

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Э. А. Иодко, П. Ф. Завгородний, Г. М. Севастьянов, Расчет тепловой конвекции в затвердевающем расплаве, *ТВТ*, 1971, том 9, выпуск 5, 975–980

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.238.202.29

11 ноября 2024 г., 17:38:17



УДК 536.25

РАСЧЕТ ТЕПЛОВОЙ КОНВЕКЦИИ В ЗАТВЕРДЕВАЮЩЕМ
РАСПЛАВЕ

Э. А. Иодко, П. Ф. Завгородний, Г. М. Севастьянов

Интегральным методом в первом приближении решена задача о поле температур и скоростей в жидкой сердцевине затвердевающей ограниченной призмы прямоугольного сечения. Положенное в основу расчета предположение о симметричном профиле температур и скоростей реализуется в ограниченном сверху диапазоне значений чисел Грасгофа. Показано, что при относительно небольших значениях чисел Грасгофа реализуется вязкостный квазистационарный режим конвективного движения с пренебрежимо малым вкладом нелинейных и нестационарных членов. Для призмы квадратного сечения с относительной высотой $l_3 = 5$ такой режим реализуется при $Gr \leq 10^4$. В этом диапазоне поля относительных скоростей в металлических и неметаллических расплавах практически совпадают.

Конвективное движение, возникающее при затвердевании расплава, представляет существенный интерес в связи с проблемой получения качественного слитка.

По сравнению с тепловой конвекцией в замкнутых полостях с неподвижными стенками, наличие подвижных твердых границ — фронта фазового перехода — заметно усложняет задачу.

В [1] была сделана попытка проанализировать поведение расплава, затвердевающего в полубесконечной плоской щели и в круглой цилиндрической полости. Предполагалось, что затвердевание в поперечном сечении этих полостей происходит симметрично, а плоскость или ось симметрии вертикальны. Использовался метод разложения искомых функций в степенные ряды по поперечной координате. Сходимость рядов доказать не удалось.

В [2] выполнен численный расчет конвективного движения расплава в симметрично затвердевающей круглой цилиндрической полости. Предполагалось, что режим конвективного движения — турбулентный. Использовалась конечно-разностная аппроксимация усредненных уравнений движения и энергии с замкнутой пульсационных членов приближенными эмпирическими выражениями.

В данной работе рассматривается конвективное движение расплава, возникающее при его симметричном затвердевании, в полости призмы прямоугольного сечения. Решение задачи выполнено интегральным методом.

Расплав с начальной температурой T_0 , большей температуры кристаллизации T_K , заполняет вначале область D_0

$$-L_1 \leq x_1 \leq L_1; \quad -L_2 \leq x_2 \leq L_2; \quad -L_3 \leq x_3 \leq L_3.$$

На границах области вследствие теплообмена с окружающей средой происходит затвердевание расплава. Поэтому в момент времени $\tau > 0$ область D существования расплава

$$-z_1 \leq x_1 \leq z_1; \quad -z_2 \leq x_2 \leq z_2; \quad -z_3 \leq x_3 \leq z_3.$$

Размеры жидкой зоны z_1 ; z_2 ; z_3 считаются известными функциями времени τ и совпадают в начальный момент с размерами соответственно L_1 , L_2 , L_3 . На поверхностях $x_1 = \pm z_1$; $x_2 = \pm z_2$; $x_3 = \pm z_3$ в течение всего процесса затвердевания расплава поддерживается постоянная температура, равная температуре кристаллизации T_k . Плоскости $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ являются плоскостями симметрии. Ось x_3 совпадает по направлению с вектором ускорения силы тяжести.

Обозначим: $\theta = (T - T_k) / (T_0 - T_k)$ — безразмерная температура; $\bar{v} = \bar{u} / \bar{u}$ — безразмерная скорость; $\pi = p / \bar{p}$ — безразмерное давление; $\eta_i = x_i / \bar{x}$ — безразмерные координаты ($i = 1, 2, 3$); $Fo = \tau / \bar{\tau}$ — безразмерное время; \bar{x} — характерный размер области; $\bar{u} = v / \bar{x}$ — характерная скорость; $\bar{p} = \rho \bar{u}^2$ — характерное давление; $\bar{\tau} = \bar{x}^2 / a$ — характерное время; v — коэффициент кинематической вязкости; a — коэффициент температуропроводности расплава; ρ — плотность расплава (при $T = T_0$); \bar{e}_i — единичный орт оси i

$$\varepsilon_i(Fo) = z_i(\tau) \bar{x}; \quad l_i = L_i / \bar{x} \quad (i = 1, 2, 3),$$

$$Pr = \nu / a; \quad Gr = g\beta(T_0 - T_k) \bar{x}^3 / \nu^2.$$

Уравнения движения, неразрывности и теплопереноса в безразмерной форме принимают вид

$$\frac{1}{Pr} \frac{\partial \bar{v}}{\partial Fo} + (\bar{v} \nabla) \bar{v} = -\nabla \pi + \Delta \bar{v} + \bar{e}_3 Gr \theta, \quad (1)$$

$$\nabla \bar{v} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial Fo} + Pr (\bar{v} \nabla) \theta = \Delta \theta. \quad (3)$$

Считая поля температур и скоростей симметричными относительно плоскости $\eta_1 = 0$; $\eta_2 = 0$; $\eta_3 = 0$, ограничимся рассмотрением части области D , ограниченной плоскостями симметрии и плоскостями $\eta_1 = \varepsilon_1(Fo)$; $\eta_2 = \varepsilon_2(Fo)$; $\eta_3 = \varepsilon_3(Fo)$.

Начальные и граничные условия задачи

$$\theta|_{Fo=0} = 1; \quad v_3|_{Fo=0} = 0; \quad v_2|_{Fo=0} = 0; \quad v_1|_{Fo=0} = 0; \quad (4)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \eta_3} \Big|_{\eta_3=0} = 0; \quad \frac{\partial v_3}{\partial \eta_3} \Big|_{\eta_3=0} = 0; \quad v_2|_{\eta_3=0} = 0; \quad v_1|_{\eta_3=0} = 0; \quad (5)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \eta_2} \Big|_{\eta_2=0} = 0; \quad \frac{\partial v_3}{\partial \eta_2} \Big|_{\eta_2=0} = 0; \quad v_2|_{\eta_2=0} = 0; \quad \frac{\partial v_1}{\partial \eta_2} \Big|_{\eta_2=0} = 0; \quad (6)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \eta_1} \Big|_{\eta_1=0} = 0; \quad \frac{\partial v_3}{\partial \eta_1} \Big|_{\eta_1=0} = 0; \quad \frac{\partial v_2}{\partial \eta_1} \Big|_{\eta_1=0} = 0; \quad v_1|_{\eta_1=0} = 0; \quad (7)$$

$$\theta|_{\eta_1=\varepsilon_1(Fo)} = 0; \quad v_3|_{\eta_1=\varepsilon_1} = 0; \quad v_2|_{\eta_1=\varepsilon_1} = 0; \quad v_1|_{\eta_1=\varepsilon_1} = 0; \quad (8)$$

$$\theta|_{\eta_2=\varepsilon_2} = 0; \quad v_3|_{\eta_2=\varepsilon_2} = 0; \quad v_2|_{\eta_2=\varepsilon_2} = 0; \quad v_1|_{\eta_2=\varepsilon_2} = 0; \quad (9)$$

$$\theta|_{\eta_3=\varepsilon_3} = 0; \quad v_3|_{\eta_3=\varepsilon_3} = 0; \quad v_2|_{\eta_3=\varepsilon_3} = 0; \quad v_1|_{\eta_3=\varepsilon_3} = 0. \quad (10)$$

Функции $\varepsilon_1(Fo)$; $\varepsilon_2(Fo)$; $\varepsilon_3(Fo)$ — известные функции времени.

Интегрируя уравнение неразрывности по площади поперечного сечения S расплава

$$0 \leq \eta_1 \leq \varepsilon_1, \quad 0 \leq \eta_2 \leq \varepsilon_2,$$

получим

$$\int_0^{\varepsilon_1} d\eta_1 \int_0^{\varepsilon_2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial \eta_1} + \frac{\partial v_2}{\partial \eta_2} + \frac{\partial v_3}{\partial \eta_3} \right) d\eta_2 = \int_0^{\varepsilon_2} v_1 \Big|_{\eta_1=0}^{\eta_1=\varepsilon_1} d\eta_2 + \\ + \int_0^{\varepsilon_1} v_2 \Big|_{\eta_2=0}^{\eta_2=\varepsilon_2} d\eta_1 + \int_0^{\varepsilon_1} d\eta_1 \int_0^{\varepsilon_2} \frac{\partial v_3}{\partial \eta_3} d\eta_2 = 0.$$

В силу граничных условий (6) — (9) имеем

$$\int_0^{\varepsilon_1} d\eta_1 \int_0^{\varepsilon_2} \frac{\partial v_3}{\partial \eta_3} d\eta_2 = 0$$

и

$$\int_0^{\varepsilon_1} d\eta_1 \int_0^{\varepsilon_2} v_3 d\eta_2 = \text{const.}$$

Поскольку объем замкнутый, расход жидкости через площадь S должен быть равен нулю

$$\int_0^{\varepsilon_1} d\eta_1 \int_0^{\varepsilon_2} v_3 d\eta_2 = 0, \quad (11)$$

Учитывая уравнение неразрывности (2), получаем

$$(\bar{v} \nabla) \theta = \nabla (\bar{v} \theta), \quad (12)$$

$$(\bar{v} \nabla) \bar{v} = \nabla (\bar{v} \bar{v}).$$

Здесь $\bar{v} \bar{v}$ — диванное произведение векторов \bar{v} .

Записывая уравнение движения в проекции на ось η_3 и уравнение энергии с учетом выражений (12), получим

$$\frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial v_3}{\partial \text{Fo}} + \frac{\partial}{\partial \eta_1} (v_1 v_3) + \frac{\partial}{\partial \eta_2} (v_2 v_3) + \frac{\partial}{\partial \eta_3} (v_3^2) = \\ = \frac{\partial^2 v_3}{\partial \eta_1^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial \eta_2^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial \eta_3^2} + \text{Gr} \theta; \quad (13)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \text{Fo}} + \text{Pr} \left[\frac{\partial}{\partial \eta_1} (v_1 \theta) + \frac{\partial}{\partial \eta_2} (v_2 \theta) + \frac{\partial}{\partial \eta_3} (v_3 \theta) \right] = \\ = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta_1^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta_2^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta_3^2}. \quad (14)$$

При записи уравнения (13) отброшен член $-\partial \theta / \partial \eta_3$, как малый по сравнению с членом $\text{Gr} \theta$, представляющим собой силу, вызывающую конвективное движение расплава.

Интегрируя уравнения (13) и (14) по области D существования жидкого расплава, учитывая краевые условия и условие (11), получим следующую систему обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений с двумя неизвестными функциями θ_{ε_1} и v_3 :

$$- \int_0^{\varepsilon_1} d\eta_1 \int_0^{\varepsilon_2} v_3^2 \Big|_{\eta_3=0}^{\eta_3=\varepsilon_3} d\eta_3 = \int_0^{\varepsilon_3} d\eta_3 \int_0^{\varepsilon_2} \frac{\partial v_3}{\partial \eta_1} \Big|_{\eta_1=\varepsilon_1} d\eta_2 + \\ + \int_0^{\varepsilon_1} d\eta_1 \int_0^{\varepsilon_3} \frac{\partial v_3}{\partial \eta_2} \Big|_{\eta_2=\varepsilon_2} d\eta_3 + \text{Gr} \int_0^{\varepsilon_1} d\eta_1 \int_0^{\varepsilon_2} d\eta_2 \int_0^{\varepsilon_3} \theta d\eta_3; \quad (15)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dF_0} \int_0^{\varepsilon_1} d\eta_1 \int_0^{\varepsilon_2} d\eta_2 \int_0^{\varepsilon_3} \theta d\eta_3 - \text{Pr} \int_0^{\varepsilon_1} d\eta_1 \int_0^{\varepsilon_2} v_3 \theta \Big|_{\eta_3=0} d\eta_2 = \\
& = \int_0^{\varepsilon_2} d\eta_2 \int_0^{\varepsilon_3} \frac{\partial \theta}{\partial \eta_1} \Big|_{\eta_1=\varepsilon_1} d\eta_3 + \int_0^{\varepsilon_1} d\eta_1 \int_0^{\varepsilon_3} \frac{\partial \theta}{\partial \eta_2} \Big|_{\eta_2=\varepsilon_2} d\eta_3 + \\
& \quad + \int_0^{\varepsilon_1} d\eta_1 \int_0^{\varepsilon_2} \frac{\partial \theta}{\partial \eta_3} \Big|_{\eta_3=\varepsilon_3} d\eta_2.
\end{aligned} \tag{16}$$

Для сокращения записи введем обозначения

$$i_0 = \frac{\varepsilon_1^2 - \eta_1^2}{l_1^2 - \eta_1^2}; \quad j_0 = \frac{\varepsilon_2^2 - \eta_2^2}{l_2^2 - \eta_2^2}; \quad k_0 = \frac{\varepsilon_3^2 - \eta_3^2}{l_3^2 - \eta_3^2}, \tag{17}$$

$$\left. \begin{aligned}
d &= - \frac{\partial i_0}{\partial \eta_1} \Big|_{\eta_1=\varepsilon_1} = \frac{2\varepsilon_1}{l_1^2 - \varepsilon_1^2}, \\
e &= - \frac{\partial j_0}{\partial \eta_2} \Big|_{\eta_2=\varepsilon_2} = \frac{2\varepsilon_2}{l_2^2 - \varepsilon_2^2}, \\
f &= - \frac{\partial k_0}{\partial \eta_3} \Big|_{\eta_3=\varepsilon_3} = \frac{2\varepsilon_3}{l_3^2 - \varepsilon_3^2},
\end{aligned} \right\} \tag{18}$$

$$i_m = \int_0^{\varepsilon_1} i_0^m d\eta_1; \quad j_m = \int_0^{\varepsilon_2} j_0^m d\eta_2; \quad k_m = \int_0^{\varepsilon_3} k_0^m d\eta_3, \tag{19}$$

$$a = \frac{\varepsilon_3^4}{l_3^4} \left[i_{2j_2} - 2 \frac{i_1 j_1}{i_2 j_2} i_{3j_3} + \frac{i_1^2 j_1^2}{l_2^2 j_2^2} i_{4j_4} \right] \tag{20}$$

$$b = (dj_1 + li_1)k_1, \tag{21}$$

$$M = \frac{d}{i_1} + \frac{e}{j_1} + \frac{f}{k_1} \tag{22}$$

$$N = \frac{\varepsilon_3^4}{l_3^4} \left(\frac{i_2 j_2}{i_1 j_1} - \frac{i_3 j_3}{i_2 j_2} \right) \frac{1}{v_1}. \tag{23}$$

Будем искать решение задачи в виде

$$\theta = A(F_0) i_0 \cdot j_0 \cdot k_0, \tag{24}$$

$$v_3 = B(F_0) i_0 \cdot j_0 \cdot k_0 - C(F_0) i_0^2 \cdot j_0^2 \cdot k_0^2. \tag{25}$$

Записанные выражения удовлетворяют условиям симметрии и условиям на фронте фазового перехода (5) — (10) для θ и v_3 . Учитывая, что

$$\varepsilon_1|_{F_0=0} = l_1; \quad \varepsilon_2|_{F_0=0} = l_2; \quad \varepsilon_3|_{F_0=0} = l_3, \tag{26}$$

из начального условия (4) имеем

$$A(F_0)|_{F_0=0} = 1. \tag{27}$$

Удовлетворяя условию (11), получим

$$C(F_0) = B(F_0) \frac{i_1 j_1}{i_2 j_2}. \tag{28}$$

Поэтому

$$v_3 = B i_0 j_0 k_0 \left[1 - \frac{i_1 j_1}{i_2 j_2} i_0 j_0 \right]. \tag{29}$$

Из (17) и (19) с учетом выражений (26) следует

$$i_0|_{Fo=0} = j_0|_{Fo=0} = k_0|_{Fo=0} = 1, \\ i_m|_{Fo=0} = l_1; j_m|_{Fo=0} = l_2; k_m|_{Fo=0} = l_3.$$

Используя эти результаты, можно убедиться, что начальное условие (4) для функции v_s удовлетворяется при любом виде функциональной зависимости $B(Fo)$ и при любом начальном значении $B(0)$. Неизвестные функции времени $A(Fo)$ и $B(Fo)$ должны быть определены из интегральных уравнений (15) и (16).

Обозначив дополнительно

$$\alpha = Ai \cdot j_1 \cdot k_1, \quad (30)$$

и используя ранее введенные обозначения, запишем уравнения (15), (16) в виде

$$d\alpha / dFo = -M\alpha + Pr \cdot N \cdot B \cdot \alpha, \quad (31)$$

$$aB^2 - bB + Gr\alpha = 0. \quad (32)$$

Начальное условие для функции α следует из условий (27) и выражения (30)

$$\alpha|_{Fo=0} = l_1 \cdot l_2 \cdot l_3. \quad (33)$$

Квадратное уравнение (32) имеет дискриминант

$$D = b^2 - 4a\alpha \cdot Gr.$$

Поскольку в сформулированной задаче имеют смысл только действительные значения функции B , из условия положительности дискриминанта получится максимально допустимое число Грасгофа Gr^* , при котором еще существует решение сформулированной задачи

$$Gr^* = b^2 / 4a\alpha. \quad (34)$$

При числах Грасгофа $Gr > Gr^*$ представление о симметрии поля температур и скоростей, положенное в основу данного расчета, по-видимому, оказывается несостоятельным.

Решение системы уравнений (31), (32) с начальным условием (33) и расчет полей температур и скоростей в затвердевающем расплаве выполнено на ЭВМ «Урал-4».

На рис. 1 представлены результаты расчета чисел Gr^* в зависимости от соотношения геометрических размеров полости и чисел Прандтля. Во всех случаях закон замерзания задан в виде

$$\varepsilon_i = l_i - \kappa \sqrt{Fo}, \text{ причем } \kappa = 1.$$

Из графика следует, что величина Gr^* возрастает пропорционально относительной высоте полости и уменьшается по мере увеличения ее относительной ширины. Уменьшение числа Прандтля с 8,8 (нафталин) до 0,108 (сталь) также приводит к заметному уменьшению критического значения числа Грасгофа.

На рис. 2 представлена зависимость скорости и температуры от числа Грасгофа для призмы с размерами $l_1 = l_2 = 1, l_3 = 5$. Приведены данные для точки с координатами (0; 0; 0) для $Fo = 0,01$.

При числах Грасгофа $Gr \leq 10^4$ увеличение скорости с ростом Gr независимо от числа Прандтля происходит по одинаковому линейному закону. Такая же закономерность наблюдается и для температуры, правда, в несколько более узком интервале чисел Грасгофа. Интерпретация этих результатов может быть дана на основе исходных уравнений (1) и (3). Из уравнения (1) следует, что независимость скорости \bar{v} от числа Прандтля и линейная ее зависимость от числа Грасгофа возможна, если инерционные члены малы по сравнению с вязкими. Таким образом, до значений $Gr \approx 10^4$ реализуется вязкостный квазистационарный режим тепловой конвекции. Независимость температуры θ от числа Прандтля возможна при условии, что вклад конвективного члена $Pr(\bar{v}\nabla)\theta$ в теплоперенос мал и тепло пере-

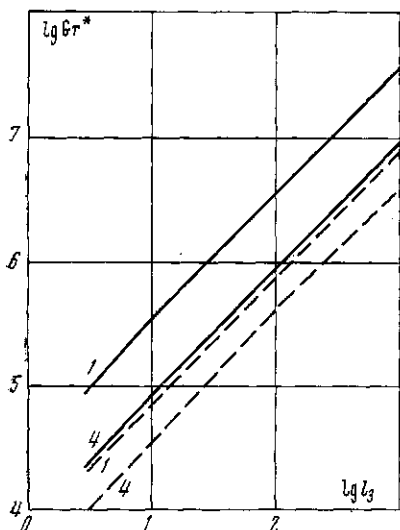


Рис. 1

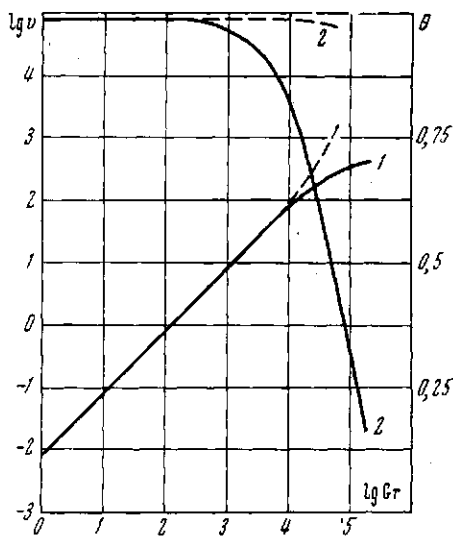


Рис. 2

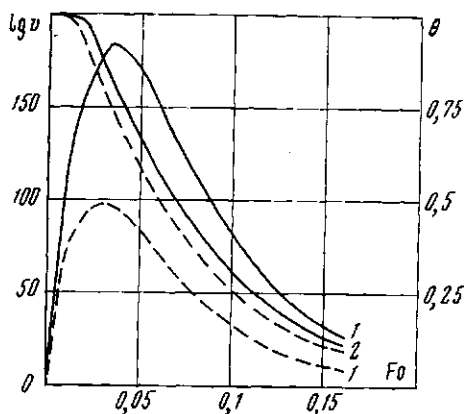


Рис. 3

Рис. 1. Зависимость критического числа Грасгофа от относительной высоты и ширины полости, а также числа Прандтля:

Цифры у кривых — относительная ширина полости, сплошные линии — $Pr = 8,8$; пунктирные — $Pr = 0,108$

Рис. 2. Зависимость безразмерной скорости 1 и безразмерной температуры 2 от числа Грасгофа для точки с координатами $(0; 0; 0)$ в полости $l_1 = l_2 = 1; l_3 = 5$: сплошные линии — $Pr = 8,8$; пунктирные — $Pr = 0,108$

Рис. 3. Зависимость безразмерной скорости восходящих потоков 1 и безразмерной температуры расплава 2 от времени для полости $l_1 = l_2 = 1; l_3 = 5$: Сплошные линии — для точки с относительными координатами $(0; 0; 0)$; пунктирные — $(0; 0,5; 0)$

носится в основном путем молекулярной теплопроводности. Очевидно такой эффект возможен при достаточно малых скоростях конвективного движения, т. е. при не слишком больших значениях чисел Грасгофа.

На рис. 3 представлена зависимость скорости и температуры в металлическом расплаве от времени. График построен для точек, лежащих на вертикальной оси симметрии призмы квадратичного сечения ($l_1 = l_2 = 1; l_3 = 5$) на верхнем горизонте ($x_3/\epsilon_3 = 0$) и в промежуточной по высоте точке ($x_3/\epsilon_3 = 0,5$). При числе Прандтля 0,108 максимум скорости достигается при $Fo \approx 0,03$. Для числа Прандтля 8,8 максимум скорости достигается через гораздо меньший промежуток времени ($Fo \approx 0,005$).

Донецкий государственный университет

Поступила в редакцию 15 IX 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. А. Иодко. Инж.-физ. ж., 10, № 1, 1966.
2. Ю. А. Самойлович. Изв. АН СССР, Металлы, № 2, 1969.