В. А. Маркашева, Ан. Ф. Тедеев, Задача Коши для квазилинейного параболического уравнения с градиентным стоком, *Матем. сб.*, 2012, том 203, номер 4, 131–160

DOI: 10.4213/sm7744

УДК 517.946

В. А. Маркашева, А. Ф. Тедеев

Задача Коши для квазилинейного параболического уравнения с градиентным стоком

В работе изучаются качественные свойства решений задачи Коши для вырождающихся параболических уравнений с нелинейным оператором типа Баоуенди–Грушина и градиентным стоком с плотностью, зависящей не только от пространственных переменных, но и от времени. Получены точные по времени оценки диаметра носителя решения и максимума решения. Найдено условие, указывающее на наличие или отсутствие эффекта убывания тотальной массы решения к нулю.

Библиография: 35 названий.

Ключевые слова: оператор типа Баоуенди–Грушина, квазилинейное параболическое уравнение, градиентный сток, убывание тотальной массы решения, оценка носителя решения.

§ 1. Введение

В статье исследуется решение задачи Коши для квазилинейного вырождающегося параболического уравнения следующего вида:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}_L\bigl(|D_L u|^{\lambda-1} D_L u\bigr) - a(\rho(z)) f(t) |D_L u^\nu|^q, \qquad (z,t)\in S_T=\mathbb{R}^{N+M}\times(0,T), \tag{1.1}$$

$$u(z,0)=u_0(z)\in L_1(\mathbb{R}^{M+N}), \qquad u_0(z)\geqslant 0 \ \text{ п.в.}, \qquad z=(x,y), \qquad x\in\mathbb{R}^N, \quad y\in\mathbb{R}^M. \tag{1.2}$$

Здесь $\lambda>1$, $1<q<\lambda+1$, $\nu q>\lambda$, а $x=(x_1,\dots,x_N)$, $y=(y_1,\dots,y_M)$ – произвольные точки евклидовых пространств $\mathbb{R}^N$ и $\mathbb{R}^M$ соответственно, $N\geqslant 1$, $M\geqslant 1$. Пусть $f(t)$, $a(\rho(z))$ – неотрицательные и измеримые функции. И кроме того,

$$\begin{gathered}a(s) \text{ – непрерывная неубывающая функция такая,}\\ \text{что для всех } s>0 \text{ функция } s^q/a(s) \text{ также не убывает.}\end{gathered} \tag{H$_1$}$$

Функция $\rho(z)=\bigl(|x|^{2(\alpha+1)}+(\alpha+1)^2|y|^2\bigr)^{1/2(\alpha+1)}$ является аналогом функции расстояния между точками евклидова пространства и будет более подробно описана в § 2.

$$\begin{gathered}f(t) \text{ – непрерывная неубывающая функция такая,}\\ \text{что для всех } t>0 \text{ найдется такое число } \mu,\\ 0<\mu<(\nu q-\lambda)/\lambda, \text{ что функция } t^\mu/f(t) \text{ также не убывает.}\end{gathered} \tag{H$_2$}$$

Символом $D_L u$ обозначим вектор

$$D_L u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N}, |x|^\alpha \frac{\partial u}{\partial y_1}, |x|^\alpha \frac{\partial u}{\partial y_2}, \dots, |x|^\alpha \frac{\partial u}{\partial y_M}\right).$$

Векторное поле, соответствующее этому вектору, часто называют векторным полем Баоуенди–Грушина (см. [1], [2]). По аналогии оператор, определенный при помощи этих векторных полей, будем называть оператором типа Баоуенди–Грушина. В дальнейшем считаем, что $\alpha > 0$, поскольку теоремы вложения, которые мы будем существенно использовать, доказаны для этого случая. Далее,

$$|D_L u| = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 + |x|^{2\alpha}\sum_{j=1}^{M}\left(\frac{\partial u}{\partial y_j}\right)^2},$$

$$\operatorname{div}_L \vec{F}(x,y) = \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial F_i}{\partial x_i} + |x|^\alpha \sum_{j=1}^{M}\frac{\partial F_{j+N}}{\partial y_j}.$$

Слагаемое $-a(\rho(z))f(t)|D_L u^\nu|^q$ с физической точки зрения оказывает демпфирующий эффект и в дальнейшем будет называться *демпфирующим* членом уравнения.

Определим действие $L_{\lambda,\alpha}[u]$ оператора типа Баоуенди–Грушина на произвольную функцию

$$L_{\lambda,\alpha}[u] := \operatorname{div}_L(|D_L u|^{\lambda-1} D_L u).$$

Уравнение с оператором типа Баоуенди–Грушина представляет независимый интерес. Если рассмотреть (1.1) без демпфирования и положить $\alpha = 0$, уравнение описывает процесс с медленной диффузией (см. обзор [3]). Операторы типа $L_{1,\alpha} = \Delta_x + |x|^{2\alpha}\Delta_y$, где символы Δ_x и Δ_y обозначают операторы Лапласа по переменным x и y соответственно, впервые исследовались в работах [4] и [5]. В работах [6] и [7] изучались качественные свойства решения уравнения $L_{\lambda,\alpha}[u] = f$, т.е. эллиптического аналога (1.1) при отсутствии демпфирования (см. также [1] и имеющуюся там литературу). В работе [8] при отсутствии демпфирующего члена были изучены вопросы существования решения задачи Коши, получены точные оценки максимума решения и скорость распространения носителя. В [9], [10] доказана локальная гёльдеровость решения.

Интерес к задаче (1.1), (1.2) вызван тем, что наличие демпфирующего члена в виде градиентной абсорбции при определенных условиях может сильно менять свойства решения. А именно: создает эффект убывания массы решения с течением времени. В случае $\alpha = 0$, $a(s) = f(t) = 1$ свойства решений уравнения (1.1) были исследованы в множестве работ, например, [11]–[17] для обычного оператора Лапласа и [18]–[22] для оператора λ-Лапласа.

В статье [23] рассматривалась задача Коши для уравнения с двойной нелинейностью и источником

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}\bigl(u^{m-1}|Du|^{\lambda-1}Du\bigr) - \varepsilon|Du^\nu|^q + \delta u^p,\\ u(x,0) = u_0(x) \in L_1(\mathbb{R}^N),\end{gathered} \tag{1.3}$$

$(x,t) \in S_T = \mathbb{R}^N \times (0,T)$, $T > 0$, $p > 1$, с неотрицательной начальной функцией из $L_1(\mathbb{R}^N)$ при условии $\varepsilon, \delta \geqslant 0$, $m+\lambda-2 > 0$, $\lambda > 0$, $1 < q < \lambda+1$, $\nu q > m+\lambda-1$.

Это уравнение, как легко видеть, при $\delta = 0$, $m = 1$ является частным случаем (1.1) и совпадает с (1.1) при $\alpha = 0$, $a(s) = \varepsilon$, $f(t) = 1$. В этой работе было найдено критическое условие на q, при котором тотальная масса решения стремится к нулю. Ранее такого сорта результаты для почти линейных уравнений были установлены во многих работах, например в [11], [13], [15], [17]. Результаты, полученные при рассмотрении уравнения с демпфирующим членом, хотя и имеют самостоятельную ценность, были использованы авторами работы [23] для исследования вопроса существования решения задачи Коши для уравнения с источником и демпфированием.

Целью настоящей работы является получение условия на параметры задачи, при которых гарантируется наличие или отсутствие эффекта убывания к нулю тотальной массы решения. Более того, наши подходы позволяют нам найти скорость убывания тотальной массы. Получены оценки сверху максимума решения и радиуса носителя решения задачи Коши (1.1), (1.2). По-видимому, найденные оценки точны. Однако имеет смысл доказать аналогичные оценки снизу. Также найден предельный показатель $q*$ и найдена зависимость показателя, характеризующая порядок убывания массы решения, для специального случая нелинейного веса типа $a(s) = s^\gamma$, $f(t) = t^\beta$ при демпфирующем члене.

Введем теперь понятие слабого решения задачи (1.1), (1.2). Пусть выполнены условия (H_1), (H_2).

Определение 1. Неотрицательную функцию $u(z,t) \in L_{\infty,\mathrm{loc}}(S_T)$ будем называть *слабым решением уравнения* (1.1) в $S_T = \mathbb{R}^{N+M} \times (0,T)$, если для любого t, $T > t > 0$, $R > 0$,

$$u \in C\big((0,T), L_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{N+M})\big),$$
$$|D_L u|^{\lambda+1}, a(\rho(z))f(t)|D_L u^\nu|^q \in L_{1,\mathrm{loc}}(S_T)$$

и u удовлетворяет (1.1) в смысле интегрального тождества

$$\iint_{B_R\times(t,T)} -u\eta_\tau + \big(|D_L u|^{\lambda-1} D_L u\big) D_L\eta + \eta a(\rho(z)) f(\tau)|D_L u^\nu|^q \,dx\,dy\,d\tau = 0, \quad (1.4)$$

где $\eta(x,y,t)$ – произвольная гладкая функция с носителем из $B_R \times (t,T)$.

Определение 2. Слабое решение уравнения (1.1) $u(z,t) \in L_{\infty,\mathrm{loc}}(S_T)$ будем называть *слабым решением задачи* (1.1), (1.2), если

$$\lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}^{N+M}} u\eta(z)\,dz = \int_{\mathbb{R}^{N+M}} u_0\eta(z)\,dz \qquad \forall\, \eta(z) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{N+M}). \quad (1.5)$$

Прежде чем перейти к формулировкам основных результатов работы, введем необходимые обозначения. Здесь и далее

$$K = Q(\lambda-1) + \lambda + 1, \qquad K_{1+\theta} = Q(\lambda-1) + (\lambda+1)(1+\theta),$$
$$H = (\lambda+1)(\nu q - 1) - q(\lambda-1) > 0, \qquad Q = N + M(\alpha+1),$$
$$B_R = \{z \in \mathbb{R}^{N+M} : \rho(z,0) \leqslant R\},$$

где $\rho(z) = (|x|^{2(\alpha+1)} + (\alpha+1)^2|y|^2)^{1/2(\alpha+1)}$ уже было определено выше. Параметр K можно сравнить с показателем Баренблатта, и при $\alpha = 0$ он играет ключевую роль в описании качественных свойств решения вырождающихся уравнений (см. [3]), Q – однородная размерность в пространствах Карно–Каратеодори (подробнее см. [1]). Наконец, B_R является естественным расширением понятия открытого шара в пространствах Карно–Каратеодори. Более подробное описание отнесено к § 2. На протяжении всей работы символами C, C_i, C_i' будем обозначать различные положительные постоянные, зависящие лишь от параметров λ, N, M, α, ν, q.

Радиусом носителя решения будем называть величину

$$Z(t) = \inf\bigl\{\rho : u(\,\cdot\,,t) = 0 \text{ для п.в. } (x,y) \in \mathbb{R}^{N+M} \setminus B_\rho\bigr\}.$$

Обозначим $\varphi(s)$ функцию, обратную к $a(s)^{\lambda-1}s^H$.

Важную роль в работе играет функция

$$\omega(t) \equiv \frac{\varphi\bigl(t^{\nu q-\lambda}/f(t)^{\lambda-1}\bigr)}{t^{1/K}}. \tag{1.6}$$

Приступим к формулировке основных результатов работы. Нам потребуются следующие асимптотические условия на $\omega(t)$:

$$\lim_{t\to\infty} \omega(t) = 0, \tag{1.7}$$

$$\exists\, C_1 > 0 : \quad C_1 \leqslant \varliminf_{t\to\infty} \omega(t), \tag{1.8}$$

для достаточно больших t

$$\exists\, C_2, \epsilon > 0 : \quad C_2 t^\epsilon \leqslant \omega(t). \tag{1.9}$$

На примере специального веса условие (1.8) превратится в условие на предельный показатель q^*.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (H_1), (H_2). *Тогда существует u – слабое решение* (1.1), (1.2), *и если $\omega(t)$ – функция, определенная в* (1.6), $\operatorname{supp} u_0 \subset B_{R_0}$, $R_0 < \infty$, *то для достаточно больших t имеем*

$$Z(t) \leqslant C_3\omega(t)t^{\frac{1}{K}}. \tag{1.10}$$

Замечание 1. Вопрос единственности решения задачи (1.1), (1.2) остается открытым. Трудность доказательства единственности связана с наличием градиентного стока в уравнении и может быть преодолена, например, с помощью равномерных оценок градиента решения, что, в свою очередь, является нетривиальной задачей.

Замечание 2. Если выполняется (1.7), то из (1.10) следует, что при достаточно больших t оценка (1.10) сильнее оценки носителя для решения того же уравнения без стока, т.е. для $a(s) = f(t) = 0$ (см. предложение 7 далее или [8]).

Теорема 2. *Пусть u – слабое решение* (1.1), (1.2) *и выполнены условия* (H_1), (H_2), $\operatorname{supp} u_0 \subset B_{R_0}$, $R_0 < \infty$. *И пусть $0 < \alpha < M(\nu q - 1)/q$. Тогда для достаточно больших t имеем*

$$\int_{\mathbb{R}^{M+N}} u\,dz \leqslant C_4\omega^{\frac{K}{\lambda-1}}(t), \tag{1.11}$$

$$\|u\|_{\infty,\mathbb{R}^{N+M}} \leqslant C_5\omega^{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}}(t)t^{-\frac{Q}{K}}. \tag{1.12}$$

Замечание 3. В случае, если выполняется (1.7), неравенство (1.11) обеспечивает убывание к нулю тотальной массы решения $\|u\|_{1,\mathbb{R}^{N+M}}$.

Рассмотрены также два случая, при которых можно получить оценку массы решения без предположения компактности носителя начальной функции.

Теорема 3. *Пусть* u *– слабое решение* (1.1), (1.2) *и выполнены условия* (H_1), (H_2). *Тогда для достаточно больших* t *при условии, что* $\nu = 1$, $\lambda > 1$ *и* $0 < \alpha < M(q-1)/q$, *справедлива оценка*

$$\int_{\mathbb{R}^{N+M}} u(t)\,dz \leqslant \int_{\rho>\omega(t)t^{\frac{1}{K}}} u_0\,dz + C_6\omega^{\frac{K}{\lambda-1}}(t). \tag{1.13}$$

Если же $\lambda = 1$ *и* $0 < \alpha < M(\nu q-1)/q$, *то справедлива оценка*

$$\int_{\mathbb{R}^{N+M}} u(t)\,dz \leqslant \int_{\rho>\sqrt{t}} u_0\,dz + C_6'\frac{t^{\frac{Q(\nu q-1)+q-2}{2(\nu q-1)}}}{a(\sqrt{t})^{\frac{1}{\nu q-1}}f(t)^{\frac{1}{\nu q-1}}}. \tag{1.14}$$

Замечание 4. В случае, если выполняется (1.7), неравенство (1.13) обеспечивает убывание к нулю тотальной массы решения $\|u\|_{1,\mathbb{R}^{N+M}}$.

Из оценки (1.14) следует, например, что в случае, если

$$q < \frac{Q+2}{\nu Q+1},$$

тотальная масса решения стремится к нулю при $t \to \infty$. Заметим также, что при $\alpha = 0$, $\nu = 1$, $a = f = 1$ критическим показателем является $q = (M+N+2)/(M+N+1)$ (см., например, [12]).

Теорема 4. *Пусть* u *– слабое решение* (1.1), (1.2) *и выполнены условия* (H_1), (H_2), $\operatorname{supp} u_0 \subset B_{R_0}$, $R_0 < \infty$. *Если выполняется условие* (1.8), *тогда для достаточно больших* t, $t \geqslant t_0 = \|u_0\|^{\lambda-1}_{1,\mathbb{R}^{N+M}}/R_0^K$, *имеем*

$$\int_{\mathbb{R}^{N+M}} u\,dz \leqslant C_7\biggl(\int_{t_0}^{t}\frac{a(\tau^{\frac{1}{K}})f(\tau)}{\tau^{\frac{Q(\nu q-1)+q}{K}}}\,d\tau\biggr)^{-\frac{1}{\nu q-1}}. \tag{1.15}$$

В частности, из (1.15) *следует, что если существуют* $C > 0$, $\varrho \in (0,1)$ *такие, что* $C\varrho \leqslant \omega(t) \leqslant C$, *то для достаточно больших* t, $t \geqslant t_0 = \|u_0\|^{\lambda-1}_{1,\mathbb{R}^{N+M}}/R_0^K$, *имеем*

$$\int_{\mathbb{R}^{N+M}} u\,dz \leqslant C_8\biggl(\ln\biggl(\frac{t}{t_0}\biggr)\biggr)^{-\frac{1}{\nu q-1}}. \tag{1.16}$$

Теорема 5. *Пусть* u *– слабое решение* (1.1), (1.2) *и выполнены условия* (H_1), (H_2), $\operatorname{supp} u_0 \subset B_{R_0}$, $R_0 < \infty$. *Если выполняется условие* (1.9), *тогда для достаточно больших* t *имеем*

$$\int_{\mathbb{R}^{N+M}} u(t)\,dz \geqslant C_9 > 0, \tag{1.17}$$

где C_9 *– положительная постоянная, зависящая только от параметров задачи и* $\|u_0\|_1$.

Пример. Пусть u – слабое решение (1.1), (1.2), $\operatorname{supp} u_0 \subset B_{R_0}$, $R_0 < \infty$. Пусть $a(s) = s^\gamma$, $\gamma < q$, $f(t) = t^\beta$, $\beta < \frac{\nu q-\lambda}{\lambda}$,

$$q^* = \frac{Q+\gamma+K(1+\beta)}{\nu Q+1}, \qquad A = \frac{(q^*-q)(\nu Q+1)}{H+\gamma(\lambda-1)}. \tag{1.18}$$

Тогда $\omega(t) = t^{-\frac{A(\lambda-1)}{K}}$. Отметим, что q^* является критическим показателем, поскольку если $q < q^*$, тогда выполняется условие (1.7), оценки (1.10), (1.11), (1.12) справедливы и имеют вид

$$Z(t) \leqslant C_{10} t^{\frac{1}{K} - \frac{A(\lambda-1)}{K}}, \tag{1.19}$$

$$\int_{\mathbb{R}^{N+M}} u(t)\, dz \leqslant C_{11} t^{-A}, \tag{1.20}$$

$$\|u(t)\|_{\infty, \mathbb{R}^{N+M}} \leqslant C_{12} t^{-\frac{Q}{K} - \frac{A(\lambda+1)}{K}}. \tag{1.21}$$

Следует добавить, что неравенство (1.8) превращается в равенство в случае, когда $q = q^*$, и оценка (1.16) остается неизменной. Таким образом, эффект убывания массы решения к нулю сохраняется при $q \leqslant q^*$.

В случае, когда $q^* < q < \lambda + 1$, выполняется условие (1.9), масса убывает, но ограничена снизу положительной константой, как показывает оценка теоремы 5.

Найденный критический показатель совпадает с полученными в работах [23] при условии $\alpha = 0$, $a(s)f(t) \equiv \varepsilon > 0$, и [24] при условии $\alpha = 0$, $f(t) \equiv 1$.

Параграф 2 посвящен вспомогательным предложениям, которые приведены без доказательства. Параграфы 3, 4, 5, 6, 7 посвящены доказательству теорем 1, 2, 3, 4, 5 соответственно.

В доказательстве теорем 1–5 мы используем подходы работ [23], [24] и [8].

В доказательстве оценок размеров носителя решения мы использовали идеи работ [25]–[27], а также существенно опирались на работы [23], [24] и [8], где эти методы получили дальнейшее развитие.

§ 2. Вспомогательные предложения

Символом $D_L u$ выше обозначен вектор

$$D_L u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N}, |x|^\alpha \frac{\partial u}{\partial y_1}, |x|^\alpha \frac{\partial u}{\partial y_2}, \dots, |x|^\alpha \frac{\partial u}{\partial y_M} \right).$$

Векторное поле, образующее этот вектор, называется векторным полем Баоуенди–Грушина. Введем вспомогательные обозначения:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = X_1, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = X_2, \quad \dots, \quad \frac{\partial u}{\partial x_N} = X_N,$$
$$|x|^\alpha \frac{\partial u}{\partial y_1} = Y_1, \quad |x|^\alpha \frac{\partial u}{\partial y_2} = Y_2, \quad \dots, \quad |x|^\alpha \frac{\partial u}{\partial y_M} = Y_M.$$

Известно, что если α – четное положительное целое число, то C^∞-векторные поля $X_1, X_2, \dots, X_N, Y_1, \dots, Y_M$ удовлетворяют условию ранга Хёрмандера

$$\operatorname{rank} \operatorname{Lie}[X_1, X_2, \dots, X_N, Y_1, \dots, Y_M] = M + N.$$

Для данного набора C^∞-векторных полей определяется метрическое пространство Карно–Каратеодори (см. [1], [28]–[30]), где расстояние можно ввести по формуле $\rho(z, z^0) = \left(|x - x^0|^{2(\alpha+1)} + (\alpha+1)^2 |y - y^0|^2\right)^{1/2(\alpha+1)}$, $z = (x, y)$, $z^0 =$

(x^0, y^0). Действительно, введенная функция удовлетворяет стандартным требованиям однородности и симметричности. Неравенство треугольника также выполняется, но с константой C больше единицы, т.е.

$$\forall\, z^1, z^2, z^3 \in \mathbb{R}^{N+M} \qquad \rho(z^1, z^2) \leqslant C\bigl(\rho(z^1, z^3) + \rho(z^3, z^2)\bigr).$$

Определим анизотропное растяжение, применимое к $L_{\lambda,\alpha}$, следующим образом:

$$\delta_\mu(z) = (\mu x, \mu^{\alpha+1} y), \qquad \mu > 0, \quad z = (x, y) \in \mathbb{R}^{N+M}.$$

Введенное расстояние называется однородным, поскольку для всех $z \in \mathbb{R}^{N+M}$ выполняется тождество

$$\rho(\delta_\mu(z)) = \mu\rho(z).$$

Очевидно, что замена переменных в интеграле Лебега дает

$$d \circ \delta_\mu(x, y) = \mu^Q\, dx\, dy, \qquad Q = N + (\alpha+1)M,$$

где Q есть однородная размерность в пространствах Карно–Каратеодори.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^{N+M}$ – произвольное ограниченное открытое множество в R^{N+M} с достаточно гладкой границей. Определим пространство $\mathfrak{L}_{1,p}(\Omega)$ для $1 \leqslant p < \infty$ как замыкание $C^\infty(\bar{\Omega})$ по норме

$$\|f\|_{\mathfrak{L}^{1,p}(\Omega)} = \left(\int_\Omega (|D_L f|^p + |f|^p)\, dx\, dy\right)^{\frac{1}{p}},$$

которая эквивалентна норме

$$\left(\int_\Omega |D_L f|^p\, dx\, dy\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\Omega |f|^r\, dx\, dy\right)^{\frac{1}{r}}$$

для $0 < r \leqslant p$.

Обозначим через $\mathring{\mathfrak{L}}_{1,p}(\Omega)$ подпространство $\mathfrak{L}_{1,p}(\Omega)$, которое получается как замыкание $C_0^\infty(\Omega)$ по норме $\mathfrak{L}_{1,p}(\Omega)$. Пространства $\mathfrak{L}_{1,p}(\Omega)$ и $\mathring{\mathfrak{L}}_{1,p}(\Omega)$ включаются в класс пространств Карно–Каратеодори, для которых достаточно полно изучены теоремы вложения типа С. Л. Соболева и мультипликативные неравенства типа Гальярдо–Ниренберга. Читателя, интересующегося теорией пространств Карно–Каратеодори, мы отсылаем к обзорной работе [1], где можно найти дальнейшую литературу.

Предложение 1 (неравенство типа Гальярдо–Ниренберга; см. [1]). *Для любой функции $f \in \mathfrak{L}_{1,\lambda+1}(\mathbb{R}^{N+M})$ справедливо неравенство*

$$\int_{\mathbb{R}^{N+M}} |f|^{\lambda+1}\, dz \leqslant C_{14}\left(\int_{\mathbb{R}^{N+M}} |D_L f|^{\lambda+1} dz\right)^{\beta_1}\left(\int_{\mathbb{R}^{N+M}} |f|^{\beta_2}\, dz\right)^{\frac{(1-\beta_1)(\lambda+1)}{\beta_2}}. \tag{2.1}$$

Здесь $\beta_1 = \frac{Q(\lambda-1)}{K_{1+\theta}}$, $\beta_2 > 0$.

Предложение 2 (неравенство типа Пуанкаре; см. [1]). *Для любой функции $\omega \in \mathring{\mathfrak{L}}_{1,q}(\mathbb{R}^{N+M})$ справедливо неравенство*

$$\int_\Omega |\omega|^q\, dz \leqslant C_{15}\, \mathrm{mes}\{\mathrm{supp}\, \omega\}^{\frac{q}{Q}} \int_\Omega |D_L \omega|^q\, dz. \tag{2.2}$$

Следующее предложение не следует из работы [2], но его легко доказать аналогичными методами.

Предложение 3 (неравенство типа Харди). *Пусть* $a(s)$ – *непрерывная монотонно возрастающая функция такая, что* $s^q/a(s)$ *также монотонно возрастает. Тогда для любой функции* $\omega \in \mathring{\mathfrak{L}}_{1,q}(\Omega)$ *справедливо неравенство*

$$\int_\Omega a(\rho(z))\frac{|D_L\rho|^q}{\rho^q}|\omega|^q\,dz \leqslant \left(\frac{q}{Q}\right)^q\int_\Omega a(\rho)|D_L\omega|^q\,dz. \tag{2.3}$$

Для любой функции $\omega \in \mathfrak{L}_{1,q}(\mathbb{R}^{N+M})$ *справедливо неравенство*

$$\int_{\mathbb{R}^{N+M}} a(\rho(z))\frac{|D_L\rho|^q}{\rho^q}|\omega|^q\,dz \leqslant \left(\frac{q}{Q}\right)^q\int_{\mathbb{R}^{N+M}} a(\rho)|D_L\omega|^q\,dz. \tag{2.4}$$

Предложение 4 (о замене переменных). *Пусть*

$$\rho(z,0) = \big(|x|^{2(\alpha+1)} + (\alpha+1)^2|y|^2\big)^{\frac{1}{2(\alpha+1)}}.$$

Следуя формулам

$$\begin{cases} x_1 = \rho\cos^{\frac{1}{\alpha+1}}\varphi_{M+N-1}\cos^{\frac{1}{\alpha+1}}\varphi_{M+N-2}\cos^{\frac{1}{\alpha+1}}\varphi_2\cos^{\frac{1}{\alpha+1}}\varphi_1,\\ x_2 = \rho\cos^{\frac{1}{\alpha+1}}\varphi_{M+N-1}\cos^{\frac{1}{\alpha+1}}\varphi_{M+N-2}\cos^{\frac{1}{\alpha+1}}\varphi_2\sin^{\frac{1}{\alpha+1}}\varphi_1,\\ \dots\\ x_M = \rho\cos^{\frac{1}{\alpha+1}}\varphi_{M+N-1}\cos^{\frac{1}{\alpha+1}}\varphi_{M+N-2}\cos^{\frac{1}{\alpha+1}}\varphi_M\sin^{\frac{1}{\alpha+1}}\varphi_{M-1},\\ y_1 = \dfrac{\rho^{\alpha+1}}{\alpha+1}\cos\varphi_{M+N-1}\cos\varphi_{M+N-2}\cos\varphi_{M+1}\sin\varphi_M,\\ y_2 = \dfrac{\rho^{\alpha+1}}{\alpha+1}\cos\varphi_{M+N-1}\cos\varphi_{M+N-2}\cos\varphi_{M+2}\sin\varphi_{M+1},\\ \dots\\ y_N = \dfrac{\rho^{\alpha+1}}{\alpha+1}\sin\varphi_{M+N-1}, \end{cases} \tag{2.5}$$

заменим координаты (x,y) *на* (ρ,φ). *Якобиан замены равен*

$$J(\rho,\varphi) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\varphi)} = \frac{\cos^{\frac{1}{\alpha+1}}\varphi_2\cos^{\frac{2}{\alpha+1}}\varphi_3\cdots\cos^{\frac{M-2}{\alpha+1}}\varphi_{M-1}\cos^{\frac{M-1}{\alpha+1}}\varphi_M\cos^{\frac{M}{\alpha+1}}\varphi_{M+1}}{(\cos\varphi_1\cdots\cos\varphi_M)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}}$$
$$\times\frac{\cos^{\frac{M}{\alpha+1}+1}\varphi_{M+2}\cdots\cos^{\frac{M}{\alpha+1}+N-2}\varphi_{M+N-1}}{(\sin\varphi_1\cdots\sin\varphi_{M-1})^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}}. \tag{2.6}$$

В дальнейшем нам потребуется итерационная лемма.

Предложение 5 (см. [31; лемма 5.6] при $b>1$). *Пусть последовательность* y_h, $h=0,1,2,\dots$, *неотрицательных чисел удовлетворяет рекуррентному соотношению*

$$y_{h+1} \leqslant C_{16}b^h y_h^{1+\varepsilon}, \qquad h=0,1,2,\dots, \tag{2.7}$$

с какими-либо положительными постоянными C_{16}, $\varepsilon>0$ *и* $b>1$. *Тогда, если*

$$y_0 \leqslant C_{16}^{-\frac{1}{\varepsilon}}b^{-\frac{1}{\varepsilon^2}}, \qquad \text{то}\ \ y_h\to 0 \quad \text{при}\ \ h\to\infty. \tag{2.8}$$

Предложение 6 (см. [32; гл. I, лемма 4.3]). *Пусть последовательность* y_h, $h=0,1,2,\dots$, *неотрицательных чисел удовлетворяет рекуррентному соотношению*

$$y_h \leqslant C_{17} b^h y_{h+1}^{1-\varepsilon}, \qquad h=0,1,2,\dots, \tag{2.9}$$

с какими-либо положительными постоянными C_{17}, $\varepsilon>0$ *и* $b<1$. *Тогда, если*

$$y_h \leqslant C_{18} \text{ сразу для всех } h, \text{ то } y_0^{\varepsilon} \leqslant C_{19}. \tag{2.10}$$

Для любой локально суммируемой функции $f(z)$ обозначим

$$|||f|||_r = \sup_{\rho \geqslant r}\biggl(\rho^{-\frac{K}{\lambda-1}} \int_{B_\rho} |f|\,dx\,dy\biggr).$$

Поскольку решение задачи (1.1), (1.2) является субрешением задачи без демпфирования при $a(\rho)=f(t)=0$, то (см. [8]) справедливо

Предложение 7. *Пусть* $u_0 \in L_{1,\mathrm{loc}}(R^{N+M})$ *и для некоторого заданного* $r>0$

$$|||u_0|||_r < \infty.$$

Тогда существуют такие положительные постоянные C_{20}, C_{21}, C_{22}, C_{23}, *зависящие лишь от параметров* λ, N, M, α, *что для решения (обобщенного) задачи* (1.1), (1.2) *при всех* $0<t<T_r$ *и* $R>r$, *где* $T_r = C_{20}|||u_0|||_r^{-\frac{1}{\lambda-1}}$, *справедливы оценки*

$$|||u(t)|||_r \leqslant C_{21}|||u_0|||_r, \tag{2.11}$$

$$\|u(t)\|_{L_\infty(B_R)} \leqslant C_{22} t^{-\frac{Q}{K}} R^{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}} |||u_0|||_r^{\frac{\lambda+1}{K}}. \tag{2.12}$$

Пусть $u_0 \in L_1(R^{N+M})$ *и* $\operatorname{supp} u_0 \subset B_{R_0}$, $R_0<\infty$. *Тогда для всех* $t>0$

$$Z(t) = \inf\bigl\{\rho : u(t)=0 \text{ для п.в. } (x,y) \in R^{N+M} \setminus B_\rho\bigr\} \leqslant 4R_0 + C_{23} t^{\frac{1}{K}} \|u_0\|_1^{\frac{\lambda-1}{K}}. \tag{2.13}$$

Предложение 8 (см. [8; лемма 3.3]). *Если предположения предложения 7 выполняются, то для любого* $t\in(0,T)$ *и* $R \geqslant r$

$$\|u(t)\|_{\infty, B_R\times(t/2,t)} \leqslant \frac{C_{24}}{t^{\frac{Q}{K}}} \biggl(\fint_{t/4}^{t} \int_{B_{2R}} u\,dx\biggr)^{\frac{\lambda+1}{K}}. \tag{2.14}$$

§ 3. Доказательство теоремы 1

Прежде всего докажем существование решения задачи (1.1), (1.2). Рассмотрим последовательность задач

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} = \operatorname{div}_L\bigl(|D_L u_n|^{\lambda-1} D_L u_n\bigr) - \min\bigl\{a(\rho(z)) f(t) |D_L u_n^{\nu}|^q, n\bigr\}, \tag{3.1}$$

$$(z,t) \in S_{T,n} = B_n \times (0,T), \qquad B_n \equiv \{z \in \mathbb{R}^{N+M} \colon \rho(z,0) \leqslant n\},$$

$$u_n(z,t) = 0 \quad \text{на} \ \ \partial B_n \times (0,T), \tag{3.2}$$

$$u_n(z,0) = u_{0n}(z) \in C_0^\infty(B_n), \quad u_{0n}(z) \geqslant 0, \quad \text{где} \ \ \|u_{0n}\|_{1,\mathbb{R}^{N+M}} \leqslant \|u_0\|_{1,\mathbb{R}^{N+M}}, \tag{3.3}$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^{N+M}} u_{0n}\eta(z)\,dz = \int_{\mathbb{R}^{N+M}} u_0\eta(z)\,dz \qquad \forall\, \eta(z) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{N+M}).$$

Методом монотонности и компактности Лионса [33] для каждого фиксированного n доказывается, что существует решение u_n из класса $C(0,T;L_2(B_n))\cap L_{\lambda+1}(0,T;\mathfrak{L}_{1,\lambda+1}(B_n))$. Теперь докажем, что решения u_n задачи (3.1)–(3.3) сходятся к решению исходной задачи Коши. Необходимо перейти к пределу в интегральном тождестве для u_n при $n\to\infty$. Отметим, что наличие демпфирующего слагаемого в уравнении делает такой предельный переход нетривиальным. Ниже мы будем следовать схеме, предложенной в работах [34], [35]. Для этой цели нам потребуется сходимость почти всюду градиентов решения. Мы докажем сильную сходимость градиентов в $L_{\lambda+1}(0,T;\mathfrak{L}_{1,\lambda+1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{N+M}))$. Выберем произвольное компактное множество $\mathfrak{K}\subset S_T$. Существует такое n_0, что $\mathfrak{K}\subset(0,T)\times B_{n_0}$. Прежде всего покажем, что для всех u_n выполняется неравенство

$$\int_{B_{n_0}} u_n(t)\,dz\leqslant\int_{B_{n_0}} u_{0n}\,dz.$$

Умножим уравнение (3.1) на финитную функцию $u_n/(u_n+\varepsilon)$, где $\varepsilon>0$. Интегрируя по частям, получим

$$\int_{B_{n_0}}\int_0^{u_n(t)}\frac{s}{s+\varepsilon}\,ds\,dz+\varepsilon\int_0^t\int_{B_{n_0}}\frac{|D_Lu_n|^{\lambda+1}}{(u_n+\varepsilon)^2}\,dz\,d\tau \\ +\int_0^t\int_{B_{n_0}}\frac{a(z)f(\tau)|D_Lu_n^\nu|^q u_n}{u_n+\varepsilon}\,dz\,d\tau\leqslant\int_{B_{n_0}}\int_0^{u_{n0}}\frac{s}{s+\varepsilon}\,ds\,dz.$$

Переходя к пределу при $\varepsilon\to0$ получим полезное и в дальнейшем неравенство

$$\int_{B_{n_0}} u_n(t)\,dz+\int_0^t\int_{B_{n_0}} a(z)f(\tau)|D_Lu_n^\nu|^q\,dz\,d\tau\leqslant\int_{B_{n_0}} u_{0n}\,dz. \tag{3.4}$$

Равномерная ограниченность для u_n следует из предложения 8 и в силу (3.4):

$$\|u_n(\,\cdot\,,t)\|_{\infty,B_n}\leqslant Ct^{-\frac{Q}{K}}\|u_0\|_{1,\mathbb{R}^{N+M}}^{\frac{\lambda+1}{K}}\qquad\forall\,t>0. \tag{3.5}$$

Очевидно, что добавление к уравнению положительного демпфирующего слагаемого не приводит к выходу решения из гёльдеровского класса. Поскольку константа Гёльдера зависит от $\|u_n\|_\infty$, которая в силу (3.5) не зависит от n, то на компакте $\mathfrak{K}$ последовательность $\{u_n\}$ локально непрерывна по Гёльдеру сразу для всех n. Следовательно, можно извлечь равномерно сходящуюся к u подпоследовательность, которую мы снова обозначим $\{u_n\}$, $n\geqslant n_0$. Кроме того, для $\{u_n\}$, $n\geqslant n_0$, справедлива еще одна априорная оценка

$$\sup_{0<t<T}\int_{B_{n_0}} u_n^2(t)\,dz+\iint_{S_{T,n_0}}|D_Lu_n|^{\lambda+1}\,dz\,d\tau \\ +\iint_{S_{T,n_0}}\min\bigl\{a(\rho(z))f(t)|D_Lu_n^\nu|^q,n\bigr\}u_n\,dz\,d\tau\leqslant\int_{B_{n_0}} u_{0n}^2\,dz. \tag{3.6}$$

Откуда следует

$$\iint_{\mathfrak{K}}|D_Lu_n|^{\lambda+1}\,dz\,d\tau\leqslant C(\mathfrak{K},u_0). \tag{3.7}$$

Используя равномерную сходимость $\{u_n\}$, докажем фундаментальность последовательности $\{D_Lu_n\}\in L_{\lambda+1}(0,T;\mathfrak{L}_{1,\lambda+1}(\mathfrak{K}))$. Выберем два произвольных члена последовательности $\{u_n\}$: u_j и u_k, $k,j>n_0$. Тогда для разности u_j-u_k имеем

$$\frac{\partial(u_j-u_k)}{\partial t}-\big(\operatorname{div}_L(|D_Lu_j|^{\lambda-1}D_Lu_j)-\operatorname{div}_L(|D_Lu_k|^{\lambda-1}D_Lu_k)\big) \\ +\min\big\{a(\rho(z))f(t)|D_Lu_j^{\nu}|^q,j\big\}-\min\big\{a(\rho(z))f(t)|D_Lu_k^{\nu}|^q,k\big\}=0. \quad (3.8)$$

Умножим полученное уравнение на $(u_j-u_k)\xi^2$, где $\xi(z,\tau)$ – стандартная срезающая функция, финитная на всем цилиндре S_{T,n_0}, такая, что $0\leqslant\xi\leqslant1$,

$$\xi=1 \quad \text{на} \quad B_{R/2}, \qquad \xi=0 \quad \text{на} \quad B_R,$$
$$\xi(z,\tau)=0 \quad \text{при} \quad \tau\leqslant\frac{t}{2}, \qquad \xi(z,\tau)=1 \quad \text{при} \quad \tau\geqslant t,$$
$$|D_L\xi|\leqslant\frac{C}{R}, \qquad 0\leqslant D_\tau\xi\leqslant\frac{C}{\tau}.$$

Пользуясь сильной монотонностью оператора $A(u)=-\operatorname{div}_L(|D_Lu|^{\lambda-1}D_Lu)$ и неравенством Гёльдера, получаем

$$\begin{aligned}
&\iint_{S_{T,n_0}}|D_Lu_j-D_Lu_k|^{\lambda+1}\xi^2\,dz\,d\tau\leqslant C\iint_{S_{T,n_0}}|u_j-u_k|^2\xi|\xi_\tau|\,dz\,d\tau \\
&\quad+C\iint_{S_{T,n_0}}\big(|D_Lu_j|^{\lambda}+|D_Lu_k|^{\lambda}\big)\xi|D_L\xi|\,|u_j-u_k|\,dz\,d\tau \\
&\quad+C\iint_{S_{T,n_0}}\big|a(\rho(z))f(t)|D_Lu_j^{\nu}|^q+a(\rho(z))f(t)|D_Lu_k^{\nu}|^q\big|\,|u_j-u_k|\xi^2\,dz\,d\tau \\
&\leqslant C\iint_{S_{T,n_0}}|u_j-u_k|^2\xi|\xi_\tau|\,dz\,d\tau \\
&\quad+C\bigg(\iint_{S_{T,n_0}}|D_Lu_j|^{\lambda+1}\,dz\,d\tau\bigg)^{\frac{\lambda}{\lambda+1}}\bigg(\iint_{S_{T,n_0}}|u_j-u_k|^{\lambda+1}\xi^{\lambda+1}|D_L\xi|^{\lambda+1}\,dz\,d\tau\bigg)^{\frac{1}{\lambda+1}} \\
&\quad+C\bigg(\iint_{S_{T,n_0}}|D_Lu_k|^{\lambda+1}\,dz\,d\tau\bigg)^{\frac{\lambda}{\lambda+1}}\bigg(\iint_{S_{T,n_0}}|u_j-u_k|^{\lambda+1}\xi^{\lambda+1}|D_L\xi|^{\lambda+1}\,dz\,d\tau\bigg)^{\frac{1}{\lambda+1}} \\
&\quad+\bigg(\int_{B_{n_0}}u_{0j}\,dz+\int_{B_{n_0}}u_{0k}\,dz\bigg)\sup_{B_{n_0}\times(t/2,T)}|u_j-u_k|^2\to0 \quad \text{при} \quad j,k\to\infty.
\end{aligned} \quad (3.9)$$

Переходя к пределу, мы использовали равномерную сходимость $\{u_n\}$, а также оценки (3.4) и (3.7). Теперь можно выделить подпоследовательность, для которой

$$D_Lu_n\to D_Lu \quad \text{п.в. на любом компакте } \mathfrak{K},$$
$$D_Lu_n\to D_Lu \quad \text{сильно в } L_{\lambda+1}(0,T;\mathfrak{L}_{1,\lambda+1}(B_{n_0})).$$

В интегральном тождестве для u_n можно перейти к пределу. Таким образом, можно считать доказанным, что u_n стремится равномерно к решению уравнения (1.1) на любом компакте внутри S_T. Перейдя к пределу при $n\to\infty$, видим, что оценки (3.4), (3.5) справедливы и для u. Чтобы доказать, что слабое решение уравнения является слабым решением задачи Коши (1.1), (1.2), нам необходимо проследить поведение u при $t \to 0$. Очевидно, что оценка (3.5) не дает равномерной ограниченности при $t \to 0$. Поэтому мы не можем использовать равномерную сходимость $\{u_n\}$, как раньше. Сначала получим вспомогательную оценку. Умножим уравнение (1.1) на $t^\beta u^\theta \xi^{\lambda+1}(z)$; $R, \beta, \theta > 0$ выберем позднее. В качестве срезающей возьмем функцию из пространства $C_0^1(\mathbb{R}^{N+M})$ такую, что

$$\xi(z) = \begin{cases} 0 & \text{при } \rho(z) > R, \\ 1 & \text{при } \rho(z) < \dfrac{R}{2}, \end{cases} \qquad |D_L \xi| \leqslant C\frac{2}{R}. \tag{3.10}$$

Проинтегрировав по $B_R \times (0,t)$ стандартным способом, получим

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\theta+1}\int_{B_R} t^\beta \xi^{\lambda+1}(z) u^{\theta+1}(z,t)\,dz + \theta \iint_{S_{t,R}} \tau^\beta \xi^{\lambda+1} u^{\theta-1} |D_L u|^{\lambda+1}\,dz\,d\tau \\ &\qquad + (\lambda+1)\iint_{S_{t,R}} \tau^\beta \xi^\lambda u^\theta |D_L u|^{\lambda-1} D_L u D_L \xi\,dz\,d\tau \\ &\qquad + \iint_{S_{t,R}} a(\rho(z)) f(\tau) |D_L u^\nu|^q \tau^\beta \xi^{\lambda+1} u^\theta\,dz\,d\tau \\ &= \frac{\beta}{\theta+1}\iint_{S_{t,R}} \tau^{\beta-1} \xi^{\lambda+1}(z) u^{\theta+1}(z,t)\,dz\,d\tau. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Используя неравенство Юнга и неравенство (3.5), оценим

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\theta+1}\int_{B_R} t^\beta \xi^{\lambda+1}(z) u^{\theta+1}(z,t)\,dz + \theta \iint_{S_{t,R}} \tau^\beta \xi^{\lambda+1} u^{\theta-1} |D_L u|^{\lambda+1}\,dz\,d\tau \\ &\quad + \iint_{S_{t,R}} a(\rho(z)) f(\tau) |D_L u^\nu|^q t^\beta \xi^{\lambda+1} u^\theta\,dz\,d\tau \\ &\leqslant C\iint_{S_{t,R}} \tau^{\beta-1} u^{\theta+1}(1+\tau R^{-(\lambda+1)} u^{\lambda-1})\,dz\,d\tau \leqslant C\iint_{S_{t,R}} \tau^{\beta-1} u^{\theta+1}\,dz\,d\tau. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Таким образом, если $\theta = (\lambda-1)/\lambda$, $0 < \beta < 1/\lambda$, R фиксировано, получена оценка

$$\iint_{S_{t,R}} \tau^\beta u^{-\frac{1}{\lambda}} |D_L u|^{\lambda+1}\,dz\,d\tau \leqslant C\iint_{S_{t,2R}} \tau^{\beta-1} u^{\frac{\lambda-1}{\lambda}+1}\,dz\,d\tau. \tag{3.13}$$

Последний интеграл можно оценить, пользуясь предложением 8 и неравенством (3.5):

$$\begin{aligned} &\iint_{S_{t,R}} \tau^{\beta-1} u^{\frac{\lambda-1}{\lambda}+1}\,dz\,d\tau \leqslant \left(\sup_{0<\tau<t}\int_{B_R} u\,dz\right)\int_0^t \tau^{\beta-1}\|u\|_{\infty,B_R}^{\frac{\lambda-1}{\lambda}}\,d\tau \\ &\quad \leqslant Ct^{\beta-\frac{Q(\lambda-1)}{K\lambda}}\left(\sup_{0<\tau<t}\int_{B_R} u\,dz\right)^{1+\frac{(\lambda+1)(\lambda-1)}{K\lambda}} \leqslant Ct^{\beta-\frac{Q(\lambda-1)}{K\lambda}}\|u_0\|_1^{1+\frac{(\lambda+1)(\lambda-1)}{K\lambda}}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Теперь можно непосредственно доказать, что u есть решение исходной задачи. Для произвольного компакта $\mathfrak{K} \subset \mathbb{R}^{N+M}$ найдется $R > 0$ такое, что $\mathfrak{K} \subset B_{R/2}$.

Умножив уравнение (1.1) на срезку ξ, определенную в (3.10), и проинтегрировав по $B_R \times (0,t)$ стандартным способом, получим

$$\begin{gathered}\int_{B_R} u(t)\xi\,dz + \iint_{S_{t,R}} |D_L u|^{\lambda-1} D_L u D_L \xi\,dz\,d\tau \\ + \iint_{S_{t,R}} a(\rho(z)) f(\tau) |D_L u^\nu|^q \xi\,dz\,d\tau = \int_{B_R} u_0 \xi\,dz, \\ \left|\int_{B_R} u(t)\xi\,dz - \int_{B_R} u_0\xi\,dz\right| \\ \leqslant \frac{C}{R}\iint S_{t,R} |D_L u|^\lambda\,dz\,d\tau + \iint_{S_{t,R}} a(\rho(z)) f(\tau)|D_L u^\nu|^q \xi\,dz\,d\tau \equiv \frac{C}{R} I_1 + I_2.\end{gathered} \tag{3.15}$$

Оценим последние интегралы

$$\begin{aligned} I_1 &= \iint_{S_{t,R}} |D_L u|^\lambda\,dz\,d\tau \\ &\leqslant \left(\iint_{S_{t,R}} \tau^\beta u^{-\frac{1}{\lambda}} |D_L u|^{\lambda+1}\,dz\,d\tau\right)^{\frac{\lambda}{\lambda+1}} \left(\iint_{S_{t,R}} \tau^{-\beta\lambda} u\,dz\,d\tau\right)^{\frac{1}{\lambda+1}} \\ &\leqslant \left(Ct^{\beta-\frac{Q(\lambda-1)}{K\lambda}} \left(\sup_{0<\tau<t} \int_{B_{2R}} u\,dz\right)^{1+\frac{(\lambda+1)(\lambda-1)}{K\lambda}}\right)^{\frac{\lambda}{\lambda+1}} \left(t^{1-\beta\lambda}\left(\sup_{0<\tau<t}\int_{B_{2R}} u\,dz\right)\right)^{\frac{1}{\lambda+1}} \\ &\leqslant Ct^{\frac{1}{K}} \left(\sup_{0<\tau<t}\int_{B_{2R}} u\,dz\right)^{1+\frac{\lambda-1}{K}} \leqslant \frac{C}{R} t^{\frac{1}{K}} \|u_0\|_1^{1+\frac{\lambda-1}{K}} \to 0 \quad \text{при } t \to 0. \end{aligned}$$

Интеграл I_2 ограничен сверху (см. (3.5)) и стремится к нулю вместе с t. Следовательно, (1.2) доказано.

Переходим к доказательству оценки (1.10).

Лемма 3.1. *Пусть u – неотрицательное решение уравнения* (1.1), $\operatorname{supp} u_0 \subset B_{R_0}$, $R_0 < \infty$, *тогда для любых* $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2$ *и* $R > 2R_0$, $R_i = R(1 - 2^{-i-1})$, $\tilde R_i = (R_i + R_{i+1})/2$, $R_i < \tilde R_i$, $U_i = \{\rho(z) > R_i\}$, $\tilde U_i = \{\rho(z) > \tilde R_i\}$ *справедливо неравенство*

$$\begin{gathered}\sup_{t_1<\tau<t_2} \int_{\tilde U_i} u^{\theta+1}\,dz + \int_{t_1}^{t_2}\int_{\tilde U_i} u^{\theta-1} |D_L u|^{\lambda+1}\,dz\,d\tau \\ + \int_{t_1}^{t_2}\int_{\tilde U_i} a(\rho(z)) f(\tau) u^\theta |D_L u^\nu|^q\,dz\,d\tau \leqslant C\frac{2^{i(\lambda+1)}}{R^{\lambda+1}} \int_{t_1}^{t_2}\int_{U_i\setminus\tilde U_i} u^{\lambda+\theta}\,dz\,d\tau.\end{gathered} \tag{3.16}$$

Доказательство. Умножим уравнение на $u^\theta \xi_i^{\lambda+1}(z)$; $\theta > 0$ выберем позднее. Выберем в качестве срезающей функцию из пространства $C^1(\mathbb{R}^{N+M})$ такую, что

$$\xi_i(z) = \begin{cases} 0 & \text{при } \rho(z) < R_i, \\ 1 & \text{при } \rho(z) > \tilde R_i, \end{cases} \qquad |D_L \xi_i| \leqslant C\frac{2^i}{R}.$$

Проинтегрировав по $\tilde U_i \times (0, t_2)$ стандартным способом, используя неравенство Юнга, получим требуемое неравенство. Заметим, что отсутствие в неравенстве члена $\sup \int_{\tilde U_i} u_0^{\theta+1}\,dz$ объясняется тем, что интегрирование идет по области, в которой не содержится носитель u_0.

Лемма 3.2. *Пусть u – неотрицательное решение уравнения* (1.1), $\operatorname{supp} u_0 \subset B_{R_0}$, $R_0<\infty$, *тогда для любых* $0\leqslant t$ *и* $R>2R_0$, $R_i=R(1-2^{-i-1})$, $\tilde R_i=(R_i+R_{i+1})/2$, $R_i<\tilde R_i$, $U_i=\{\rho(z)>R_i\}$, $\tilde U_i=\{\rho(z)>\tilde R_i\}$ *справедливо неравенство*

$$y_{i+1}\leqslant C\frac{2^{i(\lambda+1)}}{R^{\lambda+1}}t^{\frac{(1+\theta)(\lambda+1)}{K_{1+\theta}}}y_i^{1+\frac{(\lambda-1)(\lambda+1)}{K_{1+\theta}}}, \tag{3.17}$$

где

$$\begin{aligned}y_{i+1}\equiv \sup_{0<\tau<t}\int_{\tilde U_{i+1}} u^{\theta+1}\,dz+\int_0^t\int_{\tilde U_{i+1}} u^{\theta-1}|D_L u|^{\lambda+1}\,dz\,d\tau\\ +\int_0^t\int_{\tilde U_{i+1}} a(\rho(z))f(\tau)u^\theta|D_L u^\nu|^q\,dz\,d\tau+\frac{2^{i(\lambda+1)}}{R^{\lambda+1}}\int_0^t\int_{U_{i+1}\setminus\tilde U_{i+1}} u^{\lambda+\theta}\,dz\,d\tau.\end{aligned}$$

Доказательство. Пусть

$$\bar\xi_{i+1}(z)=\begin{cases}0 & \text{при } \rho(z)<\tilde R_i,\\ 1 & \text{при } \rho(z)>R_{i+1},\end{cases}\qquad |D_L\bar\xi_i|\leqslant C\frac{2^i}{R}.$$

В неравенстве (2.1) положим $f=v_{i+1}=(u\bar\xi_{i+1}(z))^\omega$, $\omega=(\lambda+\theta)/(\lambda+1)$, $\beta_1=Q(\lambda-1)/K_{1+\theta}$, $\beta_2=(\theta+1)/\omega>1$. Проинтегрируем неравенство (2.1) от 0 до t по $d\tau$:

$$\begin{aligned}\int_0^t\int_{U_{i+1}\setminus\tilde U_{i+1}} u^{\lambda+\theta}\,dz\,d\tau&=\int_0^t\int_{U_{i+1}\setminus\tilde U_{i+1}} v_{i+1}^{\lambda+1}\,dz\,d\tau\\ &\leqslant C\int_0^t\biggl(\int_{\mathbb R^{N+M}}|D_L v_{i+1}|^{\lambda+1}\,dz\biggr)^{\beta_1}\biggl(\int_{\tilde U_i} v_{i+1}^{\beta_2}\,dz\biggr)^{\frac{(1-\beta_1)(\lambda+1)}{\beta_2}}d\tau\\ &\leqslant Ct^{1-\beta_1}\biggl(\int_0^t\int_{\mathbb R^{N+M}}|D_L v_{i+1}|^{\lambda+1}\,dz\,d\tau\biggr)^{\beta_1}\biggl(\sup_{0<\tau<t}\int_{\tilde U_i} v_{i+1}^{\beta_2}\,dz\biggr)^{\frac{(1-\beta_1)(\lambda+1)}{\beta_2}}\\ &\leqslant Ct^{1-\beta_1}y_i^{\beta_1+\frac{\lambda+1}{\beta_2}(1-\beta_1)}=Ct^{1-\beta_1}y_i^{1+(1-\beta_1)(\frac{\lambda+1}{\beta_2}-1)}.\end{aligned}$$

Применив лемму 3.1, получим требуемую оценку.

Используем демпфирующую часть уравнения, чтобы получить вспомогательное рекурсивное неравенство.

Лемма 3.3. *Пусть выполнены условия леммы* 3.2 *и*

$$Z(t)=\inf\bigl\{\rho: u(\,\cdot\,,t)=0 \text{ для п.в. } z\in\mathbb R^{N+M}\setminus B_\rho\bigr\}.$$

Тогда справедливо неравенство

$$y_{i+1}\leqslant C\frac{2^{i(\lambda+1)}}{R^{\lambda+1}}R^{Q\frac{\nu q-\lambda}{\nu q+\theta}-q\frac{\lambda+\theta}{\nu q+\theta}}\frac{t^{\frac{\nu q-\lambda}{\nu q+\theta}}}{f(t)^{\frac{\lambda+\theta}{\nu q+\theta}}}\biggl(\frac{Z(t)^{2q}}{a(Z(t))}\biggr)^{\frac{\lambda+\theta}{\nu q+\theta}}y_i^{\frac{\lambda+\theta}{\nu q+\theta}}. \tag{3.18}$$

Доказательство. Пусть $\omega = u^{\frac{\nu q+\theta}{q}}$. В силу предложения 7 ясно, что $Z(t)$ конечно для каждого t. Следовательно, $\omega \in \overset{\circ}{\mathfrak{L}}_{1,p}(B_{Z(t)})$ для каждого $t > 0$. Используя обозначения и результаты лемм 3.1 и 3.2, (2.2), неравенство Гёльдера и свойства весовых функций $a(\rho)$ и $f(t)$, получаем

$$\begin{aligned} y_{i+1} &\leqslant C\frac{2^{i(\lambda+1)}}{R^{\lambda+1}}\int_0^t\int_{U_{i+1}\setminus\tilde U_{i+1}} u^{\lambda+\theta}\,dz\,d\tau \\ &\leqslant C\frac{2^{i(\lambda+1)}}{R^{\lambda+1}}\int_0^t\biggl(\int_{B_{Z(t)}\setminus B_{R_{i+1}}}\omega^q\,dz\biggr)^{\frac{\lambda+\theta}{\nu q+\theta}}\operatorname{mes}\{U_{i+1}\setminus\tilde U_{i+1}\}^{\frac{\nu q-\lambda}{\nu q+\theta}}\,d\tau \\ &\leqslant C\frac{2^{i(\lambda+1)}}{R^{\lambda+1}}R_{i+1}^{-q\frac{\lambda+\theta}{\nu q+\theta}} \\ &\qquad\times\int_0^t\biggl(\frac{Z(t)^{2q}}{a(Z(t))f(\tau)}\int_{B_{Z(t)}\setminus B_{R_{i+1}}}a(\rho(z))f(\tau)|D_L\omega|^q\,dz\biggr)^{\frac{\lambda+\theta}{\nu q+\theta}}\tilde R_i^{Q\frac{\nu q-\lambda}{\nu q+\theta}}\,d\tau \\ &\leqslant C\frac{2^{i(\lambda+1)}}{R^{\lambda+1}}R^{Q\frac{\nu q-\lambda}{\nu q+\theta}-q\frac{\lambda+\theta}{\nu q+\theta}}\biggl(\frac{Z(t)^{2q}}{a(Z(t))}\biggr)^{\frac{\lambda+\theta}{\nu q+\theta}}y_i^{\frac{\lambda+\theta}{\nu q+\theta}}\biggl(\int_0^t\biggl[\frac{1}{f(\tau)}\biggr]^{\frac{\lambda+\theta}{\nu q-\lambda}}d\tau\biggr)^{\frac{\nu q-\lambda}{\nu q+\theta}} \\ &\leqslant C\frac{2^{i(\lambda+1)}}{R^{\lambda+1}}R^{Q\frac{\nu q-\lambda}{\nu q+\theta}-q\frac{\lambda+\theta}{\nu q+\theta}}\frac{t^{\frac{\nu q-\lambda}{\nu q+\theta}}}{f(t)^{\frac{\lambda+\theta}{\nu q+\theta}}}\biggl(\frac{Z(t)^{2q}}{a(Z(t))}\biggr)^{\frac{\lambda+\theta}{\nu q+\theta}}y_i^{\frac{\lambda+\theta}{\nu q+\theta}}. \end{aligned}$$

Здесь появляется условие на θ. Выберем его достаточно малым, чтобы выполнялось неравенство $-\mu\frac{\lambda+\theta}{\nu q-\lambda}+1>0$.

Лемма 3.4. *Если существует последовательность $\{y_i\}$ такая, что*

$$y_{i+1}\leqslant C2^{i(\lambda+1)}Ay_i^{\frac{1}{a}},\quad a<1,\qquad y_{i+1}\leqslant C2^{i(\lambda+1)}By_i^{\frac{1}{b}},\quad b>1, \tag{3.19}$$

и если достаточно мала величина

$$(y_0B^b)^{\frac{1-a}{b}}A^a\leqslant C^{-\frac{1}{(1-a)/b}}2^{-\frac{(\lambda+1)(a+b)}{((1-a)/b)^2}}\equiv C_0, \tag{3.20}$$

где $C_0<1$ – фиксированное число, тогда $y_i\to 0$ при $i\to\infty$.

Доказательство. По условию леммы имеем

$$y_{i+1}^a\leqslant C2^{i(\lambda+1)a}A^ay_i,\qquad y_{i+1}^b\leqslant C2^{i(\lambda+1)b}B^by_i,$$

откуда следует, что

$$\frac{y_{i+1}^a}{A^a}+\frac{y_{i+1}^b}{B^b}\leqslant C2^{i(\lambda+1)(a+b)}y_i.$$

Используя неравенство Юнга с показателями

$$\frac{1}{p}=\frac{b}{b+1-a},\qquad \frac{1}{p'}=\frac{1-a}{b+1-a},$$

получим

$$\frac{y_{i+1}^{\frac{b}{b+1-a}}}{A^{\frac{ab}{b+1-a}}B^{\frac{b(1-a)}{b+1-a}}}=\frac{y_{i+1}^{a\frac{1}{p}}y_{i+1}^{b\frac{1}{p'}}}{A^{a\frac{1}{p}}B^{b\frac{1}{p'}}}\leqslant\frac{y_{i+1}^a}{A^a}+\frac{y_{i+1}^b}{B^b}.$$

Если обозначить $b/(b+1-a)=\varepsilon_1<1$, тогда

$$\frac{y_{i+1}^{\varepsilon_1}}{A^{a\varepsilon_1}B^{b(1-\varepsilon_1)}}\leqslant C2^{i(\lambda+1)(a+b)}y_i,$$

и по итерационной лемме (предложение 5), если выполняется (3.20), имеет место стремление к нулю.

Введем вспомогательные обозначения

$$\begin{aligned} &A \equiv R^{-(\lambda+1)} t^{\frac{(1+\theta)(\lambda+1)}{K_{1+\theta}}}, \qquad a = \frac{1}{1+(\lambda-1)(\lambda+1)/K_{1+\theta}} < 1, \\ &B \equiv R^{Q\frac{\nu q-\lambda}{\nu q+\theta}-(\lambda+1)-q\frac{\lambda+\theta}{\nu q+\theta}} \frac{t^{\frac{\nu q-\lambda}{\nu q+\theta}}}{f(t)^{\frac{\lambda+\theta}{\nu q+\theta}}} \left(\frac{Z(t)^{2q}}{a(Z(t))}\right)^{\frac{\lambda+\theta}{\nu q+\theta}}, \qquad b = \frac{\nu q+\theta}{\lambda+\theta} > 1. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Лемма 3.5. *Пусть выполнены условия лемм 3.1, 3.2, тогда условие (3.20) справедливо, если*

$$\left(\frac{Z(t)^{2q}}{a(Z(t))}\right)^{\lambda-1} R^{-2q(\lambda-1)-H} \frac{t^{\nu q-\lambda}}{f(t)^{\lambda-1}} \leqslant \delta, \tag{3.22}$$

где δ – фиксированное число и достаточно мало.

Доказательство. Из лемм 3.3, 3.2 следует, что (3.19) выполнено. В формулировке 3.1 положим для произвольного $\hat{R}$: $\hat{R} \geqslant 2R \geqslant 4R_0$

$$\tilde{R}_i = \hat{R}_i, \quad R_i = \hat{R}_{i+1}, \quad R_i < \tilde{R}_i, \qquad \text{где} \ \ \hat{R}_i = \frac{\hat{R}}{4}(1+2^{-i}), \quad t_1 = 0, \quad t_2 = t.$$

Лемма 3.1 дает

$$\begin{aligned} \sup_{0<\tau<t} \int_{\rho\geqslant\hat{R}_i} u^{\theta+1}\,dz + \int_0^t \int_{\rho\geqslant\hat{R}_i} u^{\theta-1}|D_L u|^{\lambda+1}\,dz\,d\tau& \\ + \int_0^t \int_{\rho\geqslant\hat{R}_i} a(\rho(z)) f(\tau) u^{\theta}|D_L u^{\nu}|^q\,dz\,d\tau& \\ \leqslant C\frac{2^{i(\lambda+1)}}{R^{\lambda+1}} \int_0^t \int_{\hat{R}_{i+1}\leqslant\rho\leqslant\hat{R}_i} u^{\lambda+\theta}\,dz\,d\tau.& \end{aligned} \tag{3.23}$$

Повторим доказательство леммы 3.3 до некоторой степени. Пусть $\omega = u^{\frac{\nu q+\theta}{q}} \in \mathring{\mathfrak{L}}_{1,p}(B_{Z(t)})$ для каждого $t>0$. Оценим правую часть (3.23), используя неравенство Гёльдера и неравенство Пуанкаре (2.2)

$$\begin{aligned} &\int_0^t \int_{\hat{R}_{i+1}\leqslant\rho\leqslant\hat{R}_i} u^{\lambda+\theta}\,dz\,d\tau = \int_0^t \int_{\hat{R}_{i+1}\leqslant\rho\leqslant\hat{R}_i} \omega^{\frac{(\lambda+\theta)q}{\nu q+\theta}}\,dz\,d\tau \\ &\quad\leqslant C\int_0^t \left(\frac{Z(t)^{2q}}{a(Z(t))f(\tau)} \int_{\hat{R}_{i+1}\leqslant\rho\leqslant Z(t)} a(\rho(z)) f(\tau)|D_L\omega|^q\,dz\right)^{\frac{\lambda+\theta}{\nu q+\theta}} \hat{R}_{i+1}^{-q\frac{\lambda+\theta}{\nu q+\theta}} \hat{R}_i^{Q\frac{\nu q-\lambda}{\nu q+\theta}}\,d\tau \\ &\quad\leqslant C\hat{R}^{Q\frac{\nu q-\lambda}{\nu q+\theta}-q\frac{\lambda+\theta}{\nu q+\theta}} \left(\frac{Z(t)^{2q}}{a(Z(t))}\right)^{\frac{\lambda+\theta}{\nu q+\theta}} \\ &\qquad\times\left(\int_0^t \int_{\hat{R}_{i+1}\leqslant\rho} a(\rho(z)) f(\tau)|D_L\omega|^q\,dz\,d\tau\right)^{\frac{\lambda+\theta}{\nu q+\theta}} \frac{t^{\frac{\nu q-\lambda}{\nu q+\theta}}}{f(t)^{\frac{\lambda+\theta}{\nu q+\theta}}}. \end{aligned}$$

Здесь опять появляется требование к θ. Мы выбрали его достаточно малым, чтобы $-\mu\frac{\lambda+\theta}{\nu q-\lambda}+1>0$. Введем обозначение

$$
\begin{gathered}
y^{(i)}(\hat{R}) \equiv \sup_{0<\tau<t}\int_{\rho\geqslant\hat{R}_i} u^{\theta+1}\,dz + \int_0^t\int_{\rho\geqslant\hat{R}_i} u^{\theta-1}|D_L u|^{\lambda+1}\,dz\,d\tau \\
+\int_0^t\int_{\rho\geqslant\hat{R}_i} a(\rho(z))f(\tau)u^{\theta}|D_L u^{\nu}|^q\,dz\,d\tau + \frac{2^{i(\lambda+1)}}{R^{\lambda+1}}\int_0^t\int_{\hat{R}_{i+1}\leqslant\rho\leqslant\hat{R}_i} u^{\lambda+\theta}\,dz\,d\tau, \\
\varepsilon=\frac{\nu q-\lambda}{\nu q+\theta}.
\end{gathered}
$$

Аналогично лемме 3.3 получим оценку

$$
\begin{aligned}
y^{(i)}(\hat{R}) &\leqslant C\frac{2^{i(\lambda+1)}}{R^{\lambda+1}}R^{Q\frac{\nu q-\lambda}{\nu q+\theta}-q\frac{\lambda+\theta}{\nu q+\theta}}\frac{t^{\frac{\nu q-\lambda}{\nu q+\theta}}}{f(t)^{\frac{\lambda+\theta}{\nu q+\theta}}}\left(\frac{Z(t)^{2q}}{a(Z(t))}\right)^{\frac{\lambda+\theta}{\nu q+\theta}} y^{(i+1)}(\hat{R})^{\frac{\lambda+\theta}{\nu q+\theta}} \\
&= C2^{i(\lambda+1)}B[y^{(i+1)}(\hat{R})]^{1-\varepsilon}.
\end{aligned}
$$

Имея оценки (2.11)–(2.13) и (3.23) можем утверждать, что для $\tau\in(0,t)$

$$
y^{(i)}(\hat{R})\leqslant C_1'(\hat{R},t,\|u_0\|_{1,\mathbb{R}^{N+M}})\quad\text{сразу для всех } i,
$$

откуда по итерационной лемме (предложение 6) имеем

$$
[y^{(0)}(\hat{R})]^{\varepsilon}\leqslant CB.
$$

Оценим с помощью полученного неравенства y_0 из условия (3.20)

$$
\begin{aligned}
y_0 \equiv{}& \sup_{0<\tau<t}\int_{\tilde{U}_0} u^{\theta+1}\,dz + \int_0^t\int_{\tilde{U}_0} u^{\theta-1}|D_L u|^{\lambda+1}\,dz\,d\tau \\
&+\int_0^t\int_{\tilde{U}_0} a(\rho(z))f(\tau)u^{\theta}|D_L u^{\nu}|^q\,dz\,d\tau + \frac{2^{i(\lambda+1)}}{R^{\lambda+1}}\int_0^t\int_{U_0\setminus\tilde{U}_0} u^{\lambda+\theta}\,dz\,d\tau \\
\leqslant{}& y^{(0)}\left(\frac{5R}{4}\right)+y^{(0)}(R)\leqslant CB^{\frac{1}{\varepsilon}}=CB^{\frac{\nu q+\theta}{\nu q-\lambda}}.
\end{aligned}
$$

Радиусы подобраны с учетом того, что $\tilde{R}_0=5R/8$, $R_0=R/2$, $\hat{R}_0=\hat{R}/2$, $\hat{R}_1=3\hat{R}/8$. Для доказательства леммы требуется найти условие, при котором справедливо (3.20). С учетом полученной оценки нам потребуется доказать, что

$$
\left(B^{\frac{\nu q+\theta}{\nu q-\lambda}}B^b\right)^{\frac{1-a}{b}}A^a\leqslant\delta.
$$

Используя второй раз обозначения (3.21) и возведя неравенство в степень

$$
\frac{[(\nu q-\lambda)(K_{1+\theta}+\lambda^2-1)]}{[(\lambda+1)(\lambda+\theta)]},
$$

получим условие в виде

$$
\left(\frac{Z(t)^{2q}}{a(Z(t))}\right)^{\lambda-1}R^{(\lambda+1)(1-\nu q)-q(\lambda-1)}\frac{t^{\nu q-\lambda}}{f(t)^{\lambda-1}}\leqslant\delta. \tag{3.24}
$$

Доказательство леммы завершено, поскольку $(\lambda+1)(1-\nu q)=-q(\lambda-1)-H$.

Если выбрать R достаточно большим, чтобы выполнялось равенство в условии (3.24), по итерационной лемме (предложение 5) $y_i \to 0$ при $i \to \infty$. Откуда следует, что $u = 0$ п.в. вне B_R, $Z(t) \leqslant R$. Значит, из условия (3.24) следует

$$\frac{t^{\nu q-\lambda}}{f(t)^{\lambda-1}} \leqslant \delta[a(R)]^{\lambda-1}R^H,$$

и справедливо

$$Z(t) \leqslant \varphi\biggl(\frac{t^{\nu q-\lambda}}{f(t)^{\lambda-1}}\biggr).$$

По определению (1.6) ясно, что верно (1.10). Доказательство теоремы 1 завершено.

§ 4. Доказательство теоремы 2

Докажем оценку (1.11). Умножим обе части уравнения (1.1) на u^θ, $\theta > 0$, и проинтегрируем на шаре $B_{Z(t)}$. Для $0 < \tau < t$ имеем

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+\theta}\frac{d}{d\tau}\int_{B_{Z(t)}} u^{\theta+1}\,dz &\leqslant -\int_{B_{Z(t)}} a(\rho(z))f(\tau)u^\theta|D_L u^\nu|^q\,dz\\ &\leqslant -C\int_{B_{Z(t)}} a(\rho(z))f(\tau)|D_L u^{\frac{\nu q+\theta}{q}}|^q\,dz.\end{aligned}$$

Рассмотрим два интеграла. Первый:

$$\int_{B_{Z(t)}} u^{\theta+1}\,dz \leqslant \biggl(\int_{B_{Z(t)}} u^{\nu q+\theta}|D_L\rho|^q\,dz\biggr)^{\frac{1+\theta}{\nu q+\theta}}\biggl(\int_{B_{Z(t)}} |D_L\rho|^{-q\frac{1+\theta}{\nu q-1}}\,dz\biggr)^{\frac{\nu q-1}{\nu q+\theta}}.$$

Используем замену переменных из предложения 4. Множество

$$B_R \equiv \left\{\begin{matrix} 0 \leqslant \rho \leqslant R \\ 0 \leqslant \varphi_1 \leqslant 2\pi \\ 0 \leqslant \varphi_2 < \pi \\ \dots \\ 0 \leqslant \varphi_{M+N-1} < \pi \end{matrix}\right\}, \tag{4.1}$$

обозначим

$$\Psi \equiv \left\{\begin{matrix} 0 \leqslant \varphi_1 \leqslant 2\pi \\ 0 \leqslant \varphi_2 < \pi \\ \dots \\ 0 \leqslant \varphi_{M+N-1} < \pi \end{matrix}\right\}, \tag{4.2}$$

и мы получим оценку второго множителя:

$$\begin{aligned}\int_{B_R} |D_L\rho|^{-q\frac{1+\theta}{\nu q-1}}\,dz &= \int_{B_R}\biggl(\frac{\rho^\alpha}{|x|^\alpha}\biggr)^{q\frac{1+\theta}{\nu q-1}} J(\rho,\varphi)\,d\rho\,d\varphi_1\cdots d\varphi_{M+N-1}\\ &= \int \frac{J(\rho,\varphi)\,d\rho\,d\varphi}{\bigl((\cos\varphi_{M+N-1}\cdots\cos\varphi_1)^2+\dots+(\cos\varphi_{M+N-1}\cdots\sin\varphi_{M-1})^2\bigr)^{\frac{\alpha q(\theta+1)}{2(\alpha+1)(\nu q-1)}}}\\ &= \int_0^R \rho^{Q-1}\,d\rho\int\dots\int_\Psi \Phi(\varphi)\,d\varphi_1\cdots d\varphi_{M+N-1} \leqslant CR^Q,\end{aligned}$$

где

$$\Phi(\varphi)=\frac{\cos^{\frac{1}{\alpha+1}}\varphi_2\cos^{\frac{2}{\alpha+1}}\varphi_3\cdots\cos^{\frac{M-2}{\alpha+1}}\varphi_{M-1}\cos^{\frac{M-1}{\alpha+1}}\varphi_M\cos^{\frac{M}{\alpha+1}}\varphi_{M+1}}{(\cos\varphi_{M+N-1}\cdots\varphi_{M+1})^{\frac{\alpha q(1+\theta)}{(\alpha+1)(\nu q-1)}}(\sin\varphi_1\cdots\sin\varphi_{M-1})^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}}$$
$$\times\frac{\cos^{\frac{M}{\alpha+1}+1}\varphi_{M+2}\cdots\cos^{\frac{M}{\alpha+1}+N-2}\varphi_{M+N-1}}{\cos\varphi_M{}^{\frac{\alpha q(1+\theta)}{(\alpha+1)(\nu q-1)}+\frac{\alpha}{\alpha+1}}(\cos\varphi_1\cdots\cos\varphi_{M-1})^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}}.$$

Действительно, интеграл по $d\varphi$ может иметь особенности только для $\varphi_j=\varphi_{01j}$, поскольку $\sin\varphi_{01j}=0$, $j=\overline{M-1,M+N-1}$, и $\varphi_j=\varphi_{02j}$, поскольку $\cos\varphi_{02j}=0$, $j=\overline{M,M+N-1}$. Рассмотрим эти случаи. В окрестности точки φ_{01j} функция под интегралом $\Phi(\varphi)$ будет эквивалентна

$$\frac{1}{\sin(\varphi_j-\varphi_{01j})^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}}\sim\frac{1}{(\varphi_j-\varphi_{01j})^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}},$$

т.е. имеет устранимую особенность. В окрестности точки φ_{02M} функция под интегралом $\Phi(\varphi)$ будет эквивалентна $(\varphi_M-\varphi_{02M})^{\frac{M-1}{\alpha+1}-\frac{\alpha q(\theta+1)}{(\alpha+1)(\nu q-1)}-\frac{\alpha}{\alpha+1}}$, особенность устранима, если

$$M-\frac{\alpha q}{\nu q-1}>0,\qquad 0<\theta\leqslant\frac{M(\nu q-1)-\alpha q}{\alpha q}.$$

В окрестности точки φ_{02j}, $j=\overline{M+1,M+N-1}$, функция под интегралом

$$\Phi(\varphi)\sim(\varphi_j-\varphi_{02j})^{\frac{M}{\alpha+1}+(j-M-1)-\frac{\alpha q(\theta+1)}{(\alpha+1)(\nu q-1)}},$$

особенность устранима, если условие

$$M-\frac{\alpha q}{\nu q-1}>0,\qquad 0<\theta\leqslant\frac{M(\nu q-1)-\alpha q}{\alpha q}$$

в силе. В окрестности точки φ_{02j}, $j=\overline{1,M-1}$, функция под интегралом $\Phi(\varphi)\sim(\varphi_j-\varphi_{02j})^{\frac{j-1}{\alpha+1}-\frac{\alpha}{\alpha+1}}$, особенность устранима. Значит, интеграл по $d\varphi$ сходится к некоторой постоянной величине. Имеем теперь

$$\int_{B_{Z(t)}}u^{\theta+1}\,dz\leqslant C\Big(\int_{B_{Z(t)}}u^{\nu q+\theta}|D_L\rho|^q\,dz\Big)^{\frac{1+\theta}{\nu q+\theta}}Z(t)^{Q\frac{\nu q-1}{\nu q+\theta}}.$$

Рассмотрим второй интеграл.

$$\begin{aligned}-C\int_{B_{Z(t)}}a(\rho(z))f(\tau)|D_Lu^{\frac{\nu q+\theta}{q}}|^q\,dz&\leqslant -C\int_{B_{Z(t)}}\frac{a(\rho(z))}{\rho^q}f(\tau)|D_L\rho|^q\,|u^{\frac{\nu q+\theta}{q}}|^q\,dz\\&\leqslant -CZ(t)^{-q}a(Z(t))f(\tau)\int_{B_{Z(t)}}|D_L\rho|^q\,|u^{\frac{\nu q+\theta}{q}}|^q\,dz\\&= -CZ(t)^{-q}a(Z(t))f(\tau)\int_{B_{Z(t)}}|D_L\rho|^qu^{\nu q+\theta}\,dz.\end{aligned}$$

Здесь мы использовали неравенство типа Харди (2.3). Следовательно,

$$\frac{d}{d\tau}\Big(\int_{B_{Z(t)}}u^{\theta+1}\,dz\Big)\leqslant -CZ(t)^{-q}a(Z(t))f(\tau)Z(t)^{-\frac{Q(\nu q-1)}{1+\theta}}\Big(\int_{B_{Z(t)}}u^{\theta+1}\,dz\Big)^{\frac{\nu q+\theta}{1+\theta}}. \tag{4.3}$$

Решив это дифференциальное неравенство, получим

$$\int_{B_{Z(t)}} u^{\theta+1}\,dz \leqslant CZ(t)^{\frac{q(1+\theta)}{\nu q-1}+Q} a(Z(t))^{-\frac{1+\theta}{\nu q-1}} t^{-\frac{1+\theta}{\nu q-1}} f(t)^{-\frac{1+\theta}{\nu q-1}}.$$

Оценим массу решения

$$\int_{\mathbb{R}^{N+M}} u\,dz = \int_{B_{Z(t)}} u\,dz \leqslant \biggl(\int_{B_{Z(t)}} u^{\theta+1}\,dz\biggr)^{\frac{1}{1+\theta}} \operatorname{mes}^{\frac{\theta}{1+\theta}}\{B_{Z(t)}\}$$
$$\leqslant C\frac{Z(t)^{Q+\frac{q}{\nu q-1}}}{a(Z(t))^{\frac{1}{\nu q-1}} t^{\frac{1}{\nu q-1}} f(t)^{\frac{1}{\nu q-1}}}. \tag{4.4}$$

По определению (1.6) ясно, что

$$\omega(t)t^{\frac{1}{K}} = \varphi\biggl(\frac{t^{\nu q-\lambda}}{f(t)^{\lambda-1}}\biggr), \qquad a(\omega(t)t^{\frac{1}{K}})^{\lambda-1}(\omega(t)t^{\frac{1}{K}})^{H} = \frac{t^{\nu q-\lambda}}{f(t)^{\lambda-1}},$$
$$a(\omega(t)t^{\frac{1}{K}})f(t) = \frac{t^{\frac{\nu q-\lambda}{\lambda-1}-\frac{H}{K(\lambda-1)}}}{\omega^{\frac{H}{\lambda-1}}(t)}. \tag{4.5}$$

Используя (4.4), из неравенства (4.5) легко получить (1.11). Получим соответствующую оценку L_∞-нормы решения. Известно, следуя предложению 8, что для $t > t_0 = R_0^{-K}\|u_0\|_{1,\mathbb{R}^{N+M}}^{\lambda-1}$

$$\|u\|_{\infty,\mathbb{R}^{N+M}} \leqslant C\|u\|_{1,\mathbb{R}^{N+M}}^{\frac{\lambda+1}{K}} t^{-\frac{Q}{K}} \leqslant C\|u\|_{\infty,\mathbb{R}^{N+M}}^{\frac{\lambda+1}{K}} Z(t)^{\frac{Q(\lambda+1)}{K}} t^{-\frac{Q}{K}},$$
$$\|u\|_{\infty,\mathbb{R}^{N+M}}^{1-\frac{\lambda+1}{K}} \leqslant CZ(t)^{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}} t^{-\frac{1}{\lambda-1}}.$$

Теорема 2 доказана.

§ 5. Доказательство теоремы 3

В этой теореме исследуются два случая $\lambda = 1$ и $\nu = 1$, где можно получить оценку массы решения без использования компактности носителя начальной функции.

$$\int_{\mathbb{R}^{N+M}} u\,dz = \int_{B_R} u\,dz + \int_{\mathbb{R}^{N+M}\setminus B_R} u\,dz := E_1(t) + E_2(t).$$

Здесь R – фиксированное число, которое будет выбрано позднее.

$$E_1(t) = \int_{B_R} u\,dz \leqslant \biggl(\int_{B_R} u^{\nu q}|D_L\rho|^q\,dz\biggr)^{\frac{1}{\nu q}} \biggl(\int_{B_R} |D_L\rho|^{-q\frac{1}{\nu q-1}}\,dz\biggr)^{\frac{\nu q-1}{\nu q}}$$
$$= I_1^{\frac{1}{\nu q}} I_2^{\frac{\nu q-1}{\nu q}}.$$

Используем предложение 3:

$$I_1 \leqslant \frac{R^q}{a(R)}\int_{B_R} \frac{u^{\nu q}|D_L\rho|^q a(\rho)}{\rho^q}\,dz \leqslant C\frac{R^q}{a(R)}\int_{\mathbb{R}^{N+M}} a(\rho(z))|D_L u^\nu|^q\,dz.$$

Рассмотрим второй множитель, использовав замену переменных (2.5) из предложения 4. Мы получим

$$\begin{aligned}I_2 &= \int_{B_R} |D_L\rho|^{-q\frac{1}{\nu q-1}}\,dz = \int_{B_R}\left(\frac{\rho^\alpha}{|x|^\alpha}\right)^{q\frac{1}{\nu q-1}} J(\rho,\varphi)\,d\rho\,d\varphi_1\cdots d\varphi_{M+N-1}\\ &= \int \frac{J(\rho,\varphi)\,d\rho\,d\varphi}{\left((\cos\varphi_{M+N-1}\cdots\cos\varphi_1)^2+\cdots+(\cos\varphi_{M+N-1}\cdots\sin\varphi_{M-1})^2\right)^{\frac{\alpha q}{2(\alpha+1)(\nu q-1)}}}\\ &= \int_0^R \rho^{Q-1}\,d\rho\iint_\Psi \Phi(\varphi)\,d\varphi_1\cdots d\varphi_{M+N-1}\leqslant CR^Q,\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\Phi(\varphi) = {}&\frac{\cos^{\frac{1}{\alpha+1}}\varphi_2\cos^{\frac{2}{\alpha+1}}\varphi_3\cdots\cos^{\frac{M-2}{\alpha+1}}\varphi_{M-1}\cos^{\frac{M-1}{\alpha+1}}\varphi_M\cos^{\frac{M}{\alpha+1}}\varphi_{M+1}}{(\cos\varphi_{M+N-1}\cdots\cos\varphi_{M+1})^{\frac{\alpha q}{(\alpha+1)(\nu q-1)}}(\sin\varphi_1\cdots\sin\varphi_{M-1})^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}}\\ &\times\frac{\cos^{\frac{M}{\alpha+1}+1}\varphi_{M+2}\cdots\cos^{\frac{M}{\alpha+1}+N-2}\varphi_{M+N-1}}{\cos\varphi_M^{\frac{\alpha q}{(\alpha+1)(\nu q-1)}+\frac{\alpha}{\alpha+1}}(\cos\varphi_1\cdots\cos\varphi_{M-1})^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}}.\end{aligned}$$

Действительно, интеграл по $d\varphi$ может иметь особенности только для $\varphi_j = \varphi_{01j}$, поскольку $\sin\varphi_{01j} = 0$, $j = \overline{M-1, M+N-1}$, и $\varphi_j = \varphi_{02j}$, поскольку $\cos\varphi_{02j} = 0$, $j = \overline{M, M+N-1}$. Рассмотрим эти случаи. В окрестности точки φ_{01j} функция под интегралом $\Phi(\varphi)$ будет эквивалентна

$$\frac{1}{\sin(\varphi_j-\varphi_{01j})^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}}\sim\frac{1}{(\varphi_j-\varphi_{01j})^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}},$$

т.е. имеет устранимую особенность. В окрестности точки φ_{02M} функция под интегралом $\Phi(\varphi)$ будет эквивалентна $(\varphi_M-\varphi_{02M})^{\frac{M-1}{\alpha+1}-\frac{\alpha q}{(\alpha+1)(\nu q-1)}-\frac{\alpha}{\alpha+1}}$, особенность устранима, если $M-\alpha q/(\nu q-1)>0$. В окрестности точки φ_{02j}, $j = \overline{M+1, M+N-1}$, функция под интегралом

$$\Phi(\varphi)\sim(\varphi_j-\varphi_{02j})^{\frac{M}{\alpha+1}+(j-M-1)-\frac{\alpha q}{(\alpha+1)(\nu q-1)}},$$

особенность устранима, если условие $M-\alpha q/(\nu q-1)>0$ в силе. В окрестности точки φ_{02j}, $j=\overline{1, M-1}$, функция под интегралом $\Phi(\varphi)\sim(\varphi_j-\varphi_{02j})^{\frac{j-1}{\alpha+1}-\frac{\alpha}{\alpha+1}}$, особенность устранима. Значит, интеграл по $d\varphi$ сходится к некоторой постоянной величине. В итоге имеем

$$E_1(t)\leqslant C\left(\frac{R^q}{a(R)f(t)}\int_{\mathbb{R}^{N+M}} a(\rho(z))f(t)|D_Lu^\nu|^q\,dz\right)^{\frac{1}{\nu q}} R^{Q\frac{\nu q-1}{\nu q}}. \tag{5.1}$$

Если проинтегрировать уравнение по $\mathbb{R}^{N+M}$ и перебросить производные во втором слагаемом, получим

$$\frac{d}{d\tau}\int_{\mathbb{R}^{N+M}} u\,dz = -\int_{\mathbb{R}^{N+M}} a(\rho(z))f(\tau)|D_Lu^\nu|^q\,dz. \tag{5.2}$$

Тогда имеем

$$\int_{\mathbb{R}^{N+M}} u(\tau)\,dz\leqslant C\frac{R^{\frac{q}{\nu q}+Q\frac{\nu q-1}{\nu q}}}{f(\tau)^{\frac{1}{\nu q}}a(R)^{\frac{1}{\nu q}}}\left(-\frac{d}{d\tau}\int_{\mathbb{R}^{N+M}} u(\tau)\,dz\right)^{\frac{1}{\nu q}}+E_2(\tau). \tag{5.3}$$

Оценим $E_2(\tau)$ для случая $\nu = 1$. Уравнение примет вид

$$u_t = \operatorname{div}_L\left(|D_L u|^{\lambda-1} D_L u\right) - a(\rho(z)) f(t) |D_L u|^q,$$
$$(z,t) \in S_T = \mathbb{R}^{N+M} \times (0, T_r), \qquad \lambda < q < \lambda + 1.$$

Выберем срезающую функцию

$$\xi(z) = \begin{cases} 0 & \text{при } \rho(z) < \dfrac{R}{2}, \\ 1 & \text{при } \rho(z) > R, \end{cases} \qquad 0 \leqslant \xi \leqslant 1, \quad |D_L \xi| \leqslant \frac{C}{R}.$$

Умножим уравнение на ξ^s, где $s = q/(q-\lambda) > \lambda + 1$, и проинтегрируем по частям на множестве $\mathbb{R}^{N+M}$. Затем получим неравенство

$$\frac{d}{d\tau} \int_{\mathbb{R}^{N+M}} u \xi^s \, dz + \int_{\mathbb{R}^{N+M}} a(\rho(z)) f(\tau) |D_L u|^q \xi^s \, dz \leqslant \frac{C}{R} \int_{\frac{R}{2} \leqslant \rho \leqslant R} |D_L u|^\lambda \xi^{s-1} \, dz.$$

Оценим правую часть, использовав неравенство Гёльдера с показателем $p = q/\lambda = s/(s-1)$ и неравенство Юнга.

$$\begin{aligned} &\frac{C}{R} \int_{\frac{R}{2} \leqslant \rho \leqslant R} |D_L u|^\lambda \xi^{s-1} \, dz \\ &\quad \leqslant \frac{C}{R} \left(\int_{\frac{R}{2} \leqslant \rho \leqslant R} a(\rho) f(\tau) |D_L u|^q \xi^s \, dz \right)^{\frac{q}{\lambda}} \left(\int_{\frac{R}{2} \leqslant \rho \leqslant R} [a(\rho) f(\tau)]^{-\frac{\lambda}{q-\lambda}} \, dz \right)^{\frac{q-\lambda}{q}} \\ &\quad \leqslant \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^{N+M}} a(\rho(z)) f(\tau) |D_L u|^q \xi^s \, dz + \frac{C}{R^{\frac{q}{q-\lambda}}} \int_{\frac{R}{2} \leqslant \rho \leqslant R} [a(\rho) f(\tau)]^{-\frac{\lambda}{q-\lambda}} \, dz. \end{aligned}$$

Получаем дифференциальное неравенство

$$\frac{d}{d\tau} \int_{\mathbb{R}^{N+M}} u \xi^s \, dz \leqslant C \frac{R^{Q - \frac{q}{q-\lambda}}}{a(R)^{\frac{\lambda}{q-\lambda}} f(\tau)^{\frac{\lambda}{q-\lambda}}}.$$

Проинтегрируем его на множестве $(0, \tau)$.

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{N+M}} u(z,\tau) \xi^s \, dz &\leqslant \int_{\mathbb{R}^{N+M}} u_0 \xi^s \, dz + C \frac{R^{Q - \frac{q}{q-\lambda}}}{a(R)^{\frac{\lambda}{q-\lambda}}} \int_0^\tau f(\eta)^{-\frac{\lambda}{q-\lambda}} \, d\eta \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}^{N+M}} u_0 \xi^s \, dz + C \frac{\tau R^{Q - \frac{q}{q-\lambda}}}{a(R)^{\frac{\lambda}{q-\lambda}} f(\tau)^{\frac{\lambda}{q-\lambda}}} \equiv \Upsilon(R, \tau) \leqslant \Upsilon(R, t), \qquad 0 < t_1 < \tau < t. \end{aligned}$$

Значит, получаем

$$E_2(R, \tau) \leqslant \Upsilon(R, t). \tag{5.4}$$

Объединяя оценки E_1, E_2, имеем

$$E(\tau) \leqslant \Upsilon(R, t) + C \frac{R^{\frac{q}{\nu q} + Q \frac{\nu q - 1}{\nu q}}}{f(\tau)^{\frac{1}{\nu q}} a(R)^{\frac{1}{\nu q}}} \left(-\frac{d}{d\tau} E(\tau) \right)^{\frac{1}{\nu q}}. \tag{5.5}$$

Оценим $E_2(\tau)$ для случая $\lambda = 1$. Уравнение примет вид

$$u_t = \operatorname{div}_L(D_L u) - a(\rho(z)) f(t) |D_L u^\nu|^q,$$
$$(z,t) \in S_T = \mathbb{R}^{N+M} \times (0, T_r), \qquad 1 < q < 2, \quad \nu q > 1.$$

Выберем срезающую функцию

$$\xi(z)=\begin{cases}0 & \text{при } \rho(z)<R,\\ 1 & \text{при } \rho(z)>2R,\end{cases}\qquad 0\leqslant\xi\leqslant 1,\quad |D_L\xi|\leqslant\frac{C}{R},\quad |\operatorname{div}_L(D_L\xi)|\leqslant\frac{C}{R^2}.$$

Умножим уравнение на ξ^2 и проинтегрируем по частям на множестве $\mathbb{R}^{N+M}\times(0,\tau)$. Получим

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^{N+M}}u(\tau)\xi^2\,dz&+\int_0^\tau\int_{\mathbb{R}^{N+M}}a(\rho(z))f(\eta)|D_Lu^\nu|^q\xi^2\,dzd\eta\\ &=\int_{\mathbb{R}^{N+M}}u_0\xi^2\,dz+\int_0^\tau\int_{\mathbb{R}^{N+M}}u\cdot\operatorname{div}_L(D_L\xi^2)\,dz\,d\eta\\ &\leqslant\int_{\rho>R}u_0\,dz+\frac{C}{R}\int_0^\tau\int_{2R>\rho>R}u\,dz\,d\eta.\end{aligned}$$

Используя (5.1), получим оценку

$$\begin{aligned}&\frac{C}{R^2}\int_0^\tau\int_{2R>\rho}u\,dz\,d\eta\\ &\qquad\leqslant\frac{C}{R^2}\int_0^\tau\left(\frac{R^q}{a(R)f(\eta)}\int_{\mathbb{R}^{N+M}}a(\rho(z))f(\eta)|D_Lu^\nu|^q\,dz\right)^{\frac{1}{\nu q}}R^{Q\frac{\nu q-1}{\nu q}}\,d\eta\\ &\qquad\leqslant C\frac{R^{\frac{Q(\nu q-1)+q-2\nu q}{\nu q}}\tau^{\frac{\nu q-1}{\nu q}}}{a(R)^{\frac{1}{\nu q}}f(\tau)^{\frac{1}{\nu q}}}\left(\int_0^\tau\int_{\mathbb{R}^{N+M}}a(\rho(z))f(\eta)|D_Lu^\nu|^q\,dz\,d\eta\right)^{\frac{1}{\nu q}}.\end{aligned}$$

Применим неравенство Юнга, чтобы получить

$$\begin{aligned}\int_{\rho>2R}u(\tau)\,dz&\leqslant\int_{\rho>R}u_0\,dz\\ &\qquad+C\frac{R^{\frac{Q(\nu q-1)+q-2\nu q}{\nu q}}\tau^{\frac{\nu q-1}{\nu q}}}{a(R)^{\frac{1}{\nu q}}f(\tau)^{\frac{1}{\nu q}}}\left(\int_0^\tau\int_{\mathbb{R}^{N+M}}a(\rho(z))f(\eta)|D_Lu^\nu|^q\,dz\,d\eta\right)^{\frac{1}{\nu q}}\\ &\leqslant\int_{\rho>R}u_0\,dz+\frac12\int_0^\tau\int_{\mathbb{R}^{N+M}}a(\rho(z))f(\eta)|D_Lu^\nu|^q\,dz\,d\eta+C\frac{R^{\frac{Q(\nu q-1)+q-2\nu q}{\nu q-1}}\tau}{a(R)^{\frac{1}{\nu q-1}}f(\tau)^{\frac{1}{\nu q-1}}}\\ &\leqslant\int_{\rho>R}u_0\,dz+\frac12\left(\int_{\mathbb{R}^{N+M}}u(\tau)\,dz-\int_{\mathbb{R}^{N+M}}u_0\,dz\right)+C\frac{R^{\frac{Q(\nu q-1)+q-2\nu q}{\nu q-1}}\tau}{a(R)^{\frac{1}{\nu q-1}}f(\tau)^{\frac{1}{\nu q-1}}}.\end{aligned}$$

Если использовать обозначения, имеем

$$E_2(\tau)\leqslant\frac12\int_{\rho>R}u_0\,dz+\frac12E(\tau)+C\frac{R^{\frac{Q(\nu q-1)+q-2\nu q}{\nu q-1}}\tau}{a(R)^{\frac{1}{\nu q-1}}f(\tau)^{\frac{1}{\nu q-1}}}.$$

Аналогично предыдущему случаю обозначим

$$\Upsilon(R,\tau)\equiv\frac12\int_{\rho>R}u_0\,dz+C\frac{R^{\frac{Q(\nu q-1)+q-2\nu q}{\nu q-1}}\tau}{a(R)^{\frac{1}{\nu q-1}}f(\tau)^{\frac{1}{\nu q-1}}}\leqslant\Upsilon(R,t),\qquad 0<t_1<\tau<t.$$

Объединяя оценки E_1, E_2, получим

$$E(\tau)\leqslant\frac12E(\tau)+\Upsilon(R,t)+C\frac{R^{\frac{q}{\nu q}+Q\frac{\nu q-1}{\nu q}}}{f(\tau)^{\frac{1}{\nu q}}a(R)^{\frac{1}{\nu q}}}\left(-\frac{d}{d\tau}E(\tau)\right)^{\frac{1}{\nu q}}.$$

В обоих случаях ($\lambda = 1$ и $\nu = 1$) справедлива оценка (5.5). Переобозначим в ней $y(\tau) = E(\tau) - \Upsilon(R,t)$. Полученное проинтегрируем от 0 до t и решим

$$y(\tau) \leqslant C\frac{R^{\frac{q}{\nu q}+Q\frac{\nu q-1}{\nu q}}}{f(\tau)^{\frac{1}{\nu q}}a(R)^{\frac{1}{\nu q}}}(-y_\tau(\tau))^{\frac{1}{\nu q}}, \qquad y(t) \leqslant C\frac{R^{Q+\frac{q}{\nu q-1}}}{a(R)^{\frac{1}{\nu q-1}}t^{\frac{1}{\nu q-1}}f(t)^{\frac{1}{\nu q-1}}}.$$

Отсюда для случая $\nu = 1$ имеем

$$\int_{\mathbb{R}^{N+M}} u(t)\,dz \leqslant \int_{\rho>R} u_0\,dz + C\frac{tR^{Q-\frac{q}{q-\lambda}}}{a(R)^{\frac{\lambda}{q-\lambda}}f(t)^{\frac{\lambda}{q-\lambda}}} + C\frac{R^{Q+\frac{q}{q-1}}}{a(R)^{\frac{1}{q-1}}t^{\frac{1}{q-1}}f(t)^{\frac{1}{q-1}}}.$$

Последние два слагаемых совпадают с точностью до константы, если

$$R = R(t)\colon\, R^H a(R)^{\lambda-1} = \frac{t^{q-\lambda}}{f(t)^{\lambda-1}}.$$

Доказательство неравенства (1.13) для случая $\nu = 1$ закончено. Для случая, когда $\lambda = 1$, получается

$$\int_{\mathbb{R}^{N+M}} u(t)\,dz \leqslant \int_{\rho>R} u_0\,dz + C\frac{R^{\frac{Q(\nu q-1)+q-2\nu q}{\nu q-1}}t}{a(R)^{\frac{1}{\nu q-1}}f(t)^{\frac{1}{\nu q-1}}} + C\frac{R^{Q+\frac{q}{\nu q-1}}}{a(R)^{\frac{1}{\nu q-1}}t^{\frac{1}{\nu q-1}}f(t)^{\frac{1}{\nu q-1}}}.$$

Последние два слагаемых совпадают с точностью до константы, если $R = \sqrt{t}$. Доказательство теоремы 3 закончено.

§ 6. Доказательство теоремы 4

Проинтегрируем (1.1) по шару $B_{Z(t)}$. Имеем

$$\frac{d}{dt}\int_{B_{Z(t)}} u\,dz = -\int_{B_{Z(t)}} a(\rho(z))f(t)|D_L u^\nu|^q\,dz.$$

Используя неравенство (5.1), которое справедливо, если $M - \alpha q/(\nu q-1) > 0$, имеем

$$\begin{aligned}\int_{B_{Z(t)}} u(z,t)\,dz &\leqslant \left(\int_{B_{Z(t)}} u^{\nu q}|D_L\rho|^q\,dz\right)^{\frac{1}{\nu q}}\left(\int_{B_{Z(t)}} |D_L\rho|^{-q\frac{1}{\nu q-1}}\,dz\right)^{\frac{\nu q-1}{\nu q}}\\ &\leqslant CZ(t)^{Q\frac{\nu q-1}{\nu q}}\left(\frac{Z(t)^q}{a(Z(t))f(t)}\int_{B_{Z(t)}} a(\rho(z))f(t)|D_L u^\nu|^q\,dz\right)^{\frac{1}{\nu q}}.\end{aligned}$$

Объединив полученные оценки, имеем

$$\frac{d}{dt}\int_{B_{Z(t)}} u\,dz \leqslant -C\left(\int_{B_{Z(t)}} u\,dz\right)^{\nu q} a(Z(t))Z(t)^{-Q(\nu q-1)-q}f(t).$$

Обозначим $y(t) = \displaystyle\int_{B_{Z(t)}} u(z,t)\,dz$, тогда

$$\frac{dy(t)}{dt}y^{-\nu q}(t) \leqslant -Ca(Z(t))Z(t)^{-Q(\nu q-1)-q}f(t).$$

Проинтегрировав неравенство на отрезке (t_0, t), получим

$$y(t) \leqslant C\biggl(\int_{t_0}^{t} \frac{a(Z(\tau))f(\tau)}{Z(\tau)^{Q(\nu q-1)+q}}\, d\tau\biggr)^{-\frac{1}{\nu q-1}},$$

$$\int_{B_{Z(t)}} u\, dz \leqslant C\biggl(\int_{t_0}^{t} \frac{a(Z(\tau))f(\tau)}{Z(\tau)^{Q(\nu q-1)+q}}\, d\tau\biggr)^{-\frac{1}{\nu q-1}}.$$

Под интегралом находится произведение двух функций: $f(\tau)$ и убывающей по Z функции $a(Z)/Z^{Q(\nu q-1)+q}$.

Пусть выполняется оценка (1.8), тогда для достаточно больших t справедлива оценка $Z(t) \leqslant Ct^{\frac{1}{K}}$, откуда

$$\frac{a(Z(\tau))f(\tau)}{Z(\tau)^{Q(\nu q-1)+q}} \geqslant \frac{a(\tau^{\frac{1}{K}})f(\tau)}{\tau^{\frac{Q(\nu q-1)+q}{K}}}.$$

Используя последнее неравенство, получим,

$$\int_{t_0}^{t} \frac{a(Z(\tau))f(\tau)}{Z(\tau)^{Q(\nu q-1)+q}}\, d\tau \geqslant C\int_{t_0}^{t} \frac{a(\tau^{\frac{1}{K}})f(\tau)}{\tau^{\frac{Q(\nu q-1)+q}{K}}}\, d\tau,$$

$$\int_{\mathbb{R}^{N+M}} u\, dz \leqslant C\biggl(\int_{t_0}^{t} \frac{a(\tau^{\frac{1}{K}})f(\tau)}{\tau^{\frac{Q(\nu q-1)+q}{K}}}\, d\tau\biggr)^{-\frac{1}{\nu q-1}}.$$

В случае, если существуют $C > 0$, $\varrho \in (0,1)$ такие, что $C\varrho \leqslant \omega(t) \leqslant C$ для достаточно больших t, $t \geqslant t_0 = \|u_0\|^{\lambda-1}_{1,\mathbb{R}^{N+M}}/R_0^K$, имеем

$$\frac{a(Z(\tau))f(\tau)}{Z(\tau)^{Q(\nu q-1)+q}} \geqslant C\frac{a(\tau^{\frac{1}{K}})f(\tau)}{\tau^{\frac{Q(\nu q-1)+q}{K}}} = C\frac{1}{\tau}, \qquad \int_{B_{Z(t)}} u\, dz \leqslant C\biggl(\int_{t_0}^{t} \tau^{-1}\, d\tau\biggr)^{-\frac{1}{\nu q-1}}.$$

Теорема доказана.

§ 7. Доказательство теоремы 5

Лемма 7.1. *Пусть u – решение уравнения* (1.1). *Тогда $u(z,t_0) \neq 0$ для всех $z \in \mathbb{R}^{N+M}$ и для любого конечного $t_0 > 0$.*

Доказательство. Допустим, что существует t_0 такое, что $\|u(t_0)\|_1 = 0$, $\|u(t)\|_1 > 0$ для $t < t_0$. Пусть ϑ, $0 < \vartheta < 1$, – параметр. Введем обозначение

$$E_\vartheta(t) = \int_{\mathbb{R}^{N+M}} u(t)^{1+\vartheta}\, dz.$$

Тогда интегрирование по частям уравнения по всему $\mathbb{R}^{N+M}$ дает (5.2), оценим интеграл справа, используя неравенство Гёльдера

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^{N+M}} a(\rho(z))f(\tau)|D_L u^\nu|^q\, dz = \int_{\mathbb{R}^{N+M}} a(\rho(z))f(t)|\nu u^{\nu-1}D_L u|^q u^{\frac{(\vartheta-1)q}{\lambda+1}} u^{-\frac{(\vartheta-1)q}{\lambda+1}}\, dz\\
&\quad\leqslant C\biggl(\int_{\mathbb{R}^{N+M}} u^{\vartheta-1}|D_L u|^{\lambda+1}\, dz\biggr)^{\frac{q}{\lambda+1}}\\
&\qquad\times\biggl(\int_{\mathbb{R}^{N+M}} a(\rho(z))^{\frac{\lambda+1}{\lambda+1-q}} f(t)^{\frac{\lambda+1}{\lambda+1-q}} \bigl[u^{(\nu-1)q-\frac{(\vartheta-1)q}{\lambda+1}}\bigr]^{\frac{\lambda+1}{\lambda+1-q}}\, dz\biggr)^{\frac{\lambda+1-q}{\lambda+1}}\\
&\quad= CH_1^{\frac{q}{\lambda+1}} H_2^{\frac{\lambda+1-q}{\lambda+1}}.
\end{aligned}$$

Оценим каждый множитель. Умножим уравнение (1.1) на u^ϑ и, проинтегрировав по $\mathbb{R}^{N+M}$, получим

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^{N+M}} u^{1+\vartheta}\,dz+\int_{\mathbb{R}^{N+M}} u^{\vartheta-1}|D_L u|^{\lambda+1}\,dz+\int_{\mathbb{R}^{N+M}} a(\rho(z))f(t)|D_L u^\nu|^q u^\vartheta\,dz=0. \tag{7.1}$$

Откуда имеем

$$H_1\leqslant -C\frac{d}{d\tau}\int_{\mathbb{R}^{N+M}} u^{1+\vartheta}\,dz.$$

Для оценки второго множителя используем предложение 7.

$$\begin{aligned}
H_2&=\int_{\mathbb{R}^{N+M}} a(\rho(z))^{\frac{\lambda+1}{\lambda+1-q}} f(t)^{\frac{\lambda+1}{\lambda+1-q}} u^{\frac{(\nu-1)q(\lambda+1)}{\lambda+1-q}-\frac{(\vartheta-1)q}{\lambda+1-q}-1+1}\,dz\\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^{N+M}} u(z,t)a(C\|u_0\|_1^{\frac{\lambda+1}{K}}t^{\frac{1}{K}})f(t)^{\frac{\lambda+1}{\lambda+1-q}}\|u\|_{\infty,\mathbb{R}^{N+M}}^{\frac{H-\vartheta q}{\lambda+1-q}}\,dz\\
&=\|u(t)\|_{1,\mathbb{R}^{N+M}}a(C\|u_0\|_1^{\frac{\lambda+1}{K}}t^{\frac{1}{K}})f(t)^{\frac{\lambda+1}{\lambda+1-q}}(C\|u_0\|_1^{\frac{\lambda+1}{K}}t^{-\frac{Q}{K}})^{\frac{H-\vartheta q}{\lambda+1-q}}\\
&\leqslant C(t_0,\|u_0\|_1)\|u(t)\|_{1,\mathbb{R}^{N+M}}.
\end{aligned}$$

Получаем

$$\begin{aligned}
H_1^{\frac{q}{\lambda+1}}H_2^{\frac{\lambda+1-q}{\lambda+1}}&\leqslant C\Big(-\frac{d}{dt}E_\vartheta(t)\Big)^{\frac{q}{\lambda+1}}(C\|u(t)\|_{1,\mathbb{R}^{N+M}})^{\frac{\lambda+1-q}{\lambda+1}}\\
&\leqslant C_\sigma\|u(t)\|_{1,\mathbb{R}^{N+M}}-\sigma\frac{d}{dt}E_\vartheta(t),
\end{aligned}$$

σ будет выбрана позднее. Имеем

$$\frac{d}{d\tau}\|u(\tau)\|_{1,\mathbb{R}^{N+M}}\geqslant \sigma\frac{d}{d\tau}E_\vartheta(\tau)-C_\sigma\|u(\tau)\|_{1,\mathbb{R}^{N+M}}.$$

Проинтегрируем полученное неравенство по интервалу (t,t_0), где t близко к t_0, $t<t_0$.

$$\|u(t_0)\|_{1,\mathbb{R}^{N+M}}-\|u(t)\|_{1,\mathbb{R}^{N+M}}\geqslant \sigma E_\vartheta(t_0)-\sigma E_\vartheta(t)-C_\sigma\int_t^{t_0}\|u(\tau)\|_{1,\mathbb{R}^{N+M}}\,d\tau.$$

Поскольку очевидно, что $\|u(\tau)\|_{1,\mathbb{R}^{N+M}}$ убывает, так как производная отрицательна (см. (5.2)), имеем

$$\begin{aligned}
\|u(t)\|_{1,\mathbb{R}^{N+M}}&\leqslant \sigma E_\vartheta(t)+C_\sigma(t_0-t)\|u(t)\|_{1,\mathbb{R}^{N+M}}\\
&\leqslant \sigma C^\vartheta\|u(t)\|_{1,\mathbb{R}^{N+M}}+C_\sigma(t_0-t)\|u(t)\|_{1,\mathbb{R}^{N+M}}.
\end{aligned}$$

Выберем σ, $\sigma C(t_0,\|u_0\|,1)^\vartheta<1$, и разделим неравенство на $\|u(t)\|_{1,\mathbb{R}^{N+M}}>0$. Получим $1\leqslant\sigma C(t_0,\|u_0\|,1)^\vartheta+C_\sigma(t_0-t)$, при $t\to t_0$ приходим к противоречию. Лемма доказана.

Проинтегрируем уравнение (1.1) на множестве $\mathbb{R}^{N+M}\times(t_1,t)$. Аналогично доказанному в лемме 7.1, получим

$$\|u(t_1)\|_{1,\mathbb{R}^{N+M}}-\|u(t)\|_{1,\mathbb{R}^{N+M}}=\int_{t_1}^t\int_{\mathbb{R}^{N+M}} a(\rho(z))f(\tau)|D_L u^\nu|^q\,dz\,d\tau$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{t_1}^{t}\int_{\mathbb{R}^{N+M}} a(\rho(z)) f(\tau) |\nu u^{\nu-1} D_L u|^q u^{\frac{(\vartheta-1)q}{\lambda+1}} u^{-\frac{(\vartheta-1)q}{\lambda+1}}\,dz\,d\tau \\
&\leqslant C\biggl(\int_{t_1}^{t}\int_{\mathbb{R}^{N+M}} u^{\vartheta-1}|D_L u|^{\lambda+1}\,dz\,d\tau\biggr)^{\frac{q}{\lambda+1}} \\
&\qquad \times \biggl(\int_{t_1}^{t}\int_{\mathbb{R}^{N+M}} a(\rho(z))^{\frac{\lambda+1}{\lambda+1-q}} f(\tau)^{\frac{\lambda+1}{\lambda+1-q}} \bigl[u^{(\nu-1)q-\frac{(\vartheta-1)q}{\lambda+1}}\bigr]^{\frac{\lambda+1}{\lambda+1-q}}\,dz\,d\tau\biggr)^{\frac{\lambda+1-q}{\lambda+1}} \\
&= C P_1^{\frac{q}{\lambda+1}} P_2^{\frac{\lambda+1-q}{\lambda+1}}.
\end{aligned}
$$

Используя (7.1), имеем

$$
\begin{aligned}
P_1 &= \int_{t_1}^{t}\int_{\mathbb{R}^{N+M}} u^{\vartheta-1}|D_L u|^{\lambda+1}\,dz\,d\tau \leqslant C\|u^{1+\vartheta}(t_1)\|_{1,\mathbb{R}^{N+M}} \\
&\leqslant C\|u(t_1)\|_{1,\mathbb{R}^{N+M}} \|u_0\|_1^{\frac{(\lambda+1)\vartheta}{K}} t_1^{-\frac{Q\vartheta}{K}}.
\end{aligned}
$$

Пусть выполняется оценка (1.8), тогда для достаточно больших t справедлива оценка $Z(t) \leqslant Ct^{\frac{1}{K}} \leqslant C\omega(t)t^{\frac{1}{K}}$. Используя предложение 8 и закон сохранения массы для суперзадачи без демпфирования, имеем

$$
\begin{aligned}
P_2 &= \int_{t_1}^{t}\int_{\mathbb{R}^{N+M}} a(\rho(z))^{\frac{\lambda+1}{\lambda+1-q}} f(\tau)^{\frac{\lambda+1}{\lambda+1-q}} u^{\frac{(\nu-1)q(\lambda+1)}{\lambda+1-q}-\frac{(\vartheta-1)q}{\lambda+1-q}}\,dz\,d\tau \\
&\leqslant \|u(t_1)\|_{1,\mathbb{R}^{N+M}} \int_{t_1}^{t} Ca(\omega(\tau)\tau^{\frac{1}{K}})^{\frac{\lambda+1}{\lambda+1-q}} f(\tau)^{\frac{\lambda+1}{\lambda+1-q}} \|u(\tau)\|_{\infty,\mathbb{R}^{N+M}}^{\frac{H-\vartheta q}{\lambda+1-q}}\,d\tau \\
&\leqslant \|u(t_1)\|_{1,\mathbb{R}^{N+M}} \int_{t_1}^{t} Ca(\omega(\tau)\tau^{\frac{1}{K}})^{\frac{\lambda+1}{\lambda+1-q}} f(\tau)^{\frac{\lambda+1}{\lambda+1-q}} \tau^{-\frac{Q(H-\vartheta q)}{K(\lambda+1-q)}}\,d\tau.
\end{aligned}
$$

Используя равенство (4.5), получим

$$
a(\omega(\tau)\tau^{\frac{1}{K}})^{\frac{\lambda+1}{\lambda+1-q}} f(\tau)^{\frac{\lambda+1}{\lambda+1-q}} \tau^{-\frac{Q(H-\vartheta q)}{K(\lambda+1-q)}} = \frac{\tau^{\frac{\vartheta q Q}{K(\lambda+1-q)}}}{\tau\omega^{\frac{H(\lambda+1)}{(\lambda-1)(\lambda+1-q)}}(\tau)}.
$$

Если ϑ выбрать достаточно маленьким, то

$$
\begin{gathered}
a(\tau^{\frac{1}{K}})^{\frac{\lambda+1}{\lambda+1-q}} f(\tau)^{\frac{\lambda+1}{\lambda+1-q}} \tau^{-\frac{Q(H-\vartheta q)}{K(\lambda+1-q)}} \\
= \tau^{-1-\epsilon\frac{H(\lambda+1)}{(\lambda-1)(\lambda+1-q)}} \tau^{\frac{\vartheta q Q}{K(\lambda+1-q)}} = \tau^{-1-\left(\epsilon\frac{H(\lambda+1)}{(\lambda-1)(\lambda+1-q)}-\frac{\vartheta q Q}{K(\lambda+1-q)}\right)}, \\
-\biggl(\epsilon\frac{H(\lambda+1)}{(\lambda-1)(\lambda+1-q)} - \frac{\vartheta q Q}{K(\lambda+1-q)}\biggr) < 0, \\
P_2 \leqslant \|u(t_1)\|_{1,\mathbb{R}^{N+M}} C(\|u_0\|_1) t_1^{-\left(\epsilon\frac{H(\lambda+1)}{(\lambda-1)(\lambda+1-q)}-\frac{\vartheta q Q}{K(\lambda+1-q)}\right)}, \\
\|u(t_1)\|_{1,\mathbb{R}^{N+M}} \leqslant \|u(t)\|_{1,\mathbb{R}^{N+M}} + C\|u(t_1)\|_{1,\mathbb{R}^{N+M}} t_1^{-\epsilon\frac{H}{\lambda-1}}.
\end{gathered}
$$

Отсюда, при достаточно больших t_1, имеем

$$
\|u(t_1)\|_{1,\mathbb{R}^{N+M}} \leqslant \|u(t)\|_{1,\mathbb{R}^{N+M}} + \frac{1}{2}\|u(t_1)\|_{1,\mathbb{R}^{N+M}}.
$$

Иначе говоря, мы доказали, что $\|u(t)\|_{1,\mathbb{R}^{N+M}} \geqslant \frac{1}{2}\|u(t_1)\|_{1,\mathbb{R}^{N+M}}$, $t > t_1$. По лемме 7.1

$$\frac{1}{2}\|u(t_1)\|_{1,\mathbb{R}^{N+M}} \equiv C > 0,$$

так как $t_1 > 0$. Теорема доказана.

Список литературы

[1] N. Garofalo, D.-M. Nhieu, "Isoperimetric and Sobolev inequalities for Carnot–Caratheodory spaces and the existence of minimal surfaces", *Comm. Pure Appl. Math.*, **49**:10 (1996), 1081–1144.

[2] I. Kombe, *Hardy and Rellich type inequalities with remainders for Baouendi–Grushin vector fields*, 2007, arXiv: 0704.1343.

[3] А. С. Калашников, "Некоторые вопросы качественной теории нелинейных вырождающихся параболических уравнений второго порядка", *УМН*, **42**:2 (1987), 135–176; англ. пер.: A. S. Kalashnikov, "Some problems of the qualitative theory of non-linear degenerate second-order parabolic equations", *Russian Math. Surveys*, **42**:2 (1987), 169–222.

[4] В. В. Грушин, "Об одном классе гипоэллиптических операторов", *Матем. сб.*, **83(125)**:3(11) (1970), 456–473; англ. пер.: V. V. Grušin, "On a class of hypoelliptic operators", *Math. USSR-Sb.*, **12**:3 (1970), 458–476.

[5] M. S. Baouendi, "Sur une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés", *Bull. Soc. Math. France*, **95** (1967), 45–87.

[6] B. Franchi, E. Lanconelli, "Une métrique associée à une classe d'opérateurs elliptiques degeneres", *Conference on linear partial and pseudodifferential operators* (Torino, 1982), Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino, Università e Politecnico, Toronto, 1984, 105–114.

[7] B. Franchi, E. Lanconelli, "Hölder regularity theorem for a class of linear nonuniformly elliptic operators with measurable coefficients", *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* (4), **10**:4 (1983), 523–541.

[8] В. А. Маркашева, А. Ф. Тедеев, "Локальные и глобальные оценки решений задачи Коши для квазилинейных параболических уравнений с нелинейным оператором типа Баоуенди–Грушина", *Матем. заметки*, **85**:3 (2009), 395–407; англ. пер.: V. A. Markasheva, A. F. Tedeev, "Local and global estimates of the solutions of the Cauchy problem for quasilinear parabolic equations with a nonlinear operator of Baouendi–Grushin type", *Math. Notes*, **85**:3 (2009), 385–396.

[9] В. А. Маркашева, "Локальная гёльдеровость решений квазилинейных параболических уравнений с нелинейным оператором типа Баоуенди–Грушина, I", Тр. ИПММ, **16**, ИПММ НАН Украины, Донецк, 2008, 124–135.

[10] В. А. Маркашева, "Локальная гёльдеровость решений квазилинейных параболических уравнений с нелинейным оператором типа Баоуенди–Грушина, II", Тр. ИПММ, **17**, ИПММ НАН Украины, Донецк, 2008, 128–143.

[11] S. Benachour, B. Roynette, P. Vallois, "Asymptotic estimates of solutions of $u_t - \frac{1}{2}\Delta u = -|\nabla u|$ in $R_+ \times R^d$, $d \geqslant 2$", *J. Funct. Anal.*, **144**:2 (1997), 301–324.

[12] Th. Gallay, Ph. Laurençot, "Asymptotic behavior for a viscous Hamilton-Jacobi equation with critical exponent", *Indiana Univ. Math. J.*, **56**:1 (2007), 459–479.

[13] M. Ben-Artzi, "Global existence and decay for a nonlinear parabolic equation", *Nonlinear Anal.*, **19**:8 (1992), 763–768.

[14] G. Barles, F. Da Lio, "On the generalized Dirichlet problem for viscous Hamilton–Jacobi equations", *J. Math. Pures Appl.* (9), **83**:1 (2004), 53–75.

[15] L. Amour, M. Ben-Artzi, “Global existence and decay for viscous Hamilton–Jacobi equations”, *Nonlinear Anal.*, **31**:5–6 (1998), 621–628.

[16] S. Benachour, Ph. Laurençot, “Global solutions to viscous Hamilton-Jacobi equations with irregular initial data”, *Comm. Partial Differential Equations*, **24**:11–12 (1999), 1999–2021.

[17] M. Ben-Artzi, H. Koch, “Decay of mass for a semilinear parabolic equation”, *Comm. Partial Differential Equations*, **24**:5–6 (1999), 869–881.

[18] A. Dall'Aglio, D. Giachetti, S. Segura de León, “Global existence for parabolic problems involving the p-Laplacian and a critical gradient term”, *Indiana Univ. Math. J.*, **58**:1 (2009), 1–48.

[19] Ph. Laurençot, J. Vázquez, “Localized non-diffusive asymptotic patterns for nonlinear parabolic equations with gradient absorption”, *J. Dynam. Differential Equations*, **19**:4 (2007), 985–1005.

[20] S. Snoussi, S. Tayachi, “Large time behavior of solutions for parabolic equations with nonlinear gradient terms”, *Hokkaido Math. J.*, **36**:2 (2007), 311–344.

[21] J.-Ph. Bartier, Ph. Laurençot, “Gradient estimates for a degenerate parabolic equation with gradient absorption and applications”, *J. Funct. Anal.*, **254**:3 (2008), 851–878.

[22] Ch. Stinner, “Convergence to steady states in a viscous Hamilton-Jacobi equation with degenerate diffusion”, *J. Differential Equations*, **248**:2 (2010), 209–228.

[23] D. Andreucci, A. F. Tedeev, M. Ughi, “The Cauchy problem for degenerate parabolic equations with source and damping”, *Укр. матем. журн.*, **1**:1 (2004), 1–19; англ. пер.: D. Andreucci, A. F. Tedeev, M. Ughi, “The Cauchy problem for degenerate parabolic equations with source and damping”, *Ukr. Math. Bull.*, **1**:1 (2004), 1–23.

[24] А. Ф. Тедеев, “Начально-краевые задачи для квазилинейных вырождающихся параболических уравнений с демпфированием. Задача Неймана”, *Укр. матем. журн.*, **58**:2 (2006), 272–282; англ. пер.: A. F. Tedeev, “Initial-boundary value problems for quasilinear degenerate parabolic equations with damping. The Neumann problem”, *Ukrainian Math. J.*, **58**:2 (2006), 304–317.

[25] D. Andreucci, A. F. Tedeev, “Finite speed of propagation for the thin-film equation and other higher-order parabolic equations with general nonlinearity”, *Interfaces Free Bound.*, **3**:3 (2001), 233–264.

[26] D. Andreucci, A. F. Tedeev, “Sharp estimates and finite speed of propagation for a Neumann problem in domains narrowing at infinity”, *Adv. Differential Equations*, **5**:7–9 (2000), 833–860.

[27] D. Andreucci, A. F. Tedeev, “A Fujita type result for a degenerate Neumann problem in domains with noncompact boundary”, *J. Math. Anal. Appl.*, **231**:2 (1999), 543–567.

[28] D. S. Jerison, “The Dirichlet problem for the Kohn Laplacian on the Heisenberg group. II”, *J. Funct. Anal.*, **43**:2 (1981), 224–257.

[29] S. K. Vodopyanov, “Foundations of the theory of mappings with bounded distortion on Carnot groups”, *The interaction of analysis and geometry*, Contemp. Math., **424**, Amer. Math. Soc, Providence, RI, 2007, 303–344.

[30] Е. А. Плотникова, “Интегральные представления и обобщенное неравенство Пуанкаре на группах Карно”, *Сиб. матем. журн.*, **49**:2 (2008), 420–436; англ. пер.: E. A. Plotnikova, “Integral representations and the generalized Poincare inequality on Carnot groups”, *Siberian Math. J.*, **49**:2 (2008), 339–352.

[31] О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*, Наука, М., 1967; англ. пер.: O. A. Ladyzhenskaya, V. A. Solonnikov, N. N. Ural'tseva, *Linear and quasi-linear equations of parabolic type*, Transl. Math. Monogr., **23**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1968.

[32] E. DiBenedetto, *Degenerate parabolic equations*, Springer-Verlag, New York, 1993.

[33] Ж.-Л. Лионс, *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач*, Мир, М., 1972; пер. с фр.: J.-L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, de Gruyter, Paris, 1969.

[34] D. Andreucci, "Degenerate parabolic equations with initial data measures", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **349**:10 (1997), 3911–3923.

[35] H. Shang, F. Li, "On the Cauchy problem for the evolution p-Laplacian equations with gradient term and source and measures as initial data", *Nonlinear Anal.*, **72**:7–8 (2010), 3396–3411.

В. А. Маркашева (V. A. Markasheva)
Институт прикладной математики и механики
НАН Украины, г. Донецк
E-mail: w9071981@yandex.ru

Поступила в редакцию
26.05.2010 и 26.08.2011

А. Ф. Тедеев (A. F. Tedeev)
Институт прикладной математики и механики
НАН Украины, г. Донецк
E-mail: tedeev@iamm.ac.donetsk.ua