statist., 1938, *9*, № 1, 60—62
271. *Witting H.*, Über einen χ^2 Test, dessen Klassen durch geordnete Stichprobenfunktionen festgelegt werden. Arch. Math., 1959, *10*, № 6, 468—479 (РЖМат, 1963, 7В174)