

## Наглядный способъ вывода формулъ простѣйшей системы кристаллографическихъ вычисленій<sup>1</sup>.

Е. С. Федорова.

(Доложено въ засѣданіи Отдѣленія Физико-Математическихъ Наукъ 14 мая 1919 года).

Графическія операціи рѣшенія задачъ кристаллографіи получили столь необычайную простоту, что большое число такихъ операцій, необходимыхъ для производства каждаго отдѣльнаго кристаллохимическаго анализа, совершается въ считанное число минутъ, рѣдко болѣе получаса, и лишь въ исключительныхъ случаяхъ требуютъ для своего совершенія нѣсколькихъ часовъ. Сюда входитъ и производство измѣреній на гониометрѣ, и опредѣленіе символовъ наблюдаемыхъ граней; сюда должно было бы входить и опредѣленіе плотности граней структуры, или по крайней мѣрѣ порядокъ величинъ этого рода, но на дѣлѣ обыкновенно этого не бываетъ нужно, и онъ непосредственно опредѣляется опытнымъ глазомъ.

Но конечно графическія рѣшенія даютъ грубо приближенные результаты, тогда какъ при всякомъ описаніи новаго кристалла желательна возможно большая точность, которая въ сущности также не велика, но все-таки въ общемъ случаѣ угловыя величины выражаютъ въ градусахъ и минутахъ.

Какъ извѣстно, процессы графическихъ операцій можно параллельно замѣнить соответственными вычислениями по формуламъ. И если есть основанія полагать, что въ практикующихся графическихъ операціяхъ мы достигли крайней возможной степени простоты, то имѣется полное основаніе и дѣйствительныя вычисленія вести какъ операціи, параллельныя операціямъ графическимъ.

Изъ всѣхъ системъ кристаллографическихъ вычисленій въ послѣднее десятилѣтіе выдѣлилась одна по своей исключительной простотѣ, сведшей

<sup>1</sup> Редакція выражаетъ искреннюю благодарность проф. А. К. Болдыреву за исправленіе нѣкоторыхъ недосмотровъ въ текстѣ и чертежахъ, исполненныхъ уже послѣ кончины академика Е. С. Федорова.

необходимѣйшія вычислительныя операціи къ простому алгебраическому сложению (котангенсовъ перемѣнныхъ угловъ какъ координатъ) величинъ, которыя получаются (по таблицамъ для тригонометрическихъ функцій) непосредственнымъ измѣреніемъ на гониометрѣ, но только непремѣнно универсальномъ, что и составляетъ одно изъ особыхъ и незамѣнимыхъ преимуществъ пользованія именно этимъ типомъ гониометра. При отсутствіи этого инструмента не можетъ быть и рѣчи о примѣненіи излагаемой здѣсь системы вычисленій.

Начну съ самаго общаго случая — кристалловъ триклинной сингоніи.

Кристаллъ такой сингоніи, какъ это излагается въ нѣкоторыхъ элементарныхъ курсахъ кристаллографіи, воплѣ геометрически опредѣляется «основнымъ параллелограмомъ»  $ABCD$ , болѣе или менѣе общаго положенія на діаграммѣ (по отношенію къ стереографической сѣткѣ, нынѣ всегда составляющей основу всякой кристаллографической діаграммы). См. фиг. 1.

Если параллелограмъ (выраженный въ гномонической проекціи) данъ, то имъ воплѣ опредѣляется символъ каждой грани кристалла, выраженной опредѣленною точкою. Для этого чрезъ проекцію этой грани проводимъ прямыя, параллельныя сторонамъ параллелограмма, какъ осямъ (первая параллельна  $AB$ , а вторая —  $AC$ )<sup>1</sup> и, принимая длины сторонъ параллелограмма за единицы, мы только отсчитываемъ отъ начальной точки  $A$  параллелограмма счетъ каждой проведенной прямой въ только что упомянутыхъ единицахъ; если по счету получится  $p_1, p_2$ , то символъ принятой грани есть  $(p_1 p_2 1)$ .

Полная совокупность возможныхъ граней въ гномонической проекціи составляетъ нѣкоторую геометрическую сѣть изъ двухъ рядовъ параллельныхъ прямыхъ и, какъ вообще всякая геометрическая сѣть, опредѣляется двумя координатами.

Если отъ гномонической мы перейдемъ къ гномостереографической проекціи, мы получаемъ совершенно аналогическую сферическую сѣть, опредѣляемую двумя пучками лучей, имѣющими центры въ точкахъ  $(100)$  и  $(010)$  на окружности стереографической сѣтки. Для этого перехода, какъ извѣстно, для каждой точки на радіусѣ соответственное сферическое разстояніе отъ центра сѣтки должно быть уменьшено ровно вдвое, и тогда всякая ось (какъ прямая) преобразуется въ дугу большого круга, наклонъ которой прямо прочитывается на сѣткѣ. То же имѣетъ мѣсто и въ случаѣ гномонической

<sup>1</sup> Собственно берется параллелограмъ, вершины котораго соответствуютъ символамъ  $(001)$ ,  $(011)$ ,  $(111)$ ,  $(101)$ . На фиг. 1 взять другой параллелограмъ, такъ какъ для излагаемаго способа это оказывается возможнымъ.



проекціи, но конечно уголъ прочитываемаго наклона долженъ быть уменьшенъ ровно вдвое.

Эти углы наклона<sup>1</sup>, служащіе биполярными координатами каждой точки сѣти, удобнѣ всего выражать котангенсами угловъ, считая отъ окружности сѣти, или, для гномонической проекціи, отъ параллельной координаты, удаленной на безконечное разстояніе (экстрапрямой).

Для веденія счета соотвѣтственныхъ координатъ въ каждой изъ двухъ системъ нужно выдѣлить двѣ, изъ коихъ одна исходная, а другая единичная. Напр., для счета первой координаты, мы беремъ углы между вторыми координатами, считая за исходную ту, которая проходитъ чрезъ (001), а за единичную ту, которая проходитъ чрезъ (111); при углѣ, котангенсъ коего вдвое больше, мы имѣемъ величину первой координаты, равную 2 и т. д. Соотвѣтствующее построеніе мы должны сдѣлать и съ первыми координатами, чтобы получить счетъ для вторыхъ.

И вообще, если единичный котангенсъ раздѣлимъ на  $n$  частей и возьмемъ  $\frac{m}{n}$ -ую координату по счету, мы получимъ (поясовой) символъ  $|mn|$ , соотвѣтствующій взятой (первой или второй) оси, а величина на обѣихъ осяхъ даетъ, какъ только что сказано, полный символъ.

При этомъ для величинъ котангенсовъ само собою получается основное уравненіе тетрагонометріи:

$$n \cotg |mn| = (n-m) \cotg (01) + m \cotg (11)^2.$$

Если для первой оси  $\frac{m}{n} = p_1$  и для второй оси  $\frac{m}{n} = p_2$ , то символъ грани есть  $(p_1 p_2 1)$ .

При осуществленіи этой системы вычисленій мы не вольны во всѣхъ случаяхъ поступать по одному шаблону, то есть юстировать кристаллы всегда по гранямъ (100) и (010). Вѣдь этихъ граней можетъ и вовсе не быть въ кристаллѣ; и если онѣ имѣются, то могутъ быть второстепеннаго или даже совсѣмъ плохого достоинства. Между тѣмъ какъ для достиженія наиболѣе точныхъ результатовъ нужно класть въ основу наилучшія грани. А такъ какъ достоинство граней въ одномъ и томъ же веществѣ болѣе или менѣе подходяще для граней однихъ и тѣхъ же символовъ (простыхъ формъ), то вообще для разныхъ веществъ приходится класть въ основу (биполярныхъ координатъ) болѣе или менѣе однѣ и тѣ же грани, но для cadaго вещества особья. Въ частности, напр., такими гранями могутъ быть, напр., (110)

<sup>1</sup> Для примѣрнаго подсчета которыхъ проведены концентрическіе круги подъ углами наклона на цѣлые десятки градусовъ.

<sup>2</sup> Записки Горнаго Института, IV, 375.

и (110), какъ это пришлось Б. П. Орелкину принять для дидропилселе-  
ниддихлорпалладія<sup>1</sup>. За основныя константы (фиг. 1) имъ приняты<sup>2</sup>:

$$a = (110) \text{ и } b = (\bar{1}\bar{1}0), c = 001 \text{ и } d = (\bar{1}01), \text{ причеъ } (ab) = 93^\circ 3, \\ A(ac) = 100^\circ 57, B(bc) = 80^\circ 54, A_1(ad) = 74^\circ 52 \text{ и } B_1(bd) = 56^\circ 29.$$

Этими числами опредѣлены обѣ координаты граней  $a, b, c, d$ , то есть (110), ( $\bar{1}\bar{1}0$ ), не наблюдаемой грани (001) и ( $\bar{1}01$ ) соответственно. Чтобы получить недополученныя координаты наблюдаемыхъ граней, приходится сдѣлать нѣсколько алгебраическихъ сложений уже данныхъ координатъ. Напр., для граней (011) и (121) нужно дополнительно къ ихъ общей координатѣ изъ (110) вычислить координаты изъ  $b$ , которыя отмѣчены на диаграммѣ числами  $143^\circ 24$  и  $108^\circ 53$ .

Чтобы съ наибольшей простотой получить эти дополнительные коорди-  
наты, мы на отдѣльной сѣткѣ (фиг. 2) откладываемъ оба уже извѣстные  
угла  $56^\circ 29$  и  $80^\circ 54$ , которымъ приписываемъ обычные зональные символы  
 $|10|$ ,  $|11|$  и  $|01|$ , считая за начальную точку  $|10|$  и такъ какъ для двухъ  
остальныхъ граней этого пояса получаемъ зональные символы  $|\bar{1}\bar{1}|$  и  $|\bar{3}1|$ .  
По основной формулѣ для перваго полученъ уголъ  $108^\circ 53$ , а для втораго  
 $143^\circ 24$  ( $\text{ctg } x$  соответственно  $2 \text{ ctg } |01| - \text{ctg } |11|$  или  $4 \text{ ctg } |01| -$   
 $3 \text{ ctg } |11|$ ).

Подобнымъ же образомъ вычислимъ и остальные координаты граней,  
и въ концѣ концовъ составимъ табличку:

	110	100	010	110	101	101	011	121
110	$86^\circ 57$	$135^\circ 52$	$41^\circ 20$	$0^\circ 0$	$123^\circ 12$	$74^\circ 52$	$74^\circ 52$	$74^\circ 52$
$\bar{1}\bar{1}0$	$0^\circ 0$	$48^\circ 55$	$45^\circ 53$		$108^\circ 53$	$56^\circ 29$	$108^\circ 53$	$143^\circ 24$

Такъ какъ координаты граней вертикальнаго пояса могутъ имѣть вели-  
чины только  $0^\circ$  или  $180^\circ$ , то въ табличкѣ приводятся величины угловъ этихъ  
граней съ основными точками  $a$  и  $b$  биполярныхъ координатъ.

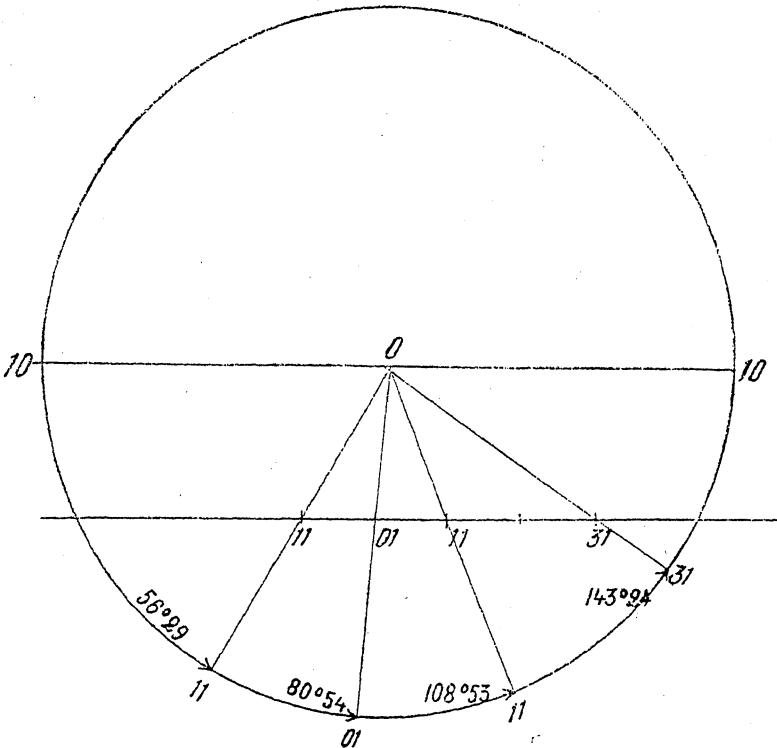
Изъ изложеннаго выше видно, что то крайнее упрощеніе графическаго  
рѣшенія задачъ, къ которому теперь пришла кристаллографія, есть со-  
знание, что кристаллографическій комплексъ въ своемъ изображеніи сво-  
дится къ геометрической сѣти изъ двухъ параллельныхъ линейныхъ примъ

<sup>1</sup> Что видно изъ слѣдующаго

$$\begin{aligned} 1 \times (110) &= \bar{1}\bar{1}0 \quad 3 \times (110) = 330 \\ 1 \times (\bar{1}\bar{1}2) &= \bar{1}\bar{1}2 \quad 1 \times (\bar{1}\bar{1}2) = \bar{1}\bar{1}2 \\ \hline 202 &= (\bar{1}01) \quad \bar{2}42 = (\bar{1}21) \end{aligned}$$

<sup>2</sup> На фиг. 1 буквы  $a$  и  $b$  по ошибкѣ поставлены не у тѣхъ символовъ.

координатъ, т. е. системѣ параллелограмовъ (гномоническая проекція) совокупно съ нѣкоторымъ кругомъ преобразованія, который въ общемъ случаѣ (триклинныхъ кристалловъ) имѣетъ независимое отъ этой сѣти положеніе и величину радіуса. Каждая точка сѣти, т. е. точка пересѣченія координатъ двухъ системъ, выражающихся рациональными числами, есть изображеніе нѣкоторой грани комплекса, а вмѣстѣ съ тѣмъ та же грань изображаетъ и точкою преобразованія той же точки посредствомъ названнаго круга (гномостереографической проекціи), при чемъ первая геометрическая сѣть пре-



Фиг. 2. 1

образуется въ другую, представляющую ту же линейную приму координатъ въ видѣ двухъ линейныхъ примъ большихъ круговъ, исходящихъ изъ двухъ точекъ на окружности круга преобразованія. Послѣднія координаты непосредственно опредѣляются на универсальномъ гониометрѣ при измѣреніи кристалла и, если четыре пары такихъ координатъ для граней опредѣленныхъ символовъ опредѣлены, то въ общемъ случаѣ отсюда координаты осталь-

<sup>1</sup> См. выноску на стр. 993.

ныхъ граней комплекса вычисляются по алгебраическому суммированію тангенсовъ угловъ, составляющихъ координаты.

Соотвѣтственно специальнымъ разрядамъ кристалловъ по сингоніи, кругъ преобразованія принимаетъ по отношенію геометрической сѣти специальное положеніе, и какъ имѣется одинъ исключительный разрядъ кристалловъ кубической сингоніи, для коего вовсе не нужны опытные константы, такъ имѣется одна исключительная геометрическая сѣть съ совершенно исключительнымъ положеніемъ круга преобразованія, а именно квадратная съ кругомъ, имѣющимъ центръ въ одной точкѣ сѣти и притомъ съ радіусомъ, равнымъ сторонѣ квадрата сѣти. Это случай одновременно и высшей симметріи, и специально упрощенныхъ расчетовъ, такъ какъ въ этомъ случаѣ всѣ пояса изотропны и имѣютъ рациональные параметры, то есть квадраты тангенсовъ угловъ. Сюда, значитъ входятъ углы опредѣленнаго ряда величинъ.

Кристаллы гипогексагональнаго типа съ практической кристаллографической точки зрѣнія выдаются по той своей особенноти, что могутъ быть отнесены къ четыремъ осямъ, изъ коихъ три лежатъ въ одной плоскости и приближенно образуютъ равные углы, а четвертая ось приближенно къ нимъ перпендикулярна. Отношеніе грани къ этимъ четыремъ осямъ выражается четырьмя индексами символа, съ чисто геометрической же точки зрѣнія геометрическая сѣть есть сѣть общаго характера, и особенность только въ томъ, что вмѣсто символа  $(p_1 p_2 p_3)$  грани приписывается символъ  $(p_1 : p_2 : p_3 : p_3 - p_2)$ .

Въ противоположность всѣмъ предыдущимъ случаямъ разряду тригоналоидныхъ кристалловъ принадлежитъ совершенно особая геометрическая сѣть, открытая впервые, какъ новый геометрическій образъ, знаменитымъ геометромъ Мебіусомъ въ его сочиненіи «Der barucentrische Calcül». Эта сѣть опредѣляется тремя нѣкоторыми точками  $A, B$  и  $C$ , которымъ можно приписать любой вѣсъ, выраженный цѣлымъ числомъ, и притомъ не только положительнымъ, но и отрицательнымъ, и тогда центръ тяжести есть нѣкоторая точка открытой имъ сѣти, напр., центръ тяжести треугольника  $ABC$  выразится символомъ  $(111)$ , что предполагаетъ помѣщеніе равныхъ вѣсовъ во всѣхъ трехъ вершинахъ этого треугольника. Если одинъ изъ индексовъ символа равенъ 0 и символъ имѣетъ видъ  $(p_1 p_2 0)$ , то возможные центры тяжести находятся на прямой  $AB$ , и притомъ если это есть экстраточка, то символъ будетъ именно  $(1\bar{1}0)$ . Это случай пары параллельныхъ силъ, направленныхъ въ противоположныя стороны и не могущихъ быть уравновѣшенными никакою силою. Да и вообще, если въ символѣ

( $p_1 p_2 p_3$ ) сумма индексовъ равна нулю, система не можетъ быть уравновѣшена никакою силою на конечномъ разстояніи, а символъ долженъ выражать одну изъ экстраточекъ, напр. (112), (123) и т. д. Линейная прима экстраточекъ характеризуетъ особой поясъ геометрической сѣти, съ означенною характеристикою.

Но именно потому, что Мебіусъ былъ чистый геометръ, онъ сначала не сознавалъ, какое важное орудіе даетъ онъ кристаллографіи для рѣшенія нѣкоторыхъ ея задачъ, и вмѣстѣ съ тѣмъ ему и въ голову не приходило, что для того, чтобы воспользоваться даннымъ орудіемъ, необходимо имѣть въ виду еще и кругъ преобразованія, безъ котораго одна геометрическая сѣть еще не выражаетъ опредѣленнаго кристаллографическаго комплекса.

Съ измѣненіемъ положенія и величины этого круга безконечно варьируетъ изображаемый комплексъ кристалла, и тому исключительному комплексу кристалла кубической сингоніи, о которомъ рѣчь была выше, соответствуетъ такой *мнимый* кругъ преобразованія, по отношенію къ которому трехугольникъ  $ABC$  есть саморeciпрочный, то есть вершины котораго есть полюсы противоположныхъ сторонъ и центръ коего есть центръ тяжести трехугольника, то есть выражаетъ грань (111) геометрической сѣти.

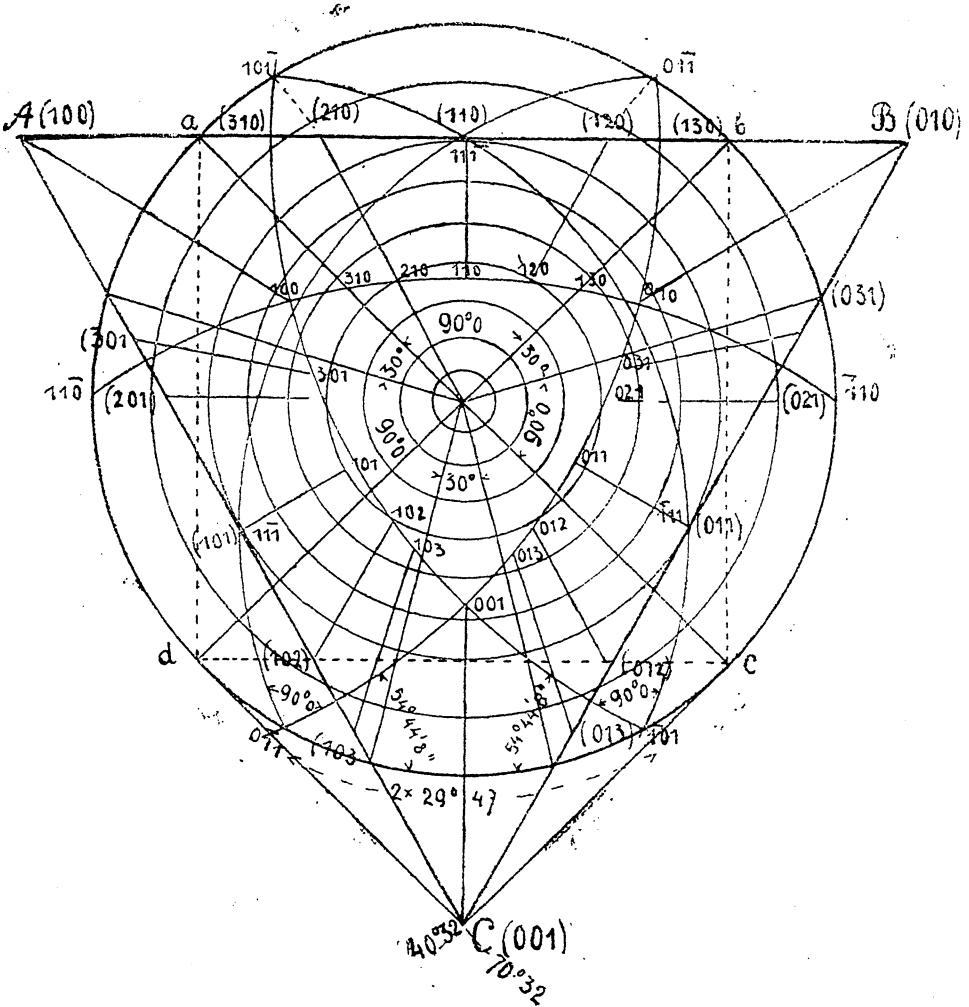
Эта геометрическая сѣть представляетъ такія замѣчательныя особенности, что завлекаетъ остановиться на нихъ съ нѣкоторою подробностью (фиг. 3).

Начать съ того, что изображаемый комплексъ есть тотъ же комплексъ кубической сингоніи, хотя и въ другой ориентировкѣ, но углы между соответственными гранями тождественны, напр., для квадрата тангенса угла (100):(111) имѣемъ величину 2, то есть уголъ равенъ  $54^{\circ}44'8''$ , а если возьмемъ на стереографической сѣткѣ точку, соответствующую наклоненію къ вертикали подъ вдвое большимъ угломъ (переходъ отъ гномостереографической проекціи къ гномонической), то касательныя изъ нея къ кругу проекціи, есть двѣ стороны основнаго квадрата. Въ нашемъ случаѣ это касательныя изъ точки  $C$ , а стороны квадрата  $Cc$  и  $Cd$ , а диаметрально противоположныя точки  $a$  и  $b$  образуютъ съ двумя первыми вписанный въ кругъ квадратъ, и притомъ  $ab$  или  $AB$  есть поляръ точки  $C$ .

Отсюда заключаемъ, что сторона  $AB$  трехугольника пересѣкаетъ кругъ хордою, стягивающей дугу круга подъ прямымъ угломъ, откуда получаемъ отмѣченныя на фиг. 3 три раза слѣдующія другъ за другомъ пары угловъ  $90^{\circ}$  и  $30^{\circ}$ <sup>1</sup>.

<sup>1</sup> По ошибкѣ внизу круга, надъ буквою  $C$  надписанъ уголъ  $2 \times 29^{\circ}47'$  вмѣсто истиннаго  $2 \times 30^{\circ}0'$ , т. е.  $60^{\circ}0'$ .

Далѣ на фигурѣ отмѣчены нѣкоторыя грани простѣйшихъ символовъ въ гномонической (по принципу центра тяжести) и гностереографической проекціи (уменьшается на сѣтки центральный уголъ вдвое на томъ же радиусѣ). При этомъ (210) оказывается на томъ же радиусѣ, что (10 $\bar{1}$ ), потому



Фиг. 3.

что  $(10\bar{1}) + (111) = (210)$ . Само собою понятно, что точка (310) (гномоническая проекція) стоитъ ровно посрединѣ между (110) и (100)<sup>1</sup>.

Мало того, изъ фигуры легко заключить, что геометрическая сѣть,

<sup>1</sup> Эти соотношенія вытекаютъ изъ правилъ нахождения центра тяжести или сложения параллельныхъ силъ. Напр., положеніе точки *a* найдемъ изъ условія  $Aa : aB = 1 : 3$ , откуда  $Aa = \frac{1}{4} AB = \frac{1}{2} A(110)$ . Ред.

какъ гномоническая и какъ гномостереографическая проекція въ сущности одинаковы. Въ самомъ дѣлѣ, эти безконечные образы опредѣляются четырьмя точками такой сѣти, лишь бы никакія изъ трехъ этихъ точекъ не находилась на одной прямой, а въ данномъ случаѣ легко указать на такія четыре точки, а именно гномоническія точки (111), (110), (011) и (101) и соответственно гномостереографическія (111), (11 $\bar{1}$ ), ( $\bar{1}$ 11) и (1 $\bar{1}$ 1). Въ самомъ дѣлѣ, если уголъ (110):(111) мы назовемъ  $\alpha$ , то непосредственно очевидно, что наклонъ гномонической точки (110) (также 011 и 101) есть  $\text{tg } 2\alpha$ , то есть тотъ самый, что уголъ наклона гномостереографическихъ точекъ (111) съ ( $\bar{1}$ 11), (1 $\bar{1}$ 1) и (11 $\bar{1}$ ). Что же касается точки (111), то она въ обоихъ геометрическихъ сѣтяхъ занимаетъ положеніе центра круга преобразованія, а потому неудивительно, что на прямой  $AB$  находятся не только показанныя на чертежѣ нѣкоторыя гномоническія точки, но и гномостереографическая точка 11 $\bar{1}$ , а на одной дугѣ большого круга находятся не только гномостереографическія точки 10 $\bar{1}$  и 010, 11 $\bar{1}$ ,  $\bar{1}$ 11, но и гномоническія точки (110) и (011)<sup>1</sup>.

Такимъ образомъ обѣ геометрическія сѣти разнообразно сплетаются другъ съ другомъ, имѣя точки даже иногда простыхъ символовъ, общими.

Примемъ за основу геометрической сѣти, то есть за центры координатъ, двѣ экстраточки (10 $\bar{1}$ ) и (01 $\bar{1}$ ). Тогда, чтобы опредѣлять символъ каждой данной гномонической точки мы проводимъ черезъ нее и основныя экстраточки прямыя координаты и опредѣляемъ символы точекъ пересѣченія этихъ двухъ прямыхъ съ прямою  $AB$  и составляемъ символъ пояса изъ этихъ и основныхъ экстраточекъ, а по двумъ символамъ координатъ находимъ и символъ ихъ точки пересѣченія, т. е. искомой точки.

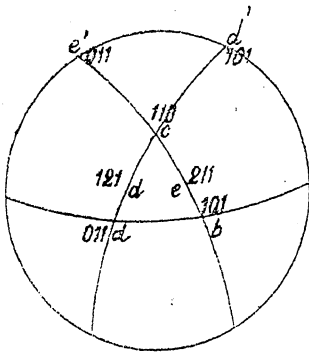
Напр., символъ центральной точки можетъ опредѣлиться такъ. Символы двухъ координатъ получаются  $\left| \begin{smallmatrix} 10\bar{1} \\ 210 \end{smallmatrix} \right| = 1\bar{2}1$  и  $\left| \begin{smallmatrix} 01\bar{1} \\ 120 \end{smallmatrix} \right| = 2\bar{1}\bar{1}$ , а потому  $\left| \begin{smallmatrix} 1\bar{2}1 \\ 2\bar{1}\bar{1} \end{smallmatrix} \right| = (333) = (111)$ .

Теперь приведемъ примѣръ вычисленія угловыхъ величинъ, характеризующихъ координаты, напр., сдѣлаемъ это для грани (111). Имѣемъ  $\left| \begin{smallmatrix} 111 \\ 101 \end{smallmatrix} \right| = 1\bar{2}1$  и  $\left| \begin{smallmatrix} 111 \\ 0\bar{1}1 \end{smallmatrix} \right| = 2\bar{1}\bar{1}$ , а  $\left| \begin{smallmatrix} 001 \\ 121 \end{smallmatrix} \right| = 210$  и  $\left| \begin{smallmatrix} 001 \\ 211 \end{smallmatrix} \right| = 120$ , поэтому получаемъ (такъ какъ зональный символъ есть  $\{13\}$ ) въ первомъ случаѣ  $2(100) + (010)$ , а во второмъ  $(100) + 2(010)$  и соответственные котангенсы  $3 \text{cotg } \alpha = 2 \text{cotg } 54^\circ 44' 8'' + \text{cotg } 144^\circ 44' 8'' = 1,412896 - 1,412896 = 0 = \text{cotg } 90^\circ$ . Соответствующія угловыя величины коорди-

<sup>1</sup> Центръ этого круга есть какъ разъ общая гномоническая точка (101) и гномостереографическая 1 $\bar{1}$ 1.



Разсмотримъ примѣръ кристалловъ минерала вивіанита. Онѣ, дѣйстви-  
тельно, какъ видно изъ изображенія, есть типично тригоналоидный моно-  
клинный и константы, приведенныя Goldschmidt'омъ въ его Krystallo-  
graphische Winkeltabellen, воспроизведены на фиг. 4 по соответствующемъ  
перечисленіи. Центры биполярныхъ координатъ на сферѣ образуютъ уголъ  
 $2 \times 29^{\circ}47'$ , т. е. очень близкій къ  $60^{\circ}$ , какъ это характеристично для  
гексагоналоидныхъ кристалловъ, изъ коихъ тригоналоидные составляютъ  
только одинъ отдѣлъ. По самому существу дѣла вытекаетъ, что за коорди-  
наты (лучи, какъ на плоскости чертежа, такъ и на сферѣ) за исходныя,  
принимаются тѣ, которыя проходятъ чрезъ точки  $(\bar{1}01)$  и  $(0\bar{1}1)$ , въ данномъ  
случаѣ подъ углами  $67^{\circ}13'$  и  $137^{\circ}31'$ .



Фиг. 5.<sup>2</sup>

Какъ видно изъ фиг. 4, комбинація, (взятая  
изъ Chemische Krystallographie Грота)  
состоитъ изъ формъ:  $\{100\}$ ,  $\{110\}$ ,  $\{\bar{1}\bar{1}0\}$ ,  
 $\{101\}$ ,  $\{102\}$  и  $\{\bar{1}\bar{1}2\}$ <sup>2</sup>. Угловыя величины  
координатъ въ значительной степени отчасти  
состоятъ изъ уже данныхъ двухъ константъ.  
Теперь выведемъ остальные, при чемъ  
 $\{100\}$  опредѣлены объемами величинами.

Для  $\{110\}$  и  $\{101\}$  имѣется общая  
координата, а именно опредѣляемая поясо-  
вымъ символомъ  $|12|$ <sup>4</sup>, и значить

$$2 \cotg \alpha = \cotg 137^{\circ}31' + \cotg 67^{\circ}13' = -1,091946 +$$

$$+ 0,420019 = -0,671927 = \cotg 123^{\circ}54'$$

и значить

$$\cotg \alpha = -0,335963 = \cotg 108^{\circ}34'$$

Для  $\{\bar{1}\bar{1}0\}$  и  $\{\bar{1}\bar{1}2\}$  координаты также непосредственно даны кон-  
стантами, а именно  $60^{\circ}13'$  и  $29^{\circ}47'$ ; онѣ же опредѣляютъ и положеніе  
обѣихъ биполярныхъ координатъ въ вертикальномъ поясѣ, то есть граней  
 $\{0\bar{1}1\}$  и  $\{\bar{1}01\}$ .

<sup>1</sup> По ошибкѣ на фигурѣ надписано  $2 \times 30^{\circ}$ .

<sup>2</sup> На верху фиг. 5 находящіеся при  $e'$  и  $d'$  символы должны быть замѣнены  $0\bar{1}1$  и  $10\bar{1}$ .

<sup>3</sup> На фиг. 4 пара граней  $(112)$  и  $(\bar{1}\bar{1}2)$  случайно пропущены.

<sup>4</sup> За  $|10|$  взять поясъ  $\begin{vmatrix} 110 \\ 0\bar{1}1 \end{vmatrix} = [111]$ , за  $|10|$  — поясъ  $\begin{vmatrix} 100 \\ 0\bar{1}1 \end{vmatrix} = [0\bar{1}1]$  и за  $|11|$  — поясъ

$$\begin{vmatrix} 010 \\ 0\bar{1}1 \end{vmatrix} = [100].$$

Для  $\{101\}$  сначала выводимъ символъ координаты  $\left| \begin{smallmatrix} 0\bar{1}1 \\ 101 \end{smallmatrix} \right| = [\bar{1}11]$ , а затѣмъ и точку пересѣченія  $\left| \begin{smallmatrix} 111 \\ 001 \end{smallmatrix} \right| = (110)$ , которая находится уже въ разсмотрѣнныхъ координатахъ.

Наконецъ, дѣлаемъ то же для грани (102) и получаемъ  $\left| \begin{smallmatrix} 102 \\ 011 \end{smallmatrix} \right| = |2\bar{1}\bar{1}|$  и  $\left| \begin{smallmatrix} 001 \\ 211 \end{smallmatrix} \right| = |120|$  и значить  $3 \cotg \alpha = \cotg 137^\circ 31' + 2 \cotg 67^\circ 13' = -1,091946 + 0,840038 = -0,251908 = 3 \cotg 94^\circ 48'$ .

Вообще нужно замѣтить, что въ этой системѣ зональные символы, которые относятся къ поясу  $[001]$  ( $AB$ ) и главнымъ гранямъ (100) и (010), рассчитываются иначе, чѣмъ для всѣхъ остальныхъ. Если въ этомъ поясѣ получимъ грань  $(p_1 p_2 0)$ , то это подразумеваетъ, что отрѣзокъ (100):(010) раздѣленъ на  $(p_1 + p_2)$  частей и такихъ частей взято  $p_1$  или  $p_2$ , при чемъ сами эти исходныя грани получаютъ зональные символы соответственно  $|11|$  и  $|01|$ .

Въ моихъ прежнихъ статьяхъ о кристаллографическихъ вычисленіяхъ въ системѣ биполярныхъ координатъ я трактовалъ тему болѣе широко и за центры такихъ координатъ допускалъ принятіе болѣе или менѣе произвольныхъ точекъ, выражающихъ грани съ болѣе или менѣе простыми символами. Для облегченія ввода въ практику новыхъ пріемовъ весьма удобно принять строго опредѣленные шаблоны, выбранные съ возможною степенью простоты. Въ двухъ предыдущихъ примѣрахъ я предложилъ такой шаблонъ для тригоналоидныхъ кристалловъ, принимая за центры координатъ точки, выражающія грани  $(\bar{1}01)$  и  $(0\bar{1}1)$ . Избѣгая раньше всякихъ шаблоновъ, я основывался на томъ, что какой бы шаблонъ ни былъ предложенъ, въ кристаллѣ могутъ не оказаться исходныя грани, выбранныя для шаблона, и тогда операціи по шаблону невозможны. Напр., въ сильно положительныхъ кристаллахъ (напр. изъ кристалловъ, описанныхъ Б. П. Орелкинымъ<sup>1</sup>, въ динитро-диизопропилѣ) чаще всего отсутствуютъ грани вертикальнаго пояса (кромѣ  $1\bar{1}0$ ) и потому  $(\bar{1}01)$  и  $(0\bar{1}1)$  не могутъ быть избраны за исходныя. Часто отсутствуютъ даже (100), (010) и (001). Допустимъ это (фиг. 5), но въ такомъ случаѣ должны быть  $c$  (110),  $a$  (011)  $b$  (101) и пусть имѣются еще  $e$  (211) и  $d$  (121). Юстируемъ кристаллъ по грани  $c$  (110) и опредѣлимъ  $cd$  и  $ca$ ,  $ce$  и  $cb$ , а также уголъ  $acb$ . Въ поясѣ  $ac$  мы имѣемъ пары гармоническихъ  $a$  съ  $c$  и  $d$  съ  $d'$ , въ поясѣ  $bc$  —  $b$  съ  $c$  и  $e$  съ  $e'$ . Поэтому  $\cotg ad' = 2 \cotg ac - \cotg ad$  и  $\cotg be' = 2 \cotg bc - \cotg be$ . Имѣя уголъ  $acb = d'ce'$  и величины угловъ  $cd'$  и  $ce'$ , мы въ треугольникѣ  $cd'e'$

<sup>1</sup> Записки Горнаго Института, VI, 92.

легко вычисляемъ углы какъ  $e'd'$ , такъ и оба угла при вершинахъ  $d'$  и  $e'$ , т. е. опредѣляемъ шаблонныя три константы. Съ другой стороны, теперь въ треугольникѣ  $ace'$  стали извѣстны стороны  $ac$ ,  $ce'$  и уголъ  $ace'$ , а въ треугольникѣ  $bcd'$  стороны  $bc$ ,  $cd'$  и уголъ  $bcd'$ , почему легко вычислимъ и углы  $ae's$  и  $bd's$ , то есть двѣ остальные константы для общаго случая.

Но легко сообразить, что задача разрѣшима лишь немного сложнѣе, если въ поясахъ  $ac$  и  $bc$  вмѣсто (121) и (211) представлены какія-нибудь другія плоскости, лишь бы онѣ имѣли качества, годныя для измѣренія.

Такимъ образомъ, для тригоналоидныхъ кристалловъ удобный шаблонъ можно считать установленнымъ.

Обращаю особое вниманіе на то, что если въ кристаллѣ содержится комбинація граней, подобная только что приведенной на фиг. 4, то даже если онъ относится къ трилинной сингоніи, его константы могутъ быть опредѣлены измѣреніями при одной единственной юстировкѣ.