V. S. Rykhlov, On multiple completeness of the root functions for a class of the pencils of differential operators, *Izv. Saratov Univ. Math. Mech. Inform.*, 2010, Volume 10, Issue 2, 24–34

DOI: 10.18500/1816-9791-2010-10-2-24-34

УДК 517.927.25

О КРАТНОЙ ПОЛНОТЕ КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ ОДНОГО КЛАССА ПУЧКОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В.С. Рыхлов

Саратовский государственный университет,
кафедра дифференциальных уравнений и прикладной математики
E-mail: RykhlovVS@info.sgu.ru

В пространстве $L_2[0,1]$ рассматривается полиномиальный пучок обыкновенных дифференциальных операторов n-го порядка, порожденный однородным дифференциальным выражением с постоянными коэффициентами и двухточечными краевыми условиями специальной структуры с l условиями только в нуле $(1 \le l \le n-1)$. Предполагается, что корни характеристического уравнения лежат на одном луче, исходящем из начала координат. Найдено достаточное условие m-кратной полноты системы корневых функций при $m \le n-l$ в пространстве $L_2[0,1]$. Показана точность полученного результата.

Ключевые слова: пучок обыкновенных дифференциальных операторов, двухточечные краевые условия, однородное дифференциальное выражение с постоянными коэффициентами, кратная полнота системы корневых функций, кратная полнота системы собственных и присоединенных функций.

On Multiple Completeness of the Root Functions for a Class of the Pencils of Differential Operators

V.S. Rykhlov

Saratov State University,
Chair of Differential Equations and Applied Mathematics
E-mail: RykhlovVS@info.sgu.ru

A polinomial pencil of ordinary differential operators of n-th order generated by a homogeneous differential expression with constant coefficients and by two-point boundary conditions of a special structure with l conditions in zero only $(1 \le l \le n-1)$ is considered in the space $L_2[0,1]$. The case is studied, when the roots of the characteristic equation lie on a ray coming from the origin. A sufficient condition of m-fold completeness of the system of root functions for $m \le n-l$ in the space $L_2[0,1]$ is found. An accuracy of obtained result is shown.

Key words: pencil of ordinary differential operators, two-point boundary conditions, homogeneous differential expression with constant coefficients, multiple completeness of system of root functions, multiple completeness of system of eigen- and associated functions.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ, ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА И ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТА

В пространстве $L_2[0,1]$ рассмотрим пучок обыкновенных дифференциальных операторов $L(\lambda)$, порожденный на конечном интервале $[0,1]$ дифференциальным выражением

$$\ell(y,\lambda) := p_0(x,\lambda)y^{(n)} + p_1(x,\lambda)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x,\lambda)y \equiv \sum_{0\le s+k\le n} p_{sk}(x)\lambda^s y^{(k)} \tag{1}$$

и линейно независимыми двухточечными краевыми условиями

$$U_j(y,\lambda) := \sum_{k=0}^{n-1} a_{jk}(\lambda)y^{(k)}(0) + b_{jk}(\lambda)y^{(k)}(1) = 0, \qquad j=\overline{1,n}, \tag{2}$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$ — спектральный параметр, $p_{n-k}(x,\lambda) = \sum_{s=0}^{n-k} p_{sk}(x)\lambda^s$, $p_{sk}(x) \in L_1[0,1]$, а $a_{jk}(\lambda), b_{jk}(\lambda)$ — произвольные полиномы по λ.

Наряду с краевыми условиями (2) будут рассматриваться следующие краевые условия:

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_{jk}y^{(k)}(0) + b_{jk}y^{(k)}(1) = 0, \qquad j=\overline{1,n}, \tag{3}$$

не содержащие параметра λ.

При изучении спектральных свойств несамосопряженного пучка $L(\lambda)$ одной из основных задач является задача исследования свойств его корневых (собственных и присоединенных) функций. Весьма важными являются вопросы о возможности разложения функций в биортогональные ряды Фурье по корневым функциям, в частности, вопросы полноты корневых функций в $L_2[0,1]$. Напомним некоторые определения из [1–2].

Определение 1. Число λ_0 называется *собственным значением (с.з.)* пучка $L(\lambda)$, если существует функция $y_0(x) \not\equiv 0$ в области определения $L(\lambda)$ такая, что $L(\lambda_0)y_0 = 0$. Функция $y_0(x)$ называется *собственной функцией (с.ф.)* пучка $L(\lambda)$, соответствующей с.з. λ. $\square$

Определение 2. Пусть λ_0 есть с.з. пучка $L(\lambda)$, а $y_{00}(x)$ — соответствующая с.ф.. Система функций $y_{01}(x), y_{02}(x), \dots, y_{0l}(x)$ называется *системой функций, присоединенных к с.ф.* $y_{00}(x)$, если эти функции являются решениями следующих задач:

$$L(\lambda_0)y_{0q} + \frac{1}{1!}\frac{\partial L(\lambda_0)}{\partial \lambda}y_{0q-1} + \ldots + \frac{1}{q!}\frac{\partial^q L(\lambda_0)}{\partial \lambda^q}y_{00} = 0, \qquad q = 0, 1, \ldots, l.$$

Здесь $\frac{\partial^k L(\lambda_0)}{\partial \lambda^k} \left(:= \frac{\partial^k L(\lambda)}{\partial \lambda^k}\,|_{\lambda=\lambda_0}\right)$ обозначает пучок, порожденный дифференциальным выражением $\frac{\partial^k \ell(y,\lambda_0)}{\partial \lambda^k}$ и краевыми условиями $\frac{\partial^k U_j(y,\lambda_0)}{\partial \lambda^k} = 0$, $j = \overline{1,n}$, $k = \overline{1,n}$. $\square$

Пусть $\Lambda := \{\lambda_k\}$ есть множество всех с.з. пучка $L(\lambda)$. Предполагаем, что множество Λ счетно.

Определение 3. Пусть $\lambda_0 \in \Lambda$ и $y_{00}, y_{01}, \dots, y_{0l}$ есть система собственных и присоединенных функций (с.п.ф.), соответствующая с.з. λ_0. Обозначим

$$y_{sq} = \left(\frac{\partial^s}{\partial t^s}e^{\lambda_0 t}\left(y_{0q} + \frac{t}{1!}y_{0q-1} + \cdots + \frac{t^q}{q!}y_{00}\right)\right)\Bigg|_{t=0}, \qquad s = \overline{0, n-1}, \quad q = \overline{0,l}.$$

Для $0 < m \le n$ система вектор-функций $\tilde{y}_q = (y_{0q}, y_{1q}, \dots, y_{m-1q})^T$, $q = \overline{0,l}$, называется *производной (по Келдышу) m-цепочкой, соответствующей системе с.п.ф.* $y_{00}, y_{01}, \dots, y_{0l}$. $\square$

Пусть $Y := \{y_k\}$ есть множество всех с.п.ф. или, по-другому, корневых функций пучка $L(\lambda)$, соответствующих множеству Λ.

Определение 4. Система Y корневых функций пучка $L(\lambda)$ называется *m-кратно полной в пространстве* $L_2[0,1]$ $(0 < m \le n)$, если из условия ортогональности вектор-функции $h \in L_2^m[0,1] := \underbrace{L_2[0,1] \oplus \cdots \oplus L_2[0,1]}_{m \text{ раз}}$ всем производным m-цепочкам, соответствующим системе Y, следует равенство $h = 0$. $\square$

Определение 5. Дефектом данной системы векторов в гильбертовом пространстве называется размерность ортогонального дополнения к линейной оболочке этой системы. $\square$

Решается задача нахождения условий на коэффициенты пучка $L(\lambda)$, при которых имеет место или отсутствует n-кратная полнота. В последнем случае естественно возникает вопрос об условиях m-кратной полноты при $0 < m < n$.

Эта задача актуальна только для нерегулярных [2, с. 66–67; 3] пучков операторов $L(\lambda)$ (или вырожденных, как их иногда называют) с «плохим» поведением функции Грина при $|\lambda| \to \infty$ (например, экспоненциальный рост в секторах раствора не меньше π). При «хорошем» поведении функции Грина (например, степенная ограниченность при $|\lambda| \to \infty$ на некоторых лучах) эта задача уже решена в [3–4].

Основополагающей по этой проблеме является работа [5], в которой была сформулирована (без доказательства) теорема об n-кратной полноте корневых функций пучка $L(\lambda)$, порожденного дифференциальным выражением (1) со специальной главной частью

$$y^{(n)} + \lambda^n y + \{\text{возмущение}\},$$

и распадающимися краевыми условиями (3) (когда часть краевых условий берется только в нулевом конце отрезка $[0,1]$, а остальные — в единице). Эта теорема была доказана в [6] в случае аналитических коэффициентов дифференциального выражения и в [7] в случае суммируемых коэффициентов. Обобщение этой теоремы на случай конечномерного возмущения вольтеррова оператора было сделано в [8]. Случай произвольной главной части дифференциального выражения (1) был рассмотрен в [9–10]. В работах [3–4], относящихся к общему виду (1)–(2) пучка $L(\lambda)$, получены достаточные условия n-кратной полноты в $L_2[0,1]$ системы корневых функций в терминах степенной ограниченности по параметру λ функции Грина пучка $L(\lambda)$ на некоторых лучах. Наиболее полное исследование вопроса об n- и m-кратной полноте и неполноте корневых функций пучка $L(\lambda)$ вида (1), (3), дифференциальное выражение которого имеет постоянные коэффициенты, а краевые условия — полураспадающиеся (не менее половины краевых условий берутся только в одном конце), проведено в [11–12].

Для некоторых классов пучков $L(\lambda)$, даже с постоянными коэффициентами, вопрос о кратной полноте корневых функций еще не исследовался. В данной статье рассматривается именно такой пучок $L_0(\lambda)$, действующий в пространстве $L_2[0,1]$ и порожденный однородным дифференциальным выражением n-го порядка

$$\ell_0(y,\lambda) := \sum_{s+k=n} p_{sk}\lambda^s y^{(k)}, \qquad p_{sk} \in \mathbb{C}, \qquad p_{0n} \neq 0, \tag{4}$$

и линейно независимыми двухточечными нормированными краевыми условиями специальной структуры

$$\begin{aligned} U_i^0(y,\lambda) &:= \sum_{s+k=\varkappa_{i0}} \lambda^s \alpha_{isk} y^{(k)}(0) = 0, \quad i = \overline{1,l}, \\ U_i^0(y,\lambda) &:= \sum_{s+k\le\varkappa_{i0}} \lambda^s \alpha_{isk} y^{(k)}(0) + \sum_{s+k\le\varkappa_{i1}} \lambda^s \beta_{isk} y^{(k)}(1) = 0, \quad i = \overline{l+1,n}, \end{aligned} \tag{5}$$

где $\lambda, \alpha_{isk}, \beta_{isk} \in \mathbb{C}$, $\varkappa_{i0}, \varkappa_{i1} \in \{0,1,\ldots,n-1\}$, $1 \le l \le n-1$.

Пусть всюду далее выполняется основное предположение относительно дифференциального выражения $\ell_0(y,\lambda)$, а именно, что корни $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ его характеристического уравнения

$$\sum_{s+k=n} p_{sk}\omega^k = 0$$

различны, отличны от нуля и лежат на одном луче, исходящем из начала координат. Не нарушая общности, можно считать

$$0 < \omega_1 < \omega_2 < \cdots < \omega_n. \tag{6}$$

Для рассматриваемого пучка (4)–(5) с условием (6) не выполняются основные предположения [11, с. 60], а именно, что существует прямая d, проходящая через начало координат, не содержащая ω-корней и делящая комплексную плоскость на две полуплоскости, внутри каждой из которых число этих корней не меньше $n-l$, а также, что краевые условия являются полураспадающимися.

Однократная полнота корневых функций для частного случая пучка (4)–(5) при $l = n-1$ в предположении (6) исследована в [13].

Для формулировки основного результата введем обозначения:

$$a_{ij} = \sum_{s+k=\varkappa_{i0}} \alpha_{isk}\omega_j^k, \quad i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,n},$$

$$b_{ij} = \sum_{s+k=\varkappa_{i1}} \beta_{isk}\omega_j^k, \quad i = \overline{l+1,n}, \quad j = \overline{l+1,n},$$

$$\varkappa_i = \min\{\varkappa_{i0}, \varkappa_{i1}\}, \quad i = \overline{l+1,n}, \qquad [n]_+ = \begin{cases} n, & \text{если } n \ge 0, \\ 0, & \text{если } n < 0. \end{cases}$$

Теорема 1. *Если выполняется условие* (6) *и*

$$\det(a_{ij})_{i,j=1}^{l} \neq 0, \qquad \det(a_{ij})_{i,j=1}^{n} \neq 0, \qquad \det(b_{ij})_{i,j=l+1}^{n} \neq 0,$$

то система корневых функций пучка (4)–(5) m*-кратно полна в* $L_2[0,1]$ *при* $m \le n-l$ *с возможным конечным дефектом, не превышающим числа* $\sum\limits_{i=l+1}^{n} [m-1-\varkappa_i]_+$.

Теорема точна в следующем смысле. В работе [11, с. 72–77] (см. также [12, с. 58–62]) сформулирована теорема об $(n-l+1)$-кратной неполноте системы корневых функций для частного случая пучков вида (4)–(5), краевые условия которых являются полураспадающимися и не зависят от параметра λ. Но доказательство этой теоремы, по нашему мнению, не достаточно убедительно. В [14–15] при $l = n-1$ и $m = n-l+1(=2)$ получены достаточные условия на корни $\{\omega_j\}_1^n$, при которых системы корневых функций пучков вида (4)–(5) с условием (6) m-кратно не полны в $L_2[0,1]$ и имеют бесконечный дефект.

Оставшаяся часть статьи посвящена доказательству теоремы 1. Схема доказательства соответствует схеме доказательства теорем 2.1, 2.2 и 2.3 из [11] или [12]. Центральную роль в доказательстве играет лемма, которая формулируется и доказывается в следующем разделе.

2. ОБОЗНАЧЕНИЯ, ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ И ОСНОВНАЯ ЛЕММА

Функции $y_j(x,\lambda)=\exp(\lambda\omega_j x)$, $j=\overline{1,n}$, образуют фундаментальную систему решений уравнения (ф.с.р.) $\ell_0(y,\lambda)=0$ при $\lambda\neq 0$.

Ненулевые собственные значения (с.з.) $\lambda_k\neq 0$, $k=1,2,\ldots$, пучка (4)–(5) являются нулями целой функции $\Delta(\lambda):=\det\bigl(U_i^0(y_j(x,\lambda),\lambda)\bigr)_{i,j=1}^n$. Несмотря на то, что $\Delta(0)=0$, число $\lambda_0=0$ может быть с.з., а может и не быть.

Обозначим через $\Phi_i(x,\lambda)$ функцию, полученную из $\Delta(\lambda)$ заменой i-й строки в случае $l+1\le i\le n$ строкой $y_1(x,\lambda),\ldots,y_n(x,\lambda)$. Непосредственно можно убедиться в том, что столбцы

$$\left(\frac{\partial^k\Phi_i(x,\lambda)}{\partial\lambda^k},\ldots,\frac{\partial^k\bigl(\lambda^{m-1}\Phi_i(x,\lambda)\bigr)}{\partial\lambda^k}\right)^T\Bigg|_{\lambda=\lambda_\nu},$$

где $i=\overline{l+1,n}$, $k=\overline{0,s}$, $m\in\{1,\ldots,n\}$, $\nu=1,2,\ldots$, являются производными, по Келдышу, m-цепочками для корневых функций, соответствующих с.з. λ_ν, которое является нулем $\Delta(\lambda)$ кратности $s+1$.

Введем в рассмотрение функции:

$$\Theta_i(\lambda)=\int_0^1\sum_{j=1}^m\frac{\lambda^{j-1}\Phi_i(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}h_j(x)\,dx,\qquad i=\overline{l+1,n},\tag{7}$$

где $h(x)=\bigl(h_1(x),\ldots,h_m(x)\bigr)^T\in L_2^m[0,1]$.

Перепишем (7) в виде

$$\Theta_i(\lambda)=\frac{\Delta_i(\lambda)}{\Delta(\lambda)},\qquad i=\overline{l+1,n},\tag{8}$$

где $\Delta_i(\lambda)$ получается из $\Delta(\lambda)$ заменой i-й строки строкой

$$u_{n+11}(\lambda),\ u_{n+12}(\lambda),\ \ldots,\ u_{n+1n}(\lambda),$$

где

$$u_{n+1k}(\lambda)=\int_0^1\sum_{j=1}^m h_j(x)\lambda^{j-1}y_k(x,\lambda)\,dx.$$

Следующие два утверждения потребуются нам в дальнейшем. Их доказательство можно найти, например, в [12, с.48–49].

Утверждение 1. *Функции $\Phi_{l+1}(x,\lambda),\ldots,\Phi_n(x,\lambda)$ являются линейно-независимыми решениями уравнения $\ell_0(y,\lambda)=0$, удовлетворяющими первым l условиям (5) в точке 0.*

Утверждение 2. *Функции $\Theta_i(\lambda)$ не зависят от выбора ф.с.р. уравнения $\ell_0(y,\lambda)=0$.*

Введем в рассмотрение следующие множества:

$$\Pi_\varepsilon^+=\Bigl\{\lambda\in\mathbb{C}\mid\arg\lambda\in\Bigl[0,\frac{\pi}{2}-\varepsilon\Bigr]\bigcup\Bigl[\frac{3\pi}{2}+\varepsilon,2\pi\Bigr)\Bigr\},\qquad \Pi_\varepsilon^-=\Bigl\{\lambda\in\mathbb{C}\mid\arg\lambda\in\Bigl[\frac{\pi}{2}+\varepsilon,\frac{3\pi}{2}-\varepsilon\Bigr]\Bigr\},$$

где $\varepsilon>0$ и достаточно мало.

Лемма 1. *Если*

$$\det(a_{ij})_{i,j=1}^l\neq 0,\qquad \det(b_{ij})_{i,j=l+1}^n\neq 0,\tag{9}$$

то при $\lambda\in\Pi_\varepsilon^+$ и $|\lambda|\gg 1$ справедливы оценки

$$|\Theta_i(\lambda)|\le C|\lambda|^{m-\frac{3}{2}-\varkappa_{i1}},\qquad i=\overline{l+1,n},$$

а если

$$\det(a_{ij})_{i,j=1}^n\neq 0,\tag{10}$$

то при $\lambda\in\Pi_\varepsilon^-$ и $|\lambda|\gg 1$ справедливы оценки

$$|\Theta_i(\lambda)|\le C|\lambda|^{m-\frac{3}{2}-\varkappa_{i0}},\qquad i=\overline{l+1,n}.$$

Доказательство. Пусть $\lambda \in \Pi_\varepsilon^+$. Исходя из вида функций $y_j(x,\lambda)$, $j=\overline{1,n}$, в этом случае будем иметь

$$U_i^0(y_j,\lambda) = \sum_{s+k=\varkappa_{i0}} \lambda^s \alpha_{isk}\omega_j^k \lambda^k = \lambda^{\varkappa_{i0}} \sum_{s+k=\varkappa_{i0}} \alpha_{isk}\omega_j^k = \lambda^{\varkappa_{i0}} a_{ij}, \qquad i=\overline{1,l};$$

$$U_i^0(y_j,\lambda) = \sum_{s+k\le\varkappa_{i0}} \lambda^s \alpha_{isk}\omega_j^k \lambda^k + \sum_{s+k\le\varkappa_{i1}} \lambda^s \beta_{isk}\omega_j^k \lambda^k e^{\lambda\omega_j} =$$

$$= \lambda^{\varkappa_{i0}} \sum_{s+k=\varkappa_{i0}} \alpha_{isk}\omega_j^k + O(\lambda^{\varkappa_{i0}-1}) + \lambda^{\varkappa_{i1}} e^{\lambda\omega_j} \sum_{s+k=\varkappa_{i1}} \beta_{isk}\omega_j^k + O(\lambda^{\varkappa_{i1}-1}e^{\lambda\omega_j}) =$$

$$= \lambda^{\varkappa_{i1}} e^{\lambda\omega_j} \left(\sum_{s+k=\varkappa_{i1}} \beta_{isk}\omega_j^k + O\Big(\frac{1}{\lambda}\Big) + O\big(\lambda^{\varkappa_{i0}-\varkappa_{i1}} e^{-\lambda\omega_j}\big) \right) = \lambda^{\varkappa_{i1}} e^{\lambda\omega_j}[b_{ij}], \qquad i=\overline{l+1,n},$$

где использовано обозначение $[c] = c + O(\frac{1}{\lambda})$ при $|\lambda|\to\infty$.

Подставим эти выражения в $\Delta(\lambda)$ и разложим этот определитель на основании теоремы Лапласа по первым l строкам. С учетом соответствующих свойств определителей, неравенств (6) и предположений (9) получим

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda^{\varkappa_{10}} a_{11} & \cdots & \lambda^{\varkappa_{10}} a_{1n} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ \lambda^{\varkappa_{l0}} a_{l1} & \cdots & \lambda^{\varkappa_{l0}} a_{ln} \\ \lambda^{\varkappa_{l+11}} e^{\lambda\omega_1}[b_{l+11}] & \cdots & \lambda^{\varkappa_{l+11}} e^{\lambda\omega_n}[b_{l+1n}] \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ \lambda^{\varkappa_{n1}} e^{\lambda\omega_1}[b_{n1}] & \cdots & \lambda^{\varkappa_{n1}} e^{\lambda\omega_n}[b_{nn}] \end{vmatrix} = \pm\lambda^{\sum_{k=1}^l \varkappa_{k0} + \sum_{k=l+1}^n \varkappa_{k1}} \times$$

$$\times \left(e^{\lambda\sum_{j=l+1}^n \omega_j} \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1l} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ a_{l1} & \ldots & a_{ll} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} [b_{l+1l+1}] & \ldots & [b_{l+1n}] \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ [b_{nl+1}] & \ldots & [b_{nn}] \end{vmatrix} + O\left(e^{\lambda\left(\sum_{j=l+1}^n \omega_j + \omega_l - \omega_{l+1}\right)} \right) \right) =$$

$$= \pm\lambda^{\sum_{k=1}^l \varkappa_{k0} + \sum_{k=l+1}^n \varkappa_{k1}} e^{\lambda\sum_{j=l+1}^n \omega_j} \left(\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1l} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ a_{l1} & \ldots & a_{ll} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{l+1l+1} & \ldots & b_{l+1n} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ b_{nl+1} & \ldots & b_{nn} \end{vmatrix} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right) =$$

$$= \pm\lambda^{\sum_{k=1}^l \varkappa_{k0} + \sum_{k=l+1}^n \varkappa_{k1}} e^{\lambda\sum_{j=l+1}^n \omega_j} \det(a_{ij})_{i,j=1}^l \det(b_{ij})_{i,j=l+1}^n [1]. \qquad (11)$$

Дальнейшие рассуждения проведем только для случая $1 \le l \le n-2$, чтобы не увеличивать слишком объем статьи. Рассуждения в случае $l = n-1$ являются более простыми и мы их опускаем.

При всех ненулевых $\lambda \in \mathbb{C}$ справедливы соотношения:

$$u_{n+1j}(\lambda) = \int_0^1 \sum_{k=1}^m h_k(\xi)\lambda^{k-1} y_j(\xi,\lambda)\,d\xi =$$

$$= \lambda^{m-1}\int_0^1 h_m(\xi)e^{\lambda\omega_j\xi}\,d\xi + \lambda^{m-2}\int_0^1 h_{m-1}(\xi)e^{\lambda\omega_j\xi}\,d\xi + \cdots + \int_0^1 h_1(\xi)e^{\lambda\omega_j\xi}\,d\xi =$$

$$= \lambda^{m-1}\int_0^1 \sum_{k=1}^m \lambda^{k-m} h_k(\xi)e^{\lambda\omega_j\xi}\,d\xi = \lambda^{m-1}\int_0^1 h_m(\xi,\lambda)e^{\lambda\omega_j\xi}\,d\xi, \qquad j=\overline{1,n}, \qquad (12)$$

где $h_m(\xi,\lambda) := \sum_{k=1}^m \lambda^{k-m} h_k(\xi)$. Используя эти соотношения, найдем

$$\Delta_{l+1}(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda^{\varkappa_{10}} a_{11} & \cdots & \lambda^{\varkappa_{10}} a_{1n} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ \lambda^{\varkappa_{l0}} a_{l1} & \cdots & \lambda^{\varkappa_{l0}} a_{ln} \\ \lambda^{m-1}\int_0^1 h_m(\xi,\lambda)e^{\lambda\omega_1\xi}\,d\xi & \cdots & \lambda^{m-1}\int_0^1 h_m(\xi,\lambda)e^{\lambda\omega_n\xi}\,d\xi \\ \lambda^{\varkappa_{l+21}} e^{\lambda\omega_1}[b_{l+21}] & \cdots & \lambda^{\varkappa_{l+21}} e^{\lambda\omega_n}[b_{l+2n}] \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ \lambda^{\varkappa_{n1}} e^{\lambda\omega_1}[b_{n1}] & \cdots & \lambda^{\varkappa_{n1}} e^{\lambda\omega_n}[b_{nn}] \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda^{m-1+\sum_{k=1}^{l}\varkappa_{k0}+\sum_{k=l+1}^{n}\varkappa_{k1}-\varkappa_{l+11}} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{l+1+j} \Delta_{l+1j}(\lambda) \int_0^1 h_m(\xi,\lambda) e^{\lambda\omega_j \xi}\, d\xi, \tag{13}$$

разложив определитель по элементам $(l+1)$-й строки, где $\Delta_{l+1j}(\lambda)$ есть минор к элементу $(l+1,j)$ в определителе, получающемся из $\Delta_{l+1}(\lambda)$ после вынесения λ в соответствующей степени из строк, т. е.

$$\Delta_{l+1j}(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ a_{l1} & \cdots & a_{lj-1} & a_{lj+1} & \cdots & a_{ln} \\ e^{\lambda\omega_1}[b_{l+21}] & \cdots & e^{\lambda\omega_{j-1}}[b_{l+2j-1}] & e^{\lambda\omega_{j+1}}[b_{l+2j+1}] & \cdots & e^{\lambda\omega_n}[b_{l+2n}] \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ e^{\lambda\omega_1}[b_{n1}] & \cdots & e^{\lambda\omega_{j-1}}[b_{nj-1}] & e^{\lambda\omega_{j+1}}[b_{nj+1}] & \cdots & e^{\lambda\omega_n}[b_{nn}] \end{vmatrix}.$$

Раскладывая этот определитель на основании теоремы Лапласа по первым l строкам и используя соответствующие свойства определителей, получим при $j=\overline{1,l}$

$$\Delta_{l+1j}(\lambda) = \pm e^{\lambda\sum_{k=l+2}^{n}\omega_k} \left(\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \ldots & a_{1l+1} \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ a_{l1} & \ldots & a_{lj-1} & a_{lj+1} & \ldots & a_{ll+1} \end{vmatrix} \times \right.$$

$$\left. \times \begin{vmatrix} [b_{l+2l+2}] & \ldots & [b_{l+2n}] \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ [b_{nl+2}] & \ldots & [b_{nn}] \end{vmatrix} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right) = \pm e^{\lambda(\sum_{k=l+1}^{n}\omega_k - \omega_{l+1})} [A_j B_{l+1l+1}]. \tag{14}$$

Здесь и далее используются следующие обозначения:

$$A_j := \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \ldots & a_{1l+1} \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ a_{l1} & \ldots & a_{lj-1} & a_{lj+1} & \ldots & a_{ll+1} \end{vmatrix}, \qquad j=\overline{1,l+1};$$

$$B_{ij} = \begin{vmatrix} b_{l+1l+2} & \ldots & b_{l+1j-1} & b_{l+1j+1} & \ldots & b_{l+1n} \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ b_{i-1l+2} & \ldots & b_{i-1j-1} & b_{i-1j+1} & \ldots & b_{i-1n} \\ b_{i+1l+2} & \ldots & b_{i+1j-1} & b_{i+1j+1} & \ldots & b_{i+1n} \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ b_{nl+2} & \ldots & b_{nj-1} & b_{nj+1} & \ldots & b_{nn} \end{vmatrix}, \qquad i=\overline{l+1,n}, \quad j=\overline{l+1,n}.$$

При $j=\overline{l+1,n}$ будем иметь

$$\Delta_{l+1j}(\lambda) = \pm e^{\lambda(\sum_{k=l+1}^{n}\omega_k - \omega_j)} \left(\begin{vmatrix} [b_{l+2l+1}] & \ldots & [b_{l+2j-1}] & [b_{l+2j+1}] & \ldots & [b_{l+2n}] \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ [b_{nl+1}] & \ldots & [b_{nj-1}] & [b_{nj+1}] & \ldots & [b_{nn}] \end{vmatrix} \times \right.$$

$$\left. \times \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1l} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ a_{l1} & \ldots & a_{ll} \end{vmatrix} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right) = \pm e^{\lambda(\sum_{k=l+1}^{n}\omega_k - \omega_j)} [B_{l+1j} A_{l+1}]. \tag{15}$$

Таким образом, из (13)–(15) получим

$$\Delta_{l+1}(\lambda) = \lambda^{m-1+\sum_{k=1}^{l}\varkappa_{k0}+\sum_{k=l+1}^{n}\varkappa_{k1}-\varkappa_{l+11}} \left(\sum_{j=1}^{l} \left(\pm e^{\lambda(\sum_{k=l+1}^{n}\omega_k - \omega_{l+1})} [A_j B_{l+1l+1}] \right) \times \right.$$

$$\left. \times \int_0^1 h_m(\xi,\lambda) e^{\lambda\omega_j\xi}\, d\xi + \sum_{j=l+1}^{n} \left(\pm e^{\lambda(\sum_{k=l+1}^{n}\omega_k - \omega_j)} [A_{l+1} B_{l+1j}] \right) \int_0^1 h_m(\xi,\lambda) e^{\lambda\omega_j\xi}\, d\xi \right) =$$

$$= \lambda^{m-1+\sum_{k=1}^{l}\varkappa_{k0}+\sum_{k=l+1}^{n}\varkappa_{k1}-\varkappa_{l+11}} e^{\lambda\sum_{k=l+1}^{n}\omega_k} \left(\sum_{j=1}^{l}\Big(\pm[A_j B_{l+1l+1}]\Big)\times\right.$$

$$\left.\times\int_0^1 h_m(\xi,\lambda)e^{\lambda(\omega_j\xi-\omega_{l+1})}\,d\xi + \sum_{j=l+1}^{n}\Big(\pm[A_{l+1}B_{l+1j}]\Big)\int_0^1 h_m(\xi)e^{\lambda\omega_j(\xi-1)}\,d\xi\right). \tag{16}$$

Положим $\lambda = r\exp(i\varphi)$ и пусть для определенности $\varphi\in\left[0,\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right]$. В случае $\varphi\in\left[\frac{3\pi}{2}+\varepsilon,2\pi\right)$ проводим аналогичные рассуждения. Используя неравенство Коши – Буняковского, получим при $j=\overline{1,n}$

$$\left|\int_0^1 h_m(\xi,\lambda)e^{\lambda\omega_j(\xi-1)}\,d\xi\right| \le \int_0^1 |h_m(\xi,\lambda)|e^{r\frac{2}{\pi}\varepsilon\omega_1(\xi-1)}\,d\xi \le \left(\int_0^1 |h_m(\xi,\lambda)|^2\,d\xi\right)^{\frac{1}{2}}\times$$

$$\times\left(\int_0^1 e^{2r\frac{2}{\pi}\varepsilon\omega_1(\xi-1)}\,d\xi\right)^{\frac{1}{2}} = \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{|\lambda|^{m-k}}\|h_k\|_{L_2[0,1]}\frac{1}{\sqrt{2r\frac{2}{\pi}\omega_1}}\left(1-e^{-2r\frac{2}{\pi}\varepsilon\omega_1}\right)^{\frac{1}{2}} \le \frac{C}{\sqrt{|\lambda|}}. \tag{17}$$

Следовательно, при $j=\overline{1,l}$ справедливы оценки

$$\left|\int_0^1 h_m(\xi,\lambda)e^{\lambda(\omega_j\xi-\omega_{l+1})}\,d\xi\right| = \left|e^{\lambda(\omega_j-\omega_{l+1})}\right|\left|\int_0^1 h_m(\xi,\lambda)e^{\lambda\omega_j(\xi-1)}\,d\xi\right| \le \frac{C}{\sqrt{|\lambda|}}. \tag{18}$$

Из (16)–(18) окончательно найдем

$$|\Delta_{l+1}(\lambda)| \le C|\lambda|^{m-\frac{3}{2}+\sum_{k=1}^{l}\varkappa_{k0}+\sum_{k=l+1}^{n}\varkappa_{k1}-\varkappa_{l+11}}\left|e^{\lambda\sum_{k=l+1}^{n}\omega_k}\right|. \tag{19}$$

Рассуждая аналогично (13)–(16), будем иметь при $i=\overline{l+2,n}$

$$\Delta_i(\lambda) = \lambda^{m-1+\sum_{k=1}^{l}\varkappa_{k0}+\sum_{k=l+1}^{n}\varkappa_{k1}-\varkappa_{i1}} e^{\lambda\sum_{k=l+1}^{n}\omega_k}\left(\sum_{j=1}^{l}\Big(\pm[A_j B_{il+1}]\Big)\times\right.$$

$$\left.\times\int_0^1 h_m(\xi,\lambda)e^{\lambda(\omega_j\xi-\omega_{l+1})}\,d\xi + \sum_{j=l+1}^{n}\Big(\pm[A_{l+1}B_{ij}]\Big)\int_0^1 h_m(\xi,\lambda)e^{\lambda\omega_j(\xi-1)}\,d\xi\right),$$

откуда, используя оценки (17)–(18), аналогично (19) получим при $j=\overline{l+2,n}$

$$|\Delta_i(\lambda)| \le C|\lambda|^{m-\frac{3}{2}+\sum_{k=1}^{l}\varkappa_{k0}+\sum_{k=l+1}^{n}\varkappa_{k1}-\varkappa_{i1}}\left|e^{\lambda\sum_{k=l+1}^{n}\omega_k}\right|. \tag{20}$$

Из формул (8), (11), (19)–(20) и предположений (9) в случае $\lambda\in\Pi_\varepsilon^+$ будем иметь

$$\big|\Theta_i(\lambda)\big| = \left|\frac{\Delta_i(\lambda)}{\Delta(\lambda)}\right| \le C|\lambda|^{m-\frac{3}{2}-\varkappa_{i1}}, \qquad i=\overline{l+1,n},$$

т. е. утверждение леммы в этом случае доказано.

Пусть теперь $\lambda\in\Pi_\varepsilon^-$. В этом случае при $j=\overline{1,n}$

$$U_i^0(y_j,\lambda) = \sum_{s+k=\varkappa_{i0}}\lambda^s\alpha_{isk}\omega_j^k\lambda^k = \lambda^{\varkappa_{i0}}\sum_{s+k=\varkappa_{i0}}\alpha_{isk}\omega_j^k = \lambda^{\varkappa_{i0}}a_{ij}, \qquad i=\overline{1,l}; \tag{21}$$

$$U_i^0(y_j,\lambda) = \sum_{s+k\le\varkappa_{i0}}\lambda^s\alpha_{isk}\omega_j^k\lambda^k + \sum_{s+k\le\varkappa_{i1}}\lambda^s\beta_{isk}\omega_j^k\lambda^k e^{\lambda\omega_j} =$$

$$= \lambda^{\varkappa_{i0}}\sum_{s+k=\varkappa_{i0}}\alpha_{isk}\omega_j^k + O\big(\lambda^{\varkappa_{i0}-1}\big) + O\big(\lambda^{\varkappa_{i1}}e^{\lambda\omega_1}\big) = \lambda^{\varkappa_{i0}}\left(\sum_{s+k=\varkappa_{i0}}\alpha_{isk}\omega_j^k + O\Big(\frac{1}{\lambda}\Big) + O\big(\lambda^{\varkappa_{i1}-\varkappa_{i0}}e^{\lambda\omega_1}\big)\right) =$$

$$= \lambda^{\varkappa_{i0}}\left(\sum_{s+k=\varkappa_{i0}}\alpha_{isk}\omega_j^k + O\Big(\frac{1}{\lambda}\Big)\right) = \lambda^{\varkappa_{i0}}[a_{ij}], \qquad i=\overline{l+1,n}. \tag{22}$$

Подставив эти асимптотические формулы в $\Delta(\lambda)$, найдем с учетом предположения (10)

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda^{\varkappa_{10}}a_{11} & \cdots & \lambda^{\varkappa_{10}}a_{1n}\\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill}\\ \lambda^{\varkappa_{l0}}a_{l1} & \cdots & \lambda^{\varkappa_{l0}}a_{ln}\\ \lambda^{\varkappa_{l+10}}[a_{l+11}] & \cdots & \lambda^{\varkappa_{l+10}}[a_{l+1n}]\\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill}\\ \lambda^{\varkappa_{n0}}[a_{n1}] & \cdots & \lambda^{\varkappa_{n0}}[a_{nn}]\end{vmatrix}=\lambda^{\sum_{k=1}^{n}\varkappa_{k0}}\left(\begin{vmatrix}a_{11} & \ldots & a_{1n}\\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill}\\ a_{n1} & \ldots & a_{nl}\end{vmatrix}+O\Big(\frac{1}{\lambda}\Big)\right)=$$

$$=\lambda^{\sum_{k=1}^{n}\varkappa_{k0}}\det(a_{ij})_{i,j=1}^{n}[1]. \tag{23}$$

Далее, подставляя формулы (21), (22), (12) в $\Delta_i(\lambda)$ при $i=\overline{l+1,n}$, вынося из каждой строки λ в соответствующей степени и раскладывая оставшийся определитель по элементам i-й строки, получим

$$\Delta_i(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda^{\varkappa_{10}}a_{11} & \cdots & \lambda^{\varkappa_{10}}a_{1n}\\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill}\\ \lambda^{\varkappa_{l0}}a_{l1} & \cdots & \lambda^{\varkappa_{l0}}a_{ln}\\ \lambda^{\varkappa_{l+10}}[a_{l+11}] & \cdots & \lambda^{\varkappa_{l+10}}[a_{l+1n}]\\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill}\\ \lambda^{\varkappa_{i-10}}[a_{i-11}] & \cdots & \lambda^{\varkappa_{i-10}}[a_{i-1n}]\\ \lambda^{m-1}\int_0^1 h_m(\xi,\lambda)e^{\lambda\omega_1\xi}\,d\xi & \cdots & \lambda^{m-1}\int_0^1 h_m(\xi,\lambda)e^{\lambda\omega_n\xi}\,d\xi\\ \lambda^{\varkappa_{i+10}}[a_{i+11}] & \cdots & \lambda^{\varkappa_{i+10}}[a_{i+1n}]\\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill}\\ \lambda^{\varkappa_{n0}}[a_{n1}] & \cdots & \lambda^{\varkappa_{n0}}[a_{nn}]\end{vmatrix}=\lambda^{m-1+\sum_{k=1}^{n}\varkappa_{k0}-\varkappa_{i0}}\times$$

$$\times\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}\int_0^1 h_m(\xi,\lambda)e^{\lambda\omega_j\xi}\,d\xi\begin{vmatrix}a_{11} & \ldots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \ldots & a_{1n}\\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill}\\ a_{l1} & \ldots & a_{lj-1} & a_{lj+1} & \ldots & a_{ln}\\ [a_{l+11}] & \ldots & [a_{l+1j-1}] & [a_{l+1j+1}] & \ldots & [a_{l+1n}]\\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill}\\ [a_{i-11}] & \ldots & [a_{i-1j-1}] & [a_{i-1j+1}] & \ldots & [a_{i-1n}]\\ [a_{i+11}] & \ldots & [a_{i+1j-1}] & [a_{i+1j+1}] & \ldots & [a_{i+1n}]\\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill}\\ [a_{n1}] & \ldots & [a_{nj-1}] & [a_{nj+1}] & \ldots & [a_{nn}]\end{vmatrix}.$$

Отсюда, учитывая, что в рассматриваемом случае $\operatorname{Re}\lambda\omega_n<\cdots<\operatorname{Re}\lambda\omega_1<0$ и имеют место оценки

$$\left|\int_0^1 h_m(\xi,\lambda)e^{\lambda\omega_j\xi}d\xi\right|\le\frac{C}{\sqrt{|\lambda|}},\quad j=\overline{1,n},$$

аналогичные оценкам (17), легко получим при $i=\overline{l+1,n}$

$$|\Delta_i(\lambda)|\le C|\lambda|^{m-\frac{3}{2}+\sum_{k=1}^{n}\varkappa_{k0}-\varkappa_{i0}}. \tag{24}$$

Из формул (8), (23), (24) и предположения (10) в случае $\lambda\in\Pi_\varepsilon^-$ будем иметь

$$\big|\Theta_i(\lambda)\big|=\left|\frac{\Delta_i(\lambda)}{\Delta(\lambda)}\right|\le C|\lambda|^{m-\frac{3}{2}-\varkappa_{i0}},\qquad i=\overline{l+1,n},$$

т. е. утверждение леммы и в этом случае доказано. Тем самым лемма полностью доказана.

Следствие 1. *Если выполняются условия* (9)–(10) *и* $\lambda\in\Pi_\varepsilon^\pm$, *то при* $|\lambda|\gg 1$ *справедливы оценки*

$$|\Theta_i(\lambda)|\le C|\lambda|^{m-\frac{3}{2}-\varkappa_i},\qquad i=\overline{l+1,n}. \tag{25}$$

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ КРАТНОЙ ПОЛНОТЫ КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть $\bar{h} := (\bar{h}_1, \dots \bar{h}_m)^T \in L_2^m[0,1]$ ортогональна всем производным m-цепочкам. Тогда на основании утверждения 2 и того факта, что столбцы

$$\left(\frac{\partial^k \Phi_i(x,\lambda)}{\partial \lambda^k}, \dots, \frac{\partial^k \left(\lambda^{m-1}\Phi_i(x,\lambda)\right)}{\partial \lambda^k} \right)^T \Bigg|_{\lambda=\lambda_\nu},$$

где $i = \overline{l+1, n}$, $k = \overline{0, s}$, $m \in \{1, \dots, n\}$, $\nu = 1, 2, \dots$, являются производными m-цепочками для корневых функций, соответствующих с.з. λ_ν, которые являются нулями $\Delta(\lambda)$ кратности $s+1$, из (7)–(8) следует, что все особенности $\Theta_i(\lambda)$ устранимы. Согласно оценкам (25) и теореме Лиувилля $\Theta_i(\lambda)$ есть полиномы степени $m - 2 - \varkappa_i$ при $m - 2 - \varkappa_i \geq 0$, которые можно записать в виде

$$\Theta_i(\lambda) \equiv \lambda^{m-2-\varkappa_i}\left(\bar{h}, \zeta_{0i}\right) + \lambda^{m-3-\varkappa_i}\left(\bar{h}, \zeta_{1i}\right) + \dots + \left(\bar{h}, \zeta_{m-2-\varkappa_i i}\right),$$

а при $m - 2 - \varkappa_i < 0$

$$\Theta_i(\lambda) \equiv 0.$$

В дефектном подпространстве производных m-цепочек выберем подпространство H, ортогональное вектор-функциям $\zeta_{ki}(x)$, $k = \overline{0, m-2-\varkappa_i}$, $i = \overline{l+1, n}$. Пусть теперь $\bar{h} \in H$. Тогда $\Theta_i(\lambda) \equiv 0$ и, значит,

$$\Delta_i(\lambda) = \int_0^1 \sum_{j=1}^m \lambda^{j-1}\Phi_i(x,\lambda) h_j(x)\, dx \equiv 0, \qquad i = \overline{l+1, n}. \tag{26}$$

Так как в силу утверждения 1 система функций $\Phi_{l+1}, \dots, \Phi_n$ является системой линейно-независимых решений уравнения $\ell_0(y, \lambda) = 0$, удовлетворяющих первым l краевым условиям (5), то из (26) следует тождество

$$\int_0^1 y(x,\lambda) \sum_{j=1}^m \lambda^{j-1} h_j(x)\, dx \equiv 0 \tag{27}$$

для любого решения $y(x, \lambda)$ уравнения $\ell_0(y, \lambda) = 0$, удовлетворяющего первым l краевым условиям (5). Но эти решения находятся в виде

$$y(x,\lambda) = \gamma_1 e^{\lambda\omega_1 x} + \gamma_2 e^{\lambda\omega_2 x} + \dots + \gamma_n e^{\lambda\omega_n x}, \tag{28}$$

если удовлетворить первые l условий (5). Следовательно, приходим к следующей линейной однородной системе l уравнений для нахождения γ_j

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}\gamma_j = 0, \quad i = \overline{1, l}. \tag{29}$$

Систему (29) можно записать в виде

$$\sum_{j=1}^l a_{ij}\gamma_j = -\sum_{j=l+1}^n a_{ij}\gamma_j, \qquad i = \overline{1, l}. \tag{30}$$

Если в правой части взять любые $\gamma_{l+1}, \dots, \gamma_n$, то из (30) в силу того что по условию теоремы $\det(a_{ij})_{i,j=1}^l \neq 0$, можно однозначно определить $\gamma_1, \dots, \gamma_l$. Следовательно, для любого $m \leq n - l$ существует такая ф.с.р. $(\gamma_1^i, \gamma_2^i, \dots, \gamma_n^i)^T$, $i = \overline{1, n-l}$, системы (29), что

$$\Gamma_m = \begin{vmatrix} \gamma_{n-m+1}^1 & \gamma_{n-m+2}^1 & \cdots & \gamma_n^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{n-m+1}^m & \gamma_{n-m+2}^m & \cdots & \gamma_n^m \end{vmatrix} \neq 0. \tag{31}$$

На основании (27)–(28) для такой ф.с.р. $(\gamma_1^i, \gamma_2^i, \dots, \gamma_n^i)^T$, $i = \overline{1, n-l}$, системы (29) справедливы тождества

$$\sum_{j=1}^n \int_0^1 \gamma_j^i e^{\lambda\omega_j x} \sum_{k=1}^m \lambda^{k-1} h_k(x)\, dx \equiv 0, \qquad i = \overline{1, n-l}. \tag{32}$$

Покажем, что из этих $n-l$ тождеств следует, что $h_k=0$ при $k=\overline{1,m}$. Будем следовать схеме рассуждений [11, с. 77–80] (см. также [12, с. 63–64]). Разложим $e^{\lambda\omega_j x}$ в ряд

$$e^{\lambda\omega_j x}=1+\lambda\omega_j x+\frac{(\lambda\omega_j x)^2}{2!}+\dots+\frac{(\lambda\omega_j x)^N}{N!}+\dots,$$

подставим в (32), представим левые части (32) в виде ряда по степеням λ и приравняем к нулю коэффициенты. Тогда при $N\ge N_0$, где N_0 — достаточно большое число, получим

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\gamma_j^i\omega_j^N}{N!}\int_0^1 h_1(x)x^N\,dx+\dots+\sum_{j=1}^{n}\frac{\gamma_j^i\omega_j^{N-m+1}}{(N-m+1)!}\int_0^1 h_m(x)x^{N-m+1}\,dx=0,\qquad i=\overline{1,n-l}.\tag{33}$$

Это линейная алгебраическая система относительно m неизвестных

$$\int_0^1 h_1(x)x^N\,dx,\ \int_0^1 h_2(x)x^{N-1}\,dx,\ \dots,\ \int_0^1 h_m(x)x^{N-m+1}\,dx.$$

Возьмем первые m уравнений в (33) и рассмотрим соответствующую систему с квадратной матрицей:

$$D_N^m=\begin{vmatrix}\sum_{j=1}^n\gamma_j^1\frac{\omega_j^N}{N!} & \sum_{j=1}^n\gamma_j^1\frac{\omega_j^{N-1}}{(N-1)!} & \dots & \sum_{j=1}^n\gamma_j^1\frac{\omega_j^{N-m+1}}{(N-m+1)!}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \sum_{j=1}^n\gamma_j^m\frac{\omega_j^N}{N!} & \sum_{j=1}^n\gamma_j^m\frac{\omega_j^{N-1}}{(N-1)!} & \dots & \sum_{j=1}^n\gamma_j^m\frac{\omega_j^{N-m+1}}{(N-m+1)!}\end{vmatrix}=$$

$$=\sum_{1\le j_1<j_2<\dots<j_m\le n}\begin{vmatrix}\gamma_{j_1}^1\frac{\omega_{j_1}^N}{N!} & \gamma_{j_2}^1\frac{\omega_{j_2}^{N-1}}{(N-1)!} & \dots & \gamma_{j_m}^1\frac{\omega_{j_m}^{N-m+1}}{(N-m+1)!}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \gamma_{j_1}^m\frac{\omega_{j_1}^N}{N!} & \gamma_{j_2}^m\frac{\omega_{j_2}^{N-1}}{(N-1)!} & \dots & \gamma_{j_m}^m\frac{\omega_{j_m}^{N-m+1}}{(N-m+1)!}\end{vmatrix}=$$

$$=\sum_{1\le j_1<j_2<\dots<j_m\le n}\frac{\omega_{j_1}^N}{N!}\frac{\omega_{j_2}^{N-1}}{(N-1)!}\dots\frac{\omega_{j_m}^{N-m+1}}{(N-m+1)!}\begin{vmatrix}\gamma_{j_1}^1 & \gamma_{j_2}^1 & \dots & \gamma_{j_m}^1\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \gamma_{j_1}^m & \gamma_{j_2}^m & \dots & \gamma_{j_m}^m\end{vmatrix}.$$

Отсюда и из (6), (31) можно заключить, что слагаемое, соответствующее $j_1=n-m+1$, $j_2=n-m+2$, $\dots$, $j_m=n$, при N достаточно большом мажорирует сумму всех других слагаемых, т. е. имеет место равенство

$$D_N^m=\frac{\omega_{n-m+1}^N}{N!}\frac{\omega_{n-m+2}^{N-1}}{(N-1)!}\dots\frac{\omega_n^{N-m+1}}{(N-m+1)!}\Gamma_m\big(1+o(1)\big),$$

где $o(1)\to0$ при $N\to\infty$. Следовательно, при $N\ge N_0$ получим $D_N^m\ne0$. Тогда из системы (33) будем иметь при $N\ge N_0$

$$\int_0^1 h_1(x)x^N\,dx=\int_0^1 h_2(x)x^{N-1}\,dx=\ \dots\ =\int_0^1 h_m(x)x^{N-m+1}\,dx=0.$$

Отсюда следует, что $h_k=0$ при $k=\overline{1,m}$. Таким образом, теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ (*проект* НШ-4383.2010.1) *и гранта РФФИ* (*проект* 10-01-00270).

Библиографический список

1. *Келдыш, М.В.* О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов / М. В. Келдыш // УМН. – 1971. – Т. 26, № 4. – С. 15–41.

2. *Наймарк, М.А.* Линейные дифференциальные операторы / М.А. Наймарк. – М.: Наука, 1969.

3. *Шкаликов, А.А.* Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в гра-

ничных условиях / А. А. Шкаликов // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. – 1983. – № 9. – С. 190–229.

4. *Gasymov, M. G.* О кратной полноте системы собственных и присоединенных функций одного класса дифференциальных операторов / M. G. Gasymov, A. M. Magerramov // Докл. АН Азерб. ССР. – 1974. – Т. 30, № 12. – С. 9–12.

5. *Келдыш, М. В.* О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений / М. В. Келдыш // Докл. АН СССР. – 1951. – Т. 77, № 1. – С. 11–14.

6. *Хромов, А. П.* Конечномерные возмущения вольтерровых операторов: дис. . . . д-ра физ.-мат. наук / Хромов А. П. – Новосибирск, 1973. – 242 с.

7. *Шкаликов, А. А.* О полноте собственных и присоединенных функций обыкновенного дифференциального оператора с нерегулярными краевыми условиями / А. А. Шкаликов // Функц. анализ. – 1976. – Т. 10, № 4. – С. 69–80.

8. *Хромов А. П.* О порождающих функциях вольтерровых операторов / А. П. Хромов // Мат. сборник. – 1977. – Т. 102(144), № 3. – С. 457–472.

9. *Freiling, G.* Zur Vollständigkeit des Systems der Eigenfunktionen und Hauptfunktionen irregulärer Operator-büschel / G. Freiling// Math. Z. – 1984. – V. 188, № 1. – P. 55–68.

10. *Тихомиров, С. А.* Конечномерные возмущения интегральных вольтерровых операторов в пространстве вектор-функций: дис. . . . канд. физ.-мат. наук / Тихомиров С. А. – Саратов, 1987. – 126 с.

11. *Вагабов, А. И.* Разложения в ряды Фурье по главным функциям дифференциальных операторов и их применения: дис. . . . д-ра физ.-мат. наук / Вагабов А. И. – М., 1988. – 201 с.

12. *Вагабов, А. И.* Введение в спектральную теорию дифференциальных операторов / А. И. Вагабов. – Ростов н/Д: Изд-во Рост. ун-та, 1994. – 160 с.

13. *Рыхлов, В. С.* О полноте собственных функций одного класса пучков дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами / В. С. Рыхлов // Изв. вузов. Математика. – 2009. – № 6. – С. 42–53.

14. *Рыхлов, В. С.* О кратной неполноте собственных функций пучков обыкновенных диференциальных операторов / В. С. Рыхлов // Математика. Механика: Сб. науч.тр. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2001. – Вып. 3. – С. 114–117.

15. *Рыхлов, В. С.* О кратной неполноте собственных функций пучков дифференциальных операторов, корни характеристического уравнения которых лежат на одном луче / В. С. Рыхлов // Докл. РАЕН. – Саратов: Изд-во Сарат. гос. техн. ун-та, 2004. – № 4. – С. 72–79.

УДК 517.956

О НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ВЫРОЖДЕНИЕМ

П.В. Садчиков, А.Д. Баев

Воронежский государственный университет,
кафедра уравнений в частных производных
и теорий вероятностей
E-mail: sadch@freemail.ru, alexsandrbaev@mail.ru

Рассматриваются краевые задачи в полупространстве для одного класса псевдодифференциальных уравнений. Установлены коэрцитивные априорные оценки и теоремы о существовании решений таких краевых задач.

Ключевые слова: вырождающееся эллиптическое уравнение, априорная оценка, псевдодифференциальный оператор, краевая задача.

About Some Boundary Problems in the Semispace for a Class of Pseudo-Differential Equations with Degeneracy

P.V. Sadchikov, A.D. Baev

Voronezh State University
Chair of the Equations in Partial Derivatives and Probability Theory
E-mail: sadch@freemail.ru, alexsandrbaev@mail.ru

Boundary problems in the halfspace for one class of the pseudo-differential equations are considered. The coercetive a priori estimations and theorems of the existence of solutions for these problems are established.

Key words: degenerating elliptic equation, a priori estimation, pseudo-differential operator, boundary problem.

Краевые задачи для вырождающихся эллиптических уравнений относятся к неклассическим задачам математической физики. Одна из главных трудностей, возникающих в теории вырождающихся эллиптических уравнений, связана с влиянием младших (в смысле теории регулярных эллиптических уравнений) членов на постановку краевых задач и их разрешимость.