

# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. М. Тешев, Д. С. Ушхо, О предельных циклах и сепаратрисах одной квадратичной системы, *Дифференц. уравнения*, 1995, том 31, номер 6, 1096–1097

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением  
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.83

23 января 2025 г., 19:01:23



УДК 517.925.42

Р. М. ТЕШЕВ, Д. С. УШХО

## О ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛАХ И СЕПАРАТРИСАХ ОДНОЙ КВАДРАТИЧНОЙ СИСТЕМЫ

В ряде работ изучалась дифференциальная система

$$dx/dt = -my + y^2 \equiv P(x, y), \quad dy/dt = ax + by + cx^2 + dxy + ey^2 \equiv Q(x, y) \quad (1)$$

при различных ограничениях на коэффициенты ее правых частей.

Так, в [1] при  $c=0$ ,  $a=1$ ,  $m=1$  найдены достаточные условия того, что начало координат  $(0, 0)$  могут окружать, по крайней мере, два предельных цикла. В [2, с. 7] приведены достаточные условия появления, по крайней мере, одного грубого предельного цикла в окрестности каждого из двух фокусов одновременно или в отдельности.

В работах [3—5] изучается система (1) при  $a=-1$ ,  $m=-1$ . В [3] доказывается единственность предельного цикла (1) при  $d=c=0$ . Единственность предельного цикла (1) доказывается при  $d=0$  в [4], при этом изучается также поведение сепаратрис седла.

В [5] найдены достаточные условия отсутствия и единственности предельных циклов системы (1) при  $c=0$  и изучено поведение сепаратрис седла.

В настоящей работе рассматривается система (1) при условиях

$$m > 0, \quad e > 0, \quad 0 < a < c, \quad (2)$$

$$(a + dm)^2 - 4c(bt + m^2e) < 0. \quad (3)$$

Система имеет два состояния равновесия:  $A(-a/c, 0)$  — седло и  $O(0, 0)$  — антиседло.

**Теорема 1.** Пусть  $d=b \geq 0$ . Тогда при выполнении (2), (3) и неравенства

$$\sqrt{m^2e + c - a} > m\sqrt{ma} + c - a/2 \quad (4)$$

точку  $O$  не окружает предельный цикл.

**Доказательство.** В рассматриваемом случае  $O$  является неустойчивым антиседлом, причем при  $d=b=0$  сложным однократным фокусом, так как  $\alpha_3(0, 0) = ae/(2m^2\sqrt{ma}) > 0$  [6, с. 263].

Покажем отсутствие кратных предельных циклов. Допустим противное, т. е.

$$h: x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad (5)$$

где  $\varphi$  и  $\psi$  — периодические с периодом  $\tau$  функции, есть кратный предельный цикл. Тогда должно быть выполнено условие

$$\int_0^\tau ((1+x)b + 2ey) dt = 0, \quad (6)$$

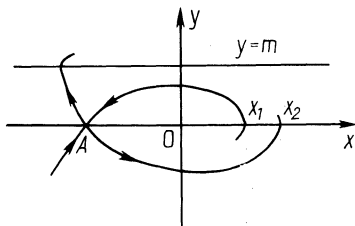
где  $x$  и  $y$  под знаком интеграла следует заменить выражениями из (5). Поскольку  $h$  — периодическое решение (1), то имеет место равенство  $\int_0^\tau (y^2 - my) dt = 0$ , откуда полу-

чаем  $\int_0^\tau y dt = \int_0^\tau (y^2/m) dt$ . Тогда (6) можно записать в виде

$$\int_0^\tau ((1+x)b + 2ey^2/m) dt = 0. \quad (7)$$

Очевидно, предельный цикл  $h$ , если он существует, расположен в полуплоскости  $x > -a/c$ . Поэтому выражение, стоящее под знаком интеграла (7), неотрицательно, а значит, и интеграл не может быть равен нулю.

Тем самым доказано отсутствие устойчивых предельных циклов системы (1) при  $d=b \geq 0$ . При  $d=b=0$  взаимное расположение сепаратрис седла  $A$  изображено на рисунке.



В области  $G: \begin{cases} x > -a/c, \\ y < m, y \neq 0 \end{cases}$  векторное поле системы с ростом  $b$  вращается по часовой стрелке, так как

$$(dy/dx)'_b = (1+x)/(y-m) < 0. \quad (8)$$

Следовательно, с увеличением  $b$   $x_1(x_2)$  уменьшается (увеличивается). Если теперь вспомнить, что при  $b \geq 0$   $O$  — неустойчивое антиседло, то становится очевидным отсутствие у системы и грубых предельных циклов. Теорема доказана.

**З а м е ч а н и е 1.** Условие (4) существенно в том смысле, что оно обеспечивает включение  $(b_1, b_2) \subset [-2\sqrt{ma}, 2\sqrt{ma}]$ . Но  $(b_1, b_2)$  — решение неравенства (3) относительно  $b$ . Здесь  $b_1 = (2c - a - 2\sqrt{m^2e + c - a})/m$ ,  $b_2 = (2c - a + 2\sqrt{m^2e + c - a})/m$ .

**Т е о р е м а 2.** Пусть выполнены условия (2)–(4),  $d = b$ . Тогда справедливы утверждения

1) существует единственное значение параметра  $b = b_3 \in (-2\sqrt{ma}, 0)$ , при котором начало координат окружает, по крайней мере, один неустойчивый предельный цикл и петля сепаратрисы седла  $A$ ;

2) для значений параметра  $b \in (b_4, b_3)$  начало координат окружает четное число предельных циклов с учетом кратности сложных (по крайней мере, два грубых предельных цикла), причем  $b_4 \in (-2\sqrt{ma}, b_3)$  соответствует моменту наличия вокруг  $O$  полуустойчивого (двукратного) предельного цикла;

3) при  $b < b_4$  система не имеет предельных циклов.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Согласно неравенству (8), при уменьшении параметра  $b$  векторное поле системы вращается против часовой стрелки, т. е.  $x_2(x_1)$  уменьшается (увеличивается). При переходе  $b$  к отрицательным значениям из сложного фокуса  $O$  рождается неустойчивый грубый предельный цикл, а сам фокус при этом меняет свою устойчивость [6, с. 274]. Указанный цикл с уменьшением  $b$  расширяется. При  $b \leq -2\sqrt{ma}$  точка  $O$  — устойчивый узел, который, как известно [7], не может быть окружен предельным циклом. Следовательно,  $x_2 < x_1$  при  $b \leq -2\sqrt{ma}$ . В силу непрерывного вращения векторного поля системы (1) с изменением параметра найдется единственное значение  $b = b_3$ , при котором  $x_1 = x_2$ , т. е. фокус  $O$  окружен петлей сепаратрисы седла  $A$ . Эта петля устойчива, так как  $\sigma(-a/c, 0) = b_3(1 - a/c) < 0$  [6, с. 311]. Но внутри устойчивой петли система имеет устойчивый фокус. Тем самым доказано утверждение 1). При переходе  $b$  через  $b = b_3$  в сторону меньших значений петля нарушается и из нее появляется устойчивый предельный цикл, который при дальнейшем уменьшении  $b$  сужается и в «момент»  $b = b_4 < b_3$  сливается с внутренним неустойчивым предельным циклом. В результате появляется полуустойчивый предельный цикл вокруг  $O$ . Дальнейшее уменьшение параметра  $b$  приводит к исчезновению этого цикла. Учитывая монотонное вращение векторного поля системы, легко видеть, что при  $b < b_4$  точку  $O$  не окружает предельный цикл. Теорема доказана.

Таким образом, теоремы 1 и 2 однозначно определяют взаимное расположение сепаратрис седла  $A$ .

**З а м е ч а н и е 2.** Отметим, что теоремы 1 и 2 справедливы и при  $d = 0$ . Конечно, при этом в формулировке теоремы 1 (теоремы 2) следует заменить условия  $d = b \geq 0$  условиями  $d = 0, b \geq 0$  (условие  $d = b$  условием  $d = 0$ ).

**З а м е ч а н и е 3.** Утверждение теоремы 2 при  $d = 0$  никоим образом не противоречит единственности предельного цикла системы (1), доказанной в [4], так как в указанной работе рассмотрен случай четырех состояний равновесия.

В процессе изучения поведения траекторий квадратичных систем на плоскости возник вопрос существования квадратичных систем, имеющих особую точку, окруженную одновременно предельным циклом и петлей сепаратрисы седла, положительный ответ на который дан в работах [8, 9]. Примером такой системы может служить и система (1) в условиях теоремы 2, а также замечания 2 при  $b = b_3$ .

В связи с этим уместно поставить задачу: каково наибольшее число предельных циклов квадратичной системы, охватываемых петлей сепаратрисы седла?

## Литература

1. Аверин Б. П. // Уч. зап. Рязан. пед. ин-та. 1968. Т. 67. С. 5–9.
2. Шахова Л. В. // Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Самарканд, 1966.
3. Черкас Л. А., Жилевич Л. И. // Дифференц. уравнения. 1970. Т. 6, № 7. С. 1170–1178.
4. Жилевич Л. И. // Дифференц. уравнения. 1971. Т. 7, № 8. С. 1525–1527.
5. Жилевич Л. И. // Дифференц. уравнения. 1971. Т. 7, № 5. С. 782–790.
6. Андронов А. А. и др. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. М., 1967.
7. Воробьев А. П. // Докл. АН БССР. 1956. Т. 4, № 9. С. 369–371.
8. Ватоп R. // Proc. of AMS. 1983. Vol. 88, N 4. P. 719–726.
9. Столяров В. В. // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28, № 9. С. 1643–1644.