Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

G. I. Trushin, A λ-conjugate system,
Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat., 1962, Number 4, 161–169

https://www.mathnet.ru/eng/ivm2090

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
https://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 18.97.14.91
December 7, 2025, 12:46:06

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1962 МАТЕМАТИКА № 4 (29)

Г. И. Трушин

λ-СОПРЯЖЕННАЯ СИСТЕМА

ВВЕДЕНИЕ

Как известно, два касательных направления на поверхности называются сопряженными, если они обращают в нуль билинейные формы, присоединенные к квадратичным асимптотическим формам. В настоящей работе вводится понятие сопряженности трех касательных направлений (λ-сопряженность) на p-мерной поверхности в n-мерном проективном пространстве относительно кубичных асимптотических форм.

Основным предметом нашего исследования будут λ-сопряженные системы, являющиеся специальным классом поверхностей, несущим на себе λ-сопряженные сети. Выясняется геометрический смысл λ-сопряженности, доказывается теорема существования трехмерной λ-сопряженной системы и, наконец, рассматривается частный случай трехмерной λ-сопряженной системы, обладающей свойством расслояемости по линиям λ-сопряженной сети. Работа выполнена методом подвижного репера и внешних форм Картана [1], [2].

§ 1. Проективный репер. Асимптотические формы

К каждой точке A p-мерной поверхности в n-мерном проективном пространстве присоединим проективный репер (который мы не предполагаем голономным), образованный из $n+1$ базисных точек $A, A_1, \ldots, A_p$, из которых

1) p точек A_i $(i=1, \ldots, p)$ лежат в касательном подпространстве;

2) q точек A_α $(\alpha=p+1, \ldots, p+q)$ лежат в 1-ом соприкасающемся пространстве (пространство первых и вторых дифференциалов), вне касательного подпространства;

3) r точек A_λ $(\lambda=p+q+1, \ldots, p+q+r)$ лежат во 2-ом соприкасающемся пространстве (пространство дифференциалов 1-го, 2-го и 3-го порядков), вне 1-го соприкасающегося пространства;

4) $n-p-q-r$ точек A_σ $(\sigma=p+q+r+1, \ldots, n)$ лежат в объемлющем пространстве, вне 2-го соприкасающегося пространства (считаем $n \geqslant p+q+r$).

Отсюда уравнения инфинитезимальных перемещений репера:

$$\left.\begin{aligned}
dA &= \omega_0^0 A + \sum_i \omega^i A_i;\\
dA_i &= \omega_i^0 A + \sum_j \omega_i^j A_j + \sum_\alpha \omega_i^\alpha A_\alpha;\\
dA_\alpha &= \omega_\alpha^0 A + \sum_i \omega_\alpha^i A_i + \sum_\beta \omega_\alpha^\beta A_\beta + \sum_\lambda \omega_\alpha^\lambda A_\lambda;\\
dA_\lambda &= \omega_\lambda^0 A + \sum_i \omega_\lambda^i A_i + \sum_\alpha \omega_\lambda^\alpha A_\alpha + \sum_\mu \omega_\lambda^\mu A_\mu + \sum_\sigma \omega_\lambda^\sigma A_\sigma;\\
dA_\sigma &= \omega_\sigma^0 A + \sum_i \omega_\sigma^i A_i + \sum_\alpha \omega_\sigma^\alpha A_\alpha + \sum_\lambda \omega_\sigma^\lambda A_\lambda + \sum_\rho \omega_\sigma^\rho A_\rho .
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Уравнения структуры:

$$D\omega^i = [\omega_0^0 \omega^i] + \sum_j [\omega^j \omega_j^i]; \qquad D\omega_\alpha^\lambda = \sum_\beta [\omega_\alpha^\beta \omega_\beta^\lambda] + \sum_\mu [\omega_\alpha^\mu \omega_\mu^\lambda];$$

$$D\omega_i^\alpha = \sum_j [\omega_i^j \omega_j^\alpha] + \sum_\beta [\omega_i^\beta \omega_\beta^\alpha]; \qquad D\omega_\lambda^\sigma = \sum_\mu [\omega_\lambda^\mu \omega_\mu^\sigma] + \sum_\rho [\omega_\lambda^\rho \omega_\rho^\sigma].$$

Индексы пробегают следующие значения:

$$i, j = 1, \dots, p; \quad \alpha, \beta = p+1, \dots, p+q; \quad \lambda, \mu = p+q+1, \dots, p+q+r;$$
$$\sigma, \rho = p+q+r+1, \dots, n.$$

Выбор репера определит на поверхности p семейств базисных линий $\omega^1, \dots, \omega^p$, на касательных к которым располагаются базисные точки репера A_i.

Касательное направление на поверхности вполне определяется заданием значений главных форм ω^i. Например, три различных касательных направления d_1, d_2, d_3 будут определяться тремя различными совокупностями:

$$\{\omega^1(d_1), \dots, \omega^p(d_1)\}, \quad \{\omega^1(d_2), \dots, \omega^p(d_2)\}, \quad \{\omega^1(d_3), \dots, \omega^p(d_3)\}.$$

Определением квадратичных Φ^α и кубичных Ψ^λ асимптотических форм могут служить равенства

$$d^2 A \equiv \sum_\alpha \Phi^\alpha A_\alpha \pmod{A, A_1, \dots, A_p},$$

$$d^3 A \equiv \sum_\lambda \Psi^\lambda A_\lambda \pmod{A, A_1, \dots, A_p, A_{p+1}, \dots, A_{p+q}}.$$

Выражения асимптотических форм:

$$\Phi^\alpha = \sum_i \omega^i \omega_i^\alpha = \sum_{i,j} b_{ij}^\alpha \omega^i \omega^j,$$

$$\Psi^\lambda = \sum_{i,\alpha} \omega^i \omega_i^\alpha \omega_\alpha^\lambda = \sum_\alpha \Phi^\alpha \omega_\alpha^\lambda = \sum_{i,j,k} B_{ijk}^\lambda \omega^i \omega^j \omega^k.$$

Эти выражения можно записать в другом виде, проводя суммирование по сочетаниям и считая разные индексы различными:

$$\Phi^\alpha = \sum_i b_{ii}^\alpha (\omega^i)^2 + 2 \sum_{i,j} b_{ij}^\alpha \omega^i \omega^j,$$

$$\Psi^\lambda = \sum_i B_{iii}^\lambda (\omega^i)^3 + 3 \sum_{i,j} B_{iij}^\lambda (\omega^i)^2 \omega^j + 6 \sum_{i,j,k} B_{ijk}^\lambda \omega^i \omega^j \omega^k.$$

Все коэффициенты b^{α}_{ij}, B^{λ}_{iij}, B^{λ}_{ijk} симметричны по нижним индексам. Числа q и r независимых форм Φ^{α} и Ψ^{λ} соответствуют числу базисных точек репера A_{α} и A_{λ}. Для общей p-мерной поверхности числа q и r не могут превышать значений $\frac{p(p+1)}{2}$ и $\frac{p(p+1)(p+2)}{6}$ соответственно.

Заметим, что число и вид форм Φ^{α} и Ψ^{λ} должны быть согласованы. Задание форм Φ^{α} определяет верхнюю границу числа форм Ψ^{λ}, а задание форм Ψ^{λ} определяет нижнюю границу числа форм Φ^{α}. Случай наибольшего возможного числа независимых форм Φ^{α} и Ψ^{λ} интересен в том отношении, что выражения этих форм могут быть приведены к наиболее простому виду, который мы будем называть каноническим. Для записи асимптотических форм в каноническом виде мы будем употреблять двух- и трехиндексные обозначения вместо индексов α и λ:

$$\Phi^{(ii)} = (\omega^i)^2, \quad \Phi^{(ij)} = 2\omega^i\omega^j, \tag{2}$$

$$\Psi^{(iii)} = (\omega^i)^3, \quad \Psi^{(iij)} = 3(\omega^i)^2\omega^j, \quad \Psi^{(ijk)} = 6\omega^i\omega^j\omega^k. \tag{3}$$

Легко показать, что канонизация форм Φ^{α} и Ψ^{λ} не определяет однозначным образом базисные точки A_{α} и A_{λ} (т. е. точки $A_{(ii)}$, $A_{(ij)}$, $A_{(iii)}$, $A_{(iij)}$, $A_{(ijk)}$), но в значительной степени ограничивает их положение.

§ 2. λ-сопряженность

Определение 1. Три касательных направления d_1, d_2, d_3 поверхности назовем λ-сопряженными, если они обращают в нуль трилинейные формы, присоединенные к кубичным асимптотическим формам

$$\Psi^{\lambda}(d_1, d_2, d_3) = \sum_{i,j,k} B^{\lambda}_{ijk}\omega^i(d_1)\omega^j(d_2)\omega^k(d_3) = 0. \tag{4}$$

Обратим внимание на симметрию понятия λ-сопряженности относительно каждого из трех сопряженных направлений.

Определение 2. Три семейства линий на p-мерной поверхности назовем λ-сопряженными, если касательные к ним в каждой точке поверхности образуют тройку λ-сопряженных направлений.

Включим линии этих трех семейств в число базисных линий $\omega^1, \ldots, \omega^p$ поверхности, и пусть линии ω^1, ω^2, ω^3 будут нашими линиями, касательные направления к которым будут определяться следующими тремя совокупностями значений форм:

$$\{\omega^1(d_1), 0, 0, \ldots, 0\}, \quad \{0, \omega^2(d_2), 0, \ldots, 0\}, \quad \{0, 0, \omega^3(d_3), \ldots, 0\}.$$

Внося их в трилинейные формы (4), получим $B^{\lambda}_{123} = 0$.

Итак, для того, чтобы три семейства базисных линий ω^i, ω^j, ω^k на p-мерной поверхности были λ-сопряженными, необходимо и достаточно, чтобы в выражении каждой кубичной формы Ψ^{λ} отсутствовало слагаемое с произведением $\omega^i\omega^j\omega^k$.

Определение 3. p-мерной λ-сопряженной системой назовем такую p-мерную поверхность, на которой существует неособая сеть из p семейств линий, каждая тройка которых λ-сопряжена. Такую неособую сеть из p семейств линий будем называть λ-сопряженной сетью.

Из предыдущего следует, что необходимым и достаточным условием того, чтобы p-мерная поверхность была λ-сопряженной системой с λ-сопряженной сетью из базисных линий, является отсутствие в кубичных асимптотических формах слагаемых с произведениями $\omega^i\omega^j\omega^k$ с различными i, j, k. Следовательно, кубичные асимптотические формы для λ-сопряженной системы имеют вид (суммирование по сочетаниям)

$$\Psi^\lambda = \sum_i B^\lambda_{iii} (\omega^i)^3 + 3 \sum_{i,j} B^\lambda_{iij} (\omega^i)^2 \omega^j \tag{5}$$

Число форм (5) не может превышать p^2.

Мы условимся рассматривать случай наибольшего возможного числа форм Φ^α и Ψ^λ. При этом условии определение λ-сопряженной системы принимает однозначный смысл. Канонический вид асимптотических форм для λ-сопряженной системы:

$$\left.\begin{aligned} \Phi^{(ii)} &= (\omega^i)^2, \quad \Phi^{(ij)} = 2\omega^i\omega^j \\ \Psi^{(iii)} &= (\omega^i)^3, \quad \Psi^{(iij)} = 3(\omega^i)^2\omega^j. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

§ 3. Геометрический смысл λ-сопряженности

Рассмотрим p-мерную поверхность, которую мы сейчас не предполагаем λ-сопряженной системой, и приведем ее квадратичные асимптотические формы Φ^α к каноническому виду (2). Мы уже знаем, что последняя операция не определяет однозначно базисные точки A_α (двухиндексные точки), но в значительной степени ограничивает их положение. Закрепим все базисные точки репера в любом допустимом для них положении и рассмотрим произвольную точку P трехмерного пространства $(AA_1A_2A_{(12)})$:

$$P = \xi A + \eta A_1 + \zeta A_2 + A_{(12)}$$

(ξ, η, ζ произвольны).

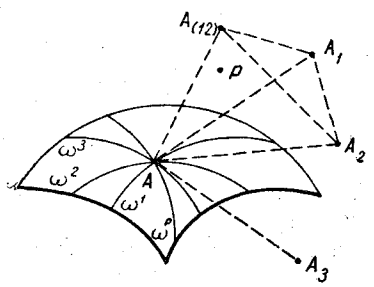

Рис. 1.

Потребуем, чтобы точка P не выходила из 1-го соприкасающегося пространства поверхности, когда точка A смещается по направлению базисной линии ω^3 (рис. 1). Инфинитезимальное смещение точки P:

$$dP = \Omega A + \sum_i \Omega^i A_i + \sum_\alpha \Omega^\alpha A_\alpha + \sum_\lambda \omega^\lambda_{(12)} A_\lambda .$$

С другой стороны, по условию, при $\omega^i = \delta^i_3$ $(i = 1, \ldots, p)$ должно быть $dP = \theta A + \sum_i \varphi^i A_i + \sum_\alpha \psi^\alpha A_\alpha$.

Мы видим, что поставленное требование будет выполнено, если будет выполняться равенство $\sum_\alpha \omega^\lambda_{(12)} A_\lambda = 0$. Отсюда, ввиду независимости точек A_λ, $\omega^\lambda_{(12)} = 0$.

Получим некоторые соотношения. Из $\omega^\alpha = 0$ имеем $\sum_i [\omega^i \omega^\alpha_i] = 0$, отсюда $\omega^\alpha_i = \sum_j b^\alpha_{ij} \omega^j$. Из $\omega^\lambda_i = 0$ имеем $\sum_\alpha [\omega^\alpha_i \omega^\lambda_\alpha] = 0$ или $\sum_{\alpha, j} [b^\alpha_{ij} \omega^j \omega^\lambda_\alpha] =$

$=0$, или $\sum_j [\omega^j \sum_\alpha b_{ij}^\alpha \omega_\alpha^\lambda]=0$, отсюда $\sum_\alpha b_{ij}^\alpha \omega_\alpha^\lambda = \sum_k B_{ijk}^\lambda \omega^k$ (коэффициенты b_{ij}^α, B_{ijk}^λ те самые, которые входят в формы Φ^α и Ψ^λ).

Благодаря канонизации форм Φ^α в левой части последнего равенства из всей суммы останется только одно слагаемое с коэффициентом $b_{ij}^{(ij)} \neq 0$, тогда как все остальные коэффициенты b_{ij}^α при $\alpha \neq (ij)$ равны нулю. Имеем $b_{ij}^{(ij)} \omega_{(ij)}^\lambda = \sum_k B_{ijk}^\lambda \omega^k$. В частности, для $i=1$, $j=2$ $b_{12}^{(12)} \omega_{(12)}^\lambda = \sum_k B_{12k}^\lambda \omega^k$. Подставляя сюда $\omega_{(12)}^\lambda = 0$, $\omega^i = \delta_3^i$, получим $B_{123}^\lambda = 0$. Это равенство означает, что касательные к базисным линиям ω^1, ω^2, ω^3 в точке A являются λ-сопряженными.

Отсюда также следует равноправность направлений AA_1, AA_2, AA_3 в наших построениях, и мы имели бы тот же результат, если вместо пространства $(AA_1A_2A_{(12)})$ рассмотрели пространство $(AA_1A_3A_{(13)})$ или $(AA_2A_3A_{(23)})$. Доказана выражающая геометрический смысл λ-сопряженности

Теорема. *Для того, чтобы на p-мерной поверхности с приведенными к каноническому виду квадратичными асимптотическими формами Φ^α пространство $(AA_1A_2A_{(12)})$ не выходило из 1-го соприкасающегося пространства, когда точка A смещается в направлении AA_3, необходимо и достаточно, чтобы направления AA_1, AA_2, AA_3, касательные к базисным линиям ω^1, ω^2, ω^3, были λ-сопряженными.*

Следствие. Для того, чтобы p-мерная поверхность была λ-сопряженной системой с λ-сопряженной сетью из базисных линий, необходимо и достаточно, чтобы в случае приведения квадратичных асимптотических форм Φ^α к каноническому виду все пространства $(AA_iA_jA_{(ij)})$ оставались бы в 1-м соприкасающемся пространстве поверхности, когда точка A смещается в направлении любой базисной линии ω^k $(k \neq i, j)$.

§ 4. Теорема существования трехмерной λ-сопряженной системы

Теорема. *Трехмерная λ-сопряженная система существует с произволом 12-ти функций 3-х аргументов.*

1. Теперь $p=3$, $q=6$, $r=9$, $n \geqslant 18$. Асимтотические формы считаем приведенными к каноническому виду (6). По формулам

$$\omega_i^\alpha = \frac{1}{2}\frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial \omega^i} \quad \text{и} \quad \Psi^\lambda = \sum_\alpha \Phi^\alpha \omega_\alpha^\lambda$$

находим выражения форм ω_i^α и ω_α^λ. Получаем следующую систему Пфаффа:

$$\left.\begin{array}{l}
\omega^\alpha = 0, \quad \omega_i^\lambda = 0, \\
\omega_i^{(ii)} = \omega^i, \quad \omega_j^{(ii)} = 0, \quad \omega_i^{(ij)} = \omega^j, \quad \omega_k^{(ij)} = 0, \\
\omega_{(ii)}^{(iii)} = \omega^i, \quad \omega_{(ij)}^{(iii)} = \omega_{(jj)}^{(iii)} = \omega_{(jk)}^{(iii)} = 0, \\
\omega_{(ii)}^{(iij)} = \omega^j, \quad \omega_{(ij)}^{(iij)} = \omega^i, \quad \omega_{(jj)}^{(iij)} = \omega_{(ik)}^{(iij)} = \omega_{(jk)}^{(iij)} = \omega_{(kk)}^{(iij)} = 0, \\
\omega_{(ii)}^\sigma = 0, \quad \omega_{(ij)}^\sigma = 0.
\end{array}\right\} \qquad (7)$$

Индексы пробегают значения

$$i,\ j,\ k,\ h,\ m = 1,\ 2,\ 3;\quad \alpha,\ (ii),\ (ij) = 4, \ldots, 9;$$
$$\lambda,\ (iii),\ (iij) = 10, \ldots, 18;\quad \sigma = 19, \ldots, n.$$

2. К системе (7) присоединяем внешние квадратичные уравнения, полученные внешним дифференцированием уравнений этой системы. Произвол решения определяет подсистема квадратичных уравнений, полученных внешним дифференцированием 14-ти уравнений, расположенных в трех средних строках системы (7). Условимся эти 14 уравнений, а также соответствующие им квадратичные уравнения нумеровать № 1, № 2, ..., № 14, в том порядке, как они записаны в системе (7).

Каждое из этих уравнений, в свою очередь, является системой из некоторого числа уравнений. Общее число этих уравнений равно 72. Для исследования подсистемы нужно вычислить число N — произвол наиболее общего интегрального элемента, и Q — число Картана.

3. Будем пользоваться следующими условными обозначениями:

1) Подчеркивание одной искривленной чертой двух индексов, например $l^{(ii)}_{(ih)\underset{\smile}{m}}$, будет означать симметрию данного параметра по этим двум индексам, т. е. $l^{(ii)}_{(ih)m} = l^{(ii)}_{(im)h}$.

2) Подчеркивание двумя чертами трех индексов, например $l^{(ii)}_{\underline{\underline{(ih)m}}}$, будет означать симметрию данного параметра по этим трем индексам.

3) Подчеркивание волнистой чертой двух пар индексов, например $l^{(iii)}_{\underset{\sim}{(jj)k}\underset{\sim}{k}}$, будет означать симметрию данного параметра на перестановку этих двух пар индексов, т. е. $l^{(iii)}_{(jj)k} = l^{(iii)}_{(kk)j}$.

N равно числу независимых параметров в выражениях вторичных форм (по терминологии Картана [2]), полученных из квадратичных уравнений по лемме Картана. Напишем эти выражения. Одновременно будем вести подсчёт числа вторичных форм, в левых частях выражений, и числа независимых параметров, в правых частях выражений, (см. числа, поставленные снизу):

из уравнения № 1
$$\begin{cases} \underset{3}{\Omega}^{(ii)}_{(ii)} = \underset{3}{l}^{(ii)}_{(ii)i}\omega^i + \underset{6}{l}^{(ii)}_{(ii)\underset{\smile}{j}}\omega^j + l^{(ii)}_{(ii)\underset{\smile}{k}}\omega^k, \\ \underset{6}{\Omega}^{(ii)}_{(ij)} = l^{(ii)}_{(ij)\underset{\smile}{i}}\omega^i + \underset{6}{l}^{(ii)}_{(ij)j}\omega^j + \underset{3}{l}^{(ii)}_{(ij)\underset{\smile}{k}}\omega^k; \end{cases}$$

из уравнения № 2
$$\begin{cases} \underset{6}{\omega}^{(ii)}_{(jj)} = l^{(ii)}_{(ij)j}\omega^i + \underset{6}{l}^{(ii)}_{(jj)j}\omega^j + l^{(ii)}_{\underline{\underline{(jj)k}}}\omega^k, \\ \underset{3}{\omega}^{(ii)}_{(jk)} = \underset{3}{l}^{(ii)}_{(ij)\underset{\smile}{k}}\omega^i + l^{(ii)}_{\underline{\underline{(jk)j}}}\omega^j + l^{(ii)}_{\underline{\underline{(jk)k}}}\omega^k; \end{cases}$$

из уравнения № 3
$$\begin{cases} \underset{3}{\Omega}^{(ij)}_{(ij)} = \underset{6}{l}^{(ij)}_{\underline{\underline{(ij)i}}}\omega^i + l^{(ij)}_{\underline{\underline{(ij)j}}}\omega^j + \underset{3}{l}^{(ij)}_{\underline{\underline{(ij)k}}}\omega^k, \\ \underset{6}{\Omega}^{(ij)}_{(jj)} = l^{(ij)}_{\underline{\underline{(jj)i}}}\omega^i + \underset{6}{l}^{(ij)}_{(jj)j}\omega^j + \underset{6}{l}^{(ij)}_{(jj)\underset{\smile}{k}}\omega^k, \\ \underset{6}{\Omega}^{(ij)}_{(jk)} = l^{(ij)}_{\underline{\underline{(jk)i}}}\omega^i + l^{(ij)}_{(jk)\underset{\smile}{j}}\omega^j + l^{(ij)}_{(jk)k}\omega^k; \end{cases}$$

из уравнения № 4: $\underset{3}{\omega}^{(ij)}_{(kk)} = l^{(ij)}_{(ik)k}\omega^i + l^{(ij)}_{(jk)k}\omega^j + \underset{3}{l}^{(ij)}_{(kk)k}\omega^k;$

из уравнения № 5
$$\begin{cases} \underset{3}{\Omega}^{(iii)}_{(iii)} = \underset{3}{l}^{(iii)}_{(iii)i}\omega^i + \underset{6}{l}^{(iii)}_{(iii)j}\omega^j + l^{(iii)}_{(iii)k}\omega^k, \\ \underset{6}{\Omega}^{(iii)}_{(iij)} = l^{(iii)}_{(iij)i}\omega^i + \underset{6}{l}^{(iii)}_{(iij)j}\omega^j; \end{cases}$$

из уравнения № 6:
$$\underset{6}{\omega}^{(iii)}_{(jji)} = \underset{6}{l}^{(iii)}_{(jji)j}\omega^j + l^{(iii)}_{(iij)j}\omega^i;$$

из уравнения № 7:
$$\underset{6}{\omega}^{(iii)}_{(jjj)} = \underset{6}{l}^{(iii)}_{(jjj)j}\omega^j + (l^{(iii)}_{(jji)j} - l^{(ii)}_{(ji)j})\,\omega^i + l^{(iii)}_{(jjk)j}\omega^k;$$

из уравнения № 8:
$$\underset{6}{\omega}^{(iii)}_{(jjk)} = \underset{6}{l}^{(iii)}_{(jjk)j}\omega^j + \underset{3}{l}^{(iii)}_{(jjk)k}\omega^k - l^{(ii)}_{(jk)j}\omega^i;$$

из уравнения № 9
$$\begin{cases} \underset{6}{\Omega}^{(iij)}_{(iii)} = \underset{6}{l}^{(iij)}_{(iii)i}\omega^i + \underset{6}{l}^{(iij)}_{(iii)j}\omega^j + \underset{6}{l}^{(iij)}_{(iii)k}\omega^k, \\ \underset{6}{\Omega}^{(iij)}_{(iij)} = l^{(iij)}_{(iij)i}\omega^i + \underset{6}{l}^{(iij)}_{(iij)j}\omega^j + \underset{6}{l}^{(iij)}_{(iij)k}\omega^k, \\ \underset{6}{\Omega}^{(iij)}_{(iik)} = l^{(iij)}_{(iik)j}\omega^i + l^{(iij)}_{(iik)j}\omega^j + \underset{6}{l}^{(iij)}_{(iik)k}\omega^k; \end{cases}$$

из уравнения № 10
$$\begin{cases} \underset{6}{\omega}^{i}_{k} = \underset{6}{l}^{i}_{kk}\omega^k - (l^{(iij)}_{(iij)k} + l^{(ii)}_{(ii)k})\,\omega^i - (l^{(iii)}_{(jji)k} + l^{(ij)}_{(jj)k})\,\omega^j, \\ \text{соотношение } l^{(ij)}_{(ij)j} + l^{(ii)}_{(ii)j} - l^{(ij)}_{(jji)i} - l^{(ij)}_{(jj)i} = 0; \end{cases}$$

из уравнения № 11
$$\begin{cases} \underset{6}{\Omega}^{(iij)}_{(jji)} = l^{(iij)}_{(jji)i}\omega^i + \underset{6}{l}^{(iij)}_{(jji)j}\omega^j + \underset{6}{l}^{(iij)}_{(jji)k}\omega^k, \\ \underset{6}{\Omega}^{(iij)}_{(jjj)} = l^{(iij)}_{(jjj)i}\omega^i + \underset{6}{l}^{(iij)}_{(jjj)j}\omega^j + l^{(iij)}_{(jjj)k}\omega^k, \\ \underset{6}{\Omega}^{(iij)}_{(jjk)} = l^{(iij)}_{(jjk)i}\omega^i + l^{(iij)}_{(jjk)j}\omega^j + \underset{6}{l}^{(iij)}_{(jjk)k}\omega^k; \end{cases}$$

из уравнения № 12:
$$\underset{6}{\omega}^{(iij)}_{(kki)} = \underset{6}{l}^{(iij)}_{(kki)k}\omega^k + l^{(iij)}_{(iik)k}\omega^i - (l^{(ii)}_{(ik)k} + l^{i}_{kk})\,\omega^j;$$

из уравнения № 13:
$$\underset{6}{\omega}^{(iij)}_{(kkj)} = \underset{6}{l}^{(iij)}_{(kkj)k}\omega^k - (l^{(ij)}_{(jk)k} + l^{i}_{kk})\,\omega^i + l^{(iij)}_{(jjk)k}\omega^j;$$

из уравнения № 14:
$$\underset{6}{\omega}^{(iij)}_{(kkk)} = \underset{6}{l}^{(iij)}_{(kkk)k}\omega^k + (l^{(iij)}_{(kki)k} - l^{(ij)}_{(kk)k})\,\omega^i - (l^{(iij)}_{(kkj)k} - l^{(ii)}_{(kk)k})\omega^j.$$

Таким образом, получаем $N = 186$, число вторичных форм $g = 123$.

4. Число Картана выражается формулой $Q = S_1 + 2S_2 + 3S_3$, где S_1, S_2, S_3 — характеры системы.

Вычисление характеров S_1, S_2, S_3 связано с вычислением рангов соответствующих систем билинейных ковариантов. Ранг той или иной системы будем определять с помощью разрешения уравнений её относительно какой-то части вторичных форм.

Характер S_1 равен рангу системы билинейных ковариантов, полученных из системы квадратичных уравнений. Этот характер равен числу уравнений, т. е. $S_1 = 72$. Понижение ранга означало бы, что не все квадратичные уравнения были линейно независимыми.

Для вычисления характера S_2 нужно найти ранг $S_1 + S_2$ системы билинейных ковариантов с удвоенным числом уравнений, по сравнению с первоначальной системой. Такая система образуется из урав-

нений — близнецов, которые мы будем рассматривать одновременно, обозначая их одним номером. Последовательное разрешение системы дает следующее:

из уравнений № 2: $\omega^{(ii)}_{(jj)} = -\dfrac{u^{[k}v^{i]}}{u^{[j}v^{i]}}\,\omega^{(ii)}_{(jk)}$; $\Omega^{(ii)}_{(ij)} = -\dfrac{u^{[k}v^{j]}}{u^{[i}v^{j]}}\,\omega^{(ii)}_{(jk)}$;

из уравнений № 12
$$\begin{cases} \Omega^{(iij)}_{(iik)} = \dfrac{u^{[j}v^{k]}}{u^{[i}v^{k]}}\left(-\dfrac{u^{[j}v^{k]}}{u^{[i}v^{k]}}\,\omega^{(ii)}_{(jk)} + \omega^{i}_{k}\right), \\ \omega^{(iij)}_{(kki)} = \dfrac{u^{[j}v^{i]}}{u^{[k}v^{i]}}\left(-\dfrac{u^{[j}v^{k]}}{u^{[i}v^{k]}}\,\omega^{(ii)}_{(jk)} + \omega^{i}_{k}\right); \end{cases}$$

из уравнений № 4: $\Omega^{(ij)}_{(jk)} = -\dfrac{u^{[k}v^{i]}}{u^{[j}v^{i]}}\,\omega^{(ij)}_{(kk)}$;

из уравнений № 13
$$\begin{cases} \Omega^{(iij)}_{(jjk)} = \dfrac{u^{[i}v^{k]}}{u^{[j}v^{k]}}\left(-\dfrac{u^{[k}v^{i]}}{u^{[j}v^{i]}}\,\omega^{(ij)}_{(kk)} + \omega^{i}_{k}\right), \\ \omega^{(iij)}_{(kkj)} = \dfrac{u^{[i}v^{j]}}{u^{[k}v^{j]}}\left(-\dfrac{u^{[k}v^{i]}}{u^{[j}v^{i]}}\,\omega^{(ij)}_{(kk)} + \omega^{i}_{k}\right). \end{cases}$$

Для уравнений № 14 приведем более подробные выкладки. Напишем эти уравнения:

$$u^{i}\left(\omega^{(iij)}_{(kki)} - \omega^{(ij)}_{(kk)}\right) + u^{j}\left(\omega^{(iij)}_{(kkj)} - \omega^{(ii)}_{(kk)}\right) + u^{k}\omega^{(iij)}_{(kkk)} = 0,$$
$$v^{i}\left(\omega^{(iij)}_{(kki)} - \omega^{(ij)}_{(kk)}\right) + v^{j}\left(\omega^{(iij)}_{(kkj)} - \omega^{(ii)}_{(kk)}\right) + v^{k}\omega^{(iij)}_{(kkk)} = 0.$$

а) Исключая средние слагаемые, получим

$$u^{[i}v^{j]}\left(\omega^{(iij)}_{(kki)} - \omega^{(ij)}_{(kk)}\right) + u^{[k}v^{j]}\omega^{(iij)}_{(kkk)} = 0.$$

Отсюда, после подстановки выражения для формы $\omega^{(iij)}_{(kki)}$, найдем

$$\omega^{(iij)}_{(kkk)} = -\left(\frac{u^{[i}v^{j]}}{u^{[i}v^{k]}}\right)^{2}\omega^{(ii)}_{(jk)} + \frac{(u^{[i}v^{j]})^{2}}{u^{[k}v^{i]}\,u^{[k}v^{j]}}\,\omega^{i}_{k} + \frac{u^{[i}v^{j]}}{u^{[k}v^{j]}}\,\omega^{(ii)}_{(kk)}.$$

в) Исключая слагаемые с формой $\omega^{(iij)}_{(kkk)}$, получим

$$u^{[i}v^{k]}\left(\omega^{(iij)}_{(kki)} - \omega^{(ij)}_{(kk)}\right) + u^{[j}v^{k]}\left(\omega^{(iij)}_{(kkj)} - \omega^{(ii)}_{(kk)}\right) = 0.$$

Подставим сюда выражения для форм $\omega^{(iij)}_{(kki)}$, $\omega^{(iij)}_{(kkj)}$, $\omega^{(ii)}_{(kk)}$:

$$u^{[i}v^{k]}\frac{u^{[j}v^{k]}}{u^{[k}v^{k]}}\left(-\frac{u^{[j}v^{k]}}{u^{[i}v^{k]}}\,\omega^{(ii)}_{(jk)} + \omega^{i}_{k}\right) - u^{[i}v^{k]}\,\omega^{(ij)}_{(kk)} +$$
$$+ u^{[j}v^{k]}\frac{u^{[i}v^{j]}}{u^{[k}v^{j]}}\left(-\frac{u^{[k}v^{i]}}{u^{[j}v^{i]}}\,\omega^{(ij)}_{(kk)} + \omega^{i}_{k}\right) + u^{[j}v^{k]}\frac{u^{[j}v^{i]}}{u^{[k}v^{i]}}\,\omega^{(ii)}_{(jk)} \equiv 0.$$

Все слагаемые в левой части взаимно уничтожились. Значит эти 6 уравнений явились следствием предыдущих. Имеет место понижение ранга на 6.

Далее рассматриваем остальные уравнения в такой последовательности: №№ 1, 8, 6, 5, 7, 11, 3, 10, 9. Понижение ранга произошло при рассмотрении уравнений №№ 1, 5, 7, 3, 10, 9. Общее понижение ранга оказалось равным 33. Характер $S_2 = S_1 - 33 = 39$. Последний характер находится по формуле $S_3 = g - S_1 - S_2 = 12$. Число Картана $Q = 72 + 2\cdot 39 + 3\cdot 12 = 186$.

5. Для рассматриваемой системы дифференциальных уравнений мы получили $Q = N$. Таким образом, критерий Картана удовлетворен. На основании его теоремы об инволютивных системах [2], решение существует с произволом, определяемым старшим характером $S_{3i}^{*} = 12$ (произвол 12 функции 3-х аргументов). Теорема доказана.

§ 5. Расслояемость трехмерной λ-сопряженной системы

Расслояемость трехмерной λ-сопряженной системы на однопараметрическое семейство двумерных поверхностей по линиям λ-сопряженной сети будет иметь место, если каждое уравнение $\omega^i = 0$ в отдельности будет вполне интегрируемым. Сделаем проверку полной интегрируемости:

$$D\omega^i = [\omega_0^0 \omega^i] + [\omega^i \omega_i^i] + \sum_{h \neq i} [\omega^h \omega_h^i].$$

Первые два слагаемых обращаются в нуль, а сумма $\sum_{h \neq i} [\omega^h \omega_h^i]$ не обращается в нуль ни в силу уравнения $\omega^i = 0$, ни в силу уравнений Пфаффа (7), ни в силу квадратичных уравнений, полученных из уравнений Пфаффа.

Следовательно, трехмерная λ-сопряженная система не расслаивается указанным образом.

Выясним, какую особенность должна иметь трехмерная λ-сопряженная система, чтобы она обладала свойством расслояемости, и найдем произвол существования такой системы. Расслоение будет иметь место, если будет выполняться равенство

$$\sum_{h \neq i} [\omega^h \omega_h^i] = 0.$$

Достаточным (но не необходимым) условием для этого будет выполнение равенств $\omega_h^i = 0$, которые мы присоединим к нашей системе (7). Требование равенств $\omega_h^i = 0$ приводит к следующим изменениям в системе инфинитезимальных перемещений репера (1):

$$dA_i = \omega_i^0 A + \sum_j \omega_i^j A_j + \sum_\alpha \omega_i^\alpha A_\alpha = \omega_i^0 A + \omega_i^i A_i + \sum_\alpha \omega_i^\alpha A_\alpha.$$

Мы видим, что прямые AA_i, совпадающие с λ-сопряженными направлениями, не вращаются в касательной плоскости. Добавление уравнений $\omega_h^i = 0$ к системе (7) приводит к некоторым изменениям в предыдущем исследовании. Теперь будет $N' = 195$, $S_1' = 78$, $S_2' = 45$, $S_3' = 9$, $Q' = 195$. Получили $Q' = N'$. Система — в инволюции. Старший характер $S_3' = 9$. Нами доказана

Теорема. *Трехмерная λ-сопряженная система, у которой λ-сопряженные направления при любом смещении не вращаются в касательной плоскости, расслаивается на однопараметрическое семейство двумерных поверхностей по линиям λ-сопряженной сети. Такое многообразие существует с произволом 9 функций 3-х аргументов.*

Московский городской педагогический институт им. В. П. Потемкина

Поступило 6 VII 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. С. П. Фиников. Метод внешних форм Картана. ОГИЗ, М., 1948.
2. E. Cartan. Sur les variétés de courbure constante d'un espace euclidien ou non euclidien. Bull. Soc. math. France, 47, p. 125—160, 1919, 48, p. 132—208, 1920.