УДК 519.248

ОГРАНИЧЕННЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ СВОБОДНОЙ ДИНАМИКИ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ

В. В. Айзенштадт, Д. Д. Ботвич, В. А. Малышев

ВВЕДЕНИЕ

Математическая статистическая физика равновесных систем сейчас является разветвленной наукой с целым арсеналом методов и результатов [7], [50], [86].

Совершенно другое положение в изучении динамики даже близких к равновесию систем. До последнего времени исследование динамики велось в следующих трех направлениях:

1. Общие результаты о существовании динамики как равновесной, так и неравновесной [81]—[82], [91], [50], [41];

2. Исследование свободных систем [12], [19]—[20] или сводимых к ним простым преобразованием (например, модель твердых стержней, XY-модель) [11, 23]. В этих случаях все величины явно вычислимы и система допускает полный контроль;

3. Исследование спектра массивных теорий в основном состоянии [50], [6].

Отметим здесь же аксиоматические результаты [29] о безмассовых теориях в основном состоянии.

В последнее время появляются работы по ограниченным возмущениям свободных классических систем [74], [71], [13]. Под ограниченным возмущением мы понимаем либо случай, когда в бесконечной системе частиц есть взаимодействие в ограниченной области, а вне этой области частицы движутся свободно, либо когда в свободную систему частиц помещается выделенная («пробная») частица, которая взаимодействует с остальными. Таким образом, остальные частицы взаимодействуют через нее и можно сказать, что область, где взаимодействие возможно, перемещается в пространстве вместе с частицей. Хотя даже в трансляционно инвариантном случае здесь есть результаты об асимптотической полноте [2], в целом до окончательного понимания далеко.

В этом обзоре мы выделяем важную часть этой проблемы, где можно говорить, что ситуация в основном понята и хорошо контролируется.

Прежде всего, наш технический метод — ряды теории возмущений типа рядов Дайсона—Швингера и их формальные обобщения в классических работах Фридрихса [47] и Хеппа [54]. Ключевые ограничения, в которых получены доказательства сходимости этих рядов [26], [68] таковы:

1. Взаимодействие мало, и сосредоточено в ограниченной области или достаточно быстро убывает на бесконечности (т. е. есть пространственное урезание);

2. Рассматриваются ферми-системы, так как для них операторы рождения-уничтожения ограничены;

3. Система не имеет ультрафиолетовых расходимостей;

Возмущение является малым ограниченным оператором, ввиду всех этих предположений.

Основной проблемой в дальнейшем является переход к трансляционно инвариантному взаимодействию, т. е. снятие пространственного урезания. Нам представляется, что это сейчас единственно реальный путь для доказательства асимптотической полноты.

До статьи [26] не было известно ни одного доказательства асимптотической полноты, но имелись другие более слабые результаты [47], [79], [80], [56]—[61], [17], [83], [28], [44], где строилась теория рассеяния в фоковском пространстве и в C^*-алгебрах для различных теорий подобного типа. Однако нигде не доказывалась асимптотическая полнота. Из [26] следовала асимптотическая полнота в температурном состоянии, а также в случае отсутствия поляризации вакуума для основного состояния. В [1], используя стандартный прием теории рассеяния, доказана полнота для случая массовой щели без поляризации вакуума. В [68] доказана сходимость разложений в «linked cluster theorem» из классических книг [47], [54]. Отсюда в частности вытекает асимптотическая полнота в условии поляризации вакуума без массовой щели. Позднее с помощью таких же методов этот результат был перенесен В. В. Айзенштадтом на случай произвольного химического потенциала с четным взаимодействием.

В [1] рассматривается случай взаимодействия отдельно взятого спина со свободным ферми-полем. В этот обзор мы включаем также новые результаты относительно этого случая.

Для чтения статьи необходимо знание спектральной теории самосопряженных операторов, некоторых определений из теории C^*-алгебр и небольшое знакомство с современной квантовой физикой.

В главе 0 мы приводим все необходимые сведения о фоковском пространстве, вторичном квантовании, алгебре канонических антикоммутационных соотношений, квазисвободных состояниях и свободной динамике на этой алгебре.

Глава 1 посвящена так называемому фоковскому спектральному представлению свободной динамики в температурном состоянии, то есть представления ее в виде $\Gamma(e^{it\,(h\oplus h^*)})$, где h, h^* — одночастичные гамильтонианы для частицы и античастицы. Техника этого представления использует скобки Вика относительно соответствующего состояния.

В главе 2 мы сначала, следуя [83], [44] показываем, как строится теория рассеяния в C^*-алгебрах. В § 2.3 доказывается асимптотическая полнота в C^*-алгебре КАС, соответствующая статье [26]. В § 2.4, 2.5 этот результат применяется для доказательства унитарной эквивалентности в основном и КМШ-состоянии.

В главе 3 доказывается центральный результат знаменитой «linked cluster theorem», из которой затем выводится асимптотическая полнота в условиях поляризации вакуума. Это требует существенно более сложной техники кластерных разложений — фермионные сокращения в ячейках «мода-время». Для удобства читателя мы приводим определения диаграмм Фридрихса и формальную теорию перенормировок для этого случая. Эта глава может читаться независимо от главы 2.

В главе 4 рассматривается спин, взаимодействующий со свободным ферми-газом. Для температурных состояний мы имеем две существенно различные ситуации: изоморфизм этой системы свободному ферми-газу или свободному ферми-газу с невзаимодействующим с ним спином. В §4.4 мы классифицируем возмущения свободной динамики в основном состоянии. Доказательства теорем 4.7 и 4.8 принадлежат В. В. Айзенштадту.

Глава 0

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

§ 0.1. Пространство Фока. Вторичное квантование

Пространство Фока — это гильбертово пространство с дополнительной структурой.

Пусть задано сепарабельное гильбертово пространство $\mathscr{H}$. Если не оговорено противное, далее оно везде будет считаться комплексным со скалярным произведением, антисимметрическим по второму аргументу.

Мы определим антисимметрическое (фермионное) пространство Фока $\mathscr{F}_a=\mathscr{F}_a(\mathscr{H})$ над $\mathscr{H}$ и симметрическое (бозонное) пространство Фока $\mathscr{F}_s=\mathscr{F}_s(\mathscr{H})$.

Удобно сначала ввести более общее пространство Фока

$$\mathscr{F}=\mathscr{F}(\mathscr{H})=\bigoplus_{n=0}^{\infty}\mathscr{F}^{(n)}, \tag{0.1.1}$$

где $\mathscr{F}^{(0)}=\mathbf{C}$ (пространство констант), $\mathscr{F}^{(n)}\equiv\mathscr{F}^{(n)}(\mathscr{H})=\mathscr{H}^{\otimes n}=$ $=\mathscr{H}\otimes\mathscr{H}\otimes\ldots\otimes\mathscr{H}$ ($\otimes$ означает тензорное произведение гильбертовых пространств (см. [27]), $\mathscr{F}$ в (0.1.1) означает прямую сумму гильбертовых пространств, т. е. пространство последовательностей

$$\Phi=(\varphi_0,\ \varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_n,\ \ldots),\quad \varphi_n\in\mathscr{F}^{(n)} \tag{0.1.2}$$

с конечной нормой

$$(\Phi,\ \Phi)=\|\Phi\|^2=\sum_{n=0}^{\infty}\|\varphi_n\|^2. \tag{0.1.3}$$

Заметим, что если $\mathscr{H}=L_2(X,\ \Sigma,\ \mu)$, то $\mathscr{F}^{(n)}$ есть пространство квадратично-интегрируемых функций $\varphi_n(x_1,\ \ldots,\ x_n)$, $x_i\in X$ по мере $\mu^n=\mu\otimes\ldots\otimes\mu$ (n раз).

В пространстве $\mathscr{F}$ естественным образом действует симметрическая группа S_n, переставляющая множители в тензорных произведениях $f_1\otimes\ldots\otimes f_n$, $f_i\in\mathscr{H}$. Подпространство $\mathscr{F}^{(n)}$, инвариантное относительно симметрических перестановок элементов, обозначим через $\mathscr{F}_s^{(n)}$, антисимметрических (умножающихся на знак перестановки) — через $\mathscr{F}_a^{(n)}$.

Определение 0.1. Пусть

$$\mathscr{F}_s=\bigoplus_{n=0}^{\infty}\mathscr{F}_s^{(n)},\quad \mathscr{F}_a=\bigoplus_{n=0}^{\infty}\mathscr{F}_a^{(n)}. \tag{0.1.4}$$

В указанном выше случае, когда $\mathscr{H}$ есть пространство функций, $\mathscr{F}_s^{(n)}(\mathscr{F}_a^{(n)})$ состоит из симметрических (антисимметрических) функций. Будем называть $\mathscr{F}_s^{(n)}$ и $\mathscr{F}_a^{(n)}$ n-частичными подпространствами.

Если задан ограниченный оператор U, $\|U\|\leqslant 1$, в $\mathscr{H}$, то обозначим через $\Gamma(U)$ оператор в $\mathscr{F}$, действующий в каждой компоненте $\mathscr{F}^{(n)}$ по формуле

$$\Gamma(U)(f_1\otimes\ldots\otimes f_n)=(Uf_1)\otimes\ldots\otimes(Uf_n) \tag{0.1.5}$$

и продолженный далее по линейности и по непрерывности на все пространство $\mathscr{F}$. Заметим, что $\mathscr{F}_s$ и $\mathscr{F}_a$ инвариантны относительно $\Gamma(U)$, и поэтому сужения $\Gamma(U)$ на эти подпространства будем обозначать тем же знаком. Если U унитарен в $\mathscr{H}$, то $\Gamma(U)$ унитарен в $\mathscr{F}_s$ и $\mathscr{F}_a$, соответственно.

Пусть h — самосопряженный оператор с областью определения $\mathscr{D}\subseteq\mathscr{H}$. Обозначим через $d\Gamma(h)$ самосопряженный оператор, являющийся замыканием симмерического оператора в $\mathscr{F}$, действующего для любого $f=f_1\otimes\ldots\otimes f_n\in\mathscr{D}\otimes\ldots\otimes\mathscr{D}\subseteq\mathscr{F}^{(n)}$ по формуле

$$\begin{aligned} d\Gamma(h)(f_1\otimes\ldots f_n)=hf_1\otimes f_2\otimes\ldots\otimes f_n+\ldots\\ \ldots+f_1\otimes f_2\otimes\ldots\otimes hf_n \end{aligned} \tag{0.1.7}$$

(она получается формальным дифференцированием $\Gamma(e^{ith})$ в точке $t=0$). Тем самым, $d\Gamma(h)$ можно считать действующим в $\mathscr{F}_s$ и $\mathscr{F}_a$, где он тоже является самосопряженным оператором.

§ 0.2. Операторы рождения и уничтожения. C^*-алгебра КАС

Для любого $f \in \mathscr{H}$ определим операторы рождения $a^*(f)$ и уничтожения $a(f)$ в $\mathscr{F}(\mathscr{H})$:

$$a(f)\Omega = 0, \qquad a^*(f)\Omega = (0, f, 0, \ldots),$$

$$a(f)(f_1 \otimes \ldots \otimes f_n) = \sqrt{n}(f, f_1)(f_2 \otimes \ldots \otimes f_n), \tag{0.2.1}$$

$$a^*(f)(f_1 \otimes \ldots \otimes f_n) = \sqrt{n+1}\, f \otimes f_1 \otimes \ldots \otimes f_n,$$

где вектор $\Omega = (1, 0, 0, \ldots) \in \mathscr{F}$ называется вакуумом.

Нетрудно проверить, что

$$(a(f))^* = a^*(f).$$

По линейности они продолжаются до операторов с всюду плотной областью определения $\mathscr{F}_0 \equiv \mathscr{F}_0(\mathscr{H}) \subseteq \mathscr{F}$, состоящей из финитных последовательностей (0.1.2), т. е. таких, в которых все $\varphi_n \equiv 0$, начиная с некоторого n, $\varphi_k \in \mathscr{F}^{(k)}$.

Определим линейный оператор $P_\pm$ в $\mathscr{F}$ формулой

$$P_\pm(f_1 \otimes \ldots \otimes f_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in S_n} (\pm 1)^{|\pi|}(f_{\pi(1)} \otimes \ldots \otimes f_{\pi(n)}) \tag{0.2.2}$$

где $|\pi|$ — четность перестановки π.

Они являются ортогональными операторами в $\mathscr{F}_s^{(n)}$ и $\mathscr{F}_a^{(n)}$ соответственно.

Определение 0.2. Положим

$$a_\pm(f) = P_\pm a(f), \ a_\pm^*(f) = P_\pm a^*(f) \tag{0.2.3}$$

на $\mathscr{F}_{s,0}$ и $\mathscr{F}_{a,0}$ соответственно. Далее эти операторы мы часто будем обозначать без индексов $\pm$, если из контекста ясно, о каком из пространств $\mathscr{F}_s$ или $\mathscr{F}_a$ идет речь. В случае, когда фоковское пространство состоит из последовательностей симметрических (антисимметрических) функций

$$\Phi = (\varphi_0, \varphi_1(x_1), \ldots, \varphi_n(x_1, \ldots, x_n), \ldots),$$

операторы рождения и уничтожения действуют по формулам

$$(a(f)\Phi)_n(x_1, \ldots, x_n) = \sqrt{n+1} \int_{\mathbf{R}^\nu} \varphi_{n+1}(x, x_1, \ldots, x_n)\bar{f}(x)\, d\mu(x),$$

$$(a^*(f)\Phi)_n(x_1, \ldots, x_n) = \tag{0.2.4}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\pi \in S_n} (\pm)^{|\pi|} \varphi_{n-1}(x_1, \ldots, \check{x}_i, \ldots, x_n) f(x_i)$$

где знак «$\vee$» означает, что соответствующая переменная опущена.

Замечание. Если норму (0.1.3) заменить на норму

$$\|\Phi\|^2=\frac{1}{n!}\sum_{n=0}^{\infty}\|\varphi_n\|^2, \tag{0.2.5}$$

то операторы $a^*(f)$ и $a(f)$ будут иметь вид (0.2.4), но без множителей $1/\sqrt{n}$ и $\sqrt{n+1}$, которые трудно запомнить.

В антисимметрическом (фермионном) случае имеют место канонические антикоммутационные соотношения (КАС)

$$a^*(f)a(g)+a(g)a^*(f)=(f,g)I, \tag{0.2.6}$$

$$\{a(f),\ a(g)\}=\{a^*(f),\ a^*(g)\}=a^*(f)a^*(g)+a^*(g)a^*(f)=0,$$

где 0, I есть, соответственно, нулевой и единичный операторы в $\mathcal{F}_a$.

Нетрудно убедиться, что на $\mathcal{F}_a$

$$\|a(f)\|=\|a^*(f)\|=\|f\|, \tag{0.2.7}$$

т. е. в фермионном случае операторы рождения и уничтожения ограничены.

В то же время

$$a(f):\mathcal{F}_s^{(n)}\to\mathcal{F}_s^{(n-1)} \text{ и } a^*(f):\mathcal{F}_s^{(n)}\to\mathcal{F}_s^{(n+1)},$$

имеют норму

$$\|a(f)\|_{n,n-1}=\|a^*(f)\|_{n-1,n}=\sqrt{n}\,\|f\|. \tag{0.2.8}$$

Отсюда следует, что $\mathcal{F}_{s,0}$ образует плотное множество аналитических векторов для $a^{\#}(f)$, где $a^{\#}=a$ или a, т. е. для всех $\Phi\in\mathcal{F}_{s,0}$ и всех $z\in\mathbf{C}$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|z|^n}{n!}\|(a^{\#}(f))^n\Phi\|<\infty.$$

Нас будет интересовать C^*-алгебра КАС, порожденная операторами рождения и уничтожения, действующими в фоковском пространстве $\mathcal{F}_a(\mathcal{H})$.

Определение 0.3. C^*-алгебра $\mathfrak{A}(\mathcal{H})$ (или ей изоморфная), порожденная операторами $a(f)$, $a^*(f)$, $f\in\mathcal{H}$ в $\mathcal{F}_a$, называется C^*-алгеброй канонических антикоммутационных соотношений (C^*-алгеброй КАС) над $\mathcal{H}$, где $\mathcal{H}$ — некоторое гильбертово пространство.

Если $\mathcal{H}=L_2(\mathbf{R}^\nu,\ dx)$ или $l_2(\mathbf{Z}^\nu)$, то обозначим через $\mathfrak{A}_\Lambda=\mathfrak{A}(L_2(\Lambda,dx))$, $\Lambda\subseteq\mathbf{R}^\nu$ и $\mathfrak{A}(l_2(\Lambda))$, $\Lambda\subseteq\mathbf{Z}^\nu$, C^*-алгебры над $L_2(\Lambda,dx)$ и $l_2(\Lambda)$, соответственно.

§ 0.3. Свободная динамика и квазисвободное состояние на C^*-алгебре $\mathfrak{A}(\mathscr{H})$. ГНС-представление

Пусть $h=h^*$ — самосопряженный оператор в $\mathscr{H}$ с плотной областью определения $\mathscr{D}\subseteq\mathscr{H}$, который мы будем называть одночастичным гамильтонианом.

Определение 0.4. Динамикой τ_t на C^*-алгебре $\mathfrak{A}$ называется любая ее сильно непрерывная группа $*$-автоморфизмов.

Определение 0.5. C^*-динамической системой называется пара $(\mathfrak{A}, \tau_t)$, где $\mathfrak{A}$ есть C^*-алгебра, τ_t — ее динамика.

Определение 0.6. Пусть $(\mathfrak{A}_1, \tau_t^1)$, $(\mathfrak{A}_2, \tau_t^2)$ — две C^*-динамические системы. Они называются эквивалентными, если существует $*$-изоморфизм C^*-алгебр $\gamma:\mathfrak{A}_1\to\mathfrak{A}_2$ такой, что

$$\tau_t^2=\gamma\tau_t^1\gamma^{-1}$$

для всех $t\in\mathbf{R}$.

Определение 0.7. Однопараметрическая сильно непрерывная группа τ_t^0 на C^*-алгебре КАС $\mathfrak{A}(\mathscr{H})$, действующая на операторах рождения и уничтожения по формулам

$$\tau_t^0(a^\#(f))\overset{\mathrm{def}}{=}e^{itd\Gamma(h)}a^\#(f)\,e^{-itd\Gamma(h)}=a^\#(e^{ith}f), \qquad (0.3.1)$$

называется свободной динамикой на C^*-алгебре КАС $\mathfrak{A}(\mathscr{H})$, порожденной одночастичным гамильтонианом h.

Правое равенство в (0.3.1) требует доказательства. Пусть $\{e_x,\ x\in\mathbf{Z}^\nu\}$ — некоторый базис в $\mathscr{H}$ и $(he_x, e_y)=c_{xy}=\bar{c}_{yx}$, тогда

$$H_0\equiv d\Gamma(h)=\sum_{x,y}c_{xy}a_x^*a_y,$$

$$i\,[H_0,\ a(e_z)]=ia\left(-\sum_{y}c_{zy}a_z\right)=$$

$$=-ia\left(\sum_{y}c_{yz}e_z\right)=-ia(he_z)=\frac{d}{dt}\,a(e^{ith}e_z)|_{t=0}.$$

Аналогично можно легко получить

$$i\,[H_0,\ a^*(e_z)]=\frac{d}{dt}\,a^*(e^{ith}e_z)|_{t=0}. \qquad (0.3.2)$$

Из этих равенств и следует правое равенство в (0.3.1).

Далее, пусть всегда $\mathfrak{A}$ есть некоторая C^*-алгебра с единицей.

Определение 0.8. Состоянием $<\ >$ на C^*-алгебре $\mathfrak{A}$ называется непрерывный положительный нормированный линейный функционал, т. е. непрерывный линейный функционал, обладающий свойством положительности:

$$\langle A^*A\rangle\geq0 \qquad \forall\ A\in\mathfrak{A}$$

и нормированности:

$$\langle I \rangle = 1,$$

где $I \in \mathfrak{A}$ есть единица в C^*-алгебре $\mathfrak{A}$.

Определение 0.9. Квазисвободное состояние $\langle\ \rangle_0$ на $\mathfrak{A}(\mathscr{H})$ есть линейный положительный функционал такой, что

$$\langle I \rangle_0 = 1,$$

$$\langle a^{\#}(f_1) \ldots a^{\#}(f_{2k}) \rangle_0 = \sum_{\pi} (-1)^{|\pi|} \prod_{s=1}^{k} \langle a^{\#}(f_{i_s}) a^{\#}(f_{j_s}) \rangle_0,$$

где сумма берется по всем разбиениям множества индексов $(1, \ldots, 2k)$ на k пар $(i_1, j_1), \ldots, (i_k, j_k)$, причем $i_s < j_s$, $|\pi|$ — четность перестановки $\pi = (i_1, j_1, \ldots, i_k, j_k)$.

Определение 0.10. Квазисвободное состояние $\langle\ \rangle_0$ на $\mathfrak{A}(\mathscr{H})$ называется калибровочно-инвариантным, если выполнено условие калибровочной инвариантности

$$\langle a(f) a(g) \rangle_0 = \langle a^*(f) a^*(g) \rangle_0 = 0. \qquad (0.3.4)$$

Замечание. Для того чтобы так определенный функционал был состоянием, т. е. был положительно определен, необходимы дополнительные условия. Очевидно, что если $\langle\ \rangle_0$ — состояние, то имеет место равенство

$$\langle a^*(f),\ a(g) \rangle_0 = (f,\ Bg), \qquad (0.3.5)$$

где B — линейный положительный оператор в $\mathscr{H}$ такой, что

$$0_{\mathscr{H}} \leqslant B_{\mathscr{H}} \leqslant I_{\mathscr{H}}, \qquad (0.3.6)$$

где $0_{\mathscr{H}}$ — нулевой оператор, а $I_{\mathscr{H}}$ — тождественный оператор в $\mathscr{H}$.

Можно доказать, что условие (0.3.6) является не только необходимым, но и достаточным для того, чтобы $\langle\ \rangle_0$ было квазисвободным калибровочно-инвариантным состоянием (см. [87]).

Мы будем обозначать через $\langle\ \rangle_0^B$ квазисвободное калибровочно-инвариантное состояние, определяемое с помощью оператора B (см. формулу (0.3.5)), и через $\langle\ \rangle_0$ просто квазисвободное состояние на C^*-алгебре $\mathfrak{A}(\mathscr{H})$.

Заметим, что случай $B = 0_{\mathscr{H}}$ соответствует так называемому фоковскому состоянию на $\mathfrak{A}(\mathscr{H})$.

Из определения квазисвободного калибровочно инвариантного состояния $\langle\ \rangle_0^B$ и (0.3.5) вытекает следующая полезная формула

$$\langle a^*(f_1) \ldots a^*(f_m) a(g_n) \ldots a(g_1) \rangle_0^B = \delta_{mn} \det \{(f_i, Bg_j)\}. \qquad (0.3.7)$$

Определение 0.11. Состояние $\langle\ \rangle$ называется инвариантным относительно динамики τ_t, если

$$\langle \tau_t(A) \rangle = \langle A \rangle \qquad (0.3.8)$$

для любых $A \in \mathfrak{A}(\mathscr{H})$, $t \in \mathbb{R}$.

Если выполнено (0.3.8), мы будем также говорить, что динамика τ_t инвариантна относительно состояния $\langle\ \rangle$.

Следующее утверждение является необходимым и достаточным условием для того, чтобы свободная динамика была инвариантна относительно квазисвободного калибровочно-инвариантного состояния.

Утверждение 0.1. Квазисвободное состояние $\langle\ \rangle_0^B$, порожденное оператором B, инвариантно относительно свободной динамики τ_t^0 тогда и только тогда, когда операторы B и h коммутируют, т. е. имеет место равенство

$$Be^{ith}=e^{ith}B \qquad \forall t\in\mathbf{R}. \tag{0.3.9}$$

Доказательство. Достаточность следует из очевидной выкладки

$$\langle \tau_t^0(a^*(f)a(g))\rangle_0^B=(e^{ith}f,\ Be^{ith}g)=(e^{ith}f,\ e^{ith}Bg)=$$
$$=(f,Bg)=\langle a^*(f)a(g)\rangle_0^B.$$

Докажем теперь необходимость условия (0.3.9). Из инвариантности состояния $\langle\ \rangle_0^B$ относительно динамики τ_t^0 следует, что для всех $f, g\in\mathscr{H}$

$$\langle \tau_t^0(a^*(f)a(g))\rangle_0^B=\langle a^*(f)a(g)\rangle_0^B.$$

Откуда имеем

$$(e^{ith}f, Be^{ith}g)=(f, Bg),$$

или

$$(f, e^{-ith}Be^{ith}g)=(f, Bg).$$

Так как последнее равенство имеет место для всех f, $g\in\mathscr{H}$, то это означает, что

$$e^{-ith}Be^{ith}\equiv B \quad \forall t\in\mathbf{R},$$

то есть выполнено условие (0.3.9).

Теперь мы определим так называемое физическое гильбертово пространство $\mathscr{H}_{\text{физ.}}$ и физический гамильтониан $H_{\text{физ}}$. Для этого нам придется кратко описать конструкцию ГНС-представления C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ по состоянию $\langle\ \rangle$.

Определим тройку $(\mathscr{H}_{\langle\ \rangle}, \pi_{\langle\ \rangle}, \Omega_{\langle\ \rangle})$, составляющую циклическое ГНС-представление C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ по состоянию $\langle\ \rangle$, где $\mathscr{H}_{\langle\ \rangle}$ — гильбертово пространство, $\pi_{\langle\ \rangle}$ — представление, а $\Omega_{\langle\ \rangle}$ — циклический вектор.

Сначала мы определим $\mathscr{H}_{\langle\ \rangle}$. Алгебра $\mathfrak{A}$ есть банахово пространство, а с помощью $\langle\ \rangle$ его можно наделить структурой предгильбертова пространства, если ввести положительно-определенное скалярное произведение

$$(A,\ C)=\langle C^*A\rangle, \qquad A,\ C\in\mathfrak{A}. \tag{0.3.10}$$

Множество

$$\mathfrak{B}_{\langle\ \rangle}=\{A\in\mathfrak{A}:\ \langle A^*A\rangle=0\},\tag{0.3.11}$$

как легко проверить, оказывается левым идеалом $\mathfrak{A}$.

Задав классы эквивалентности

$$A_{\langle\ \rangle}=\{\hat{A}\ni\mathfrak{A}:\ \hat{A}=A+I,\ I\in\mathfrak{B}_{\langle\ \rangle}\}\in\mathfrak{A}/\mathfrak{B}_{\langle\ \rangle}\tag{0.3.12}$$

и положив

$$(A_{\langle\ \rangle},C_{\langle\ \rangle})=\langle C^*A\rangle,\tag{0.3.13}$$

где $A\in A_{\langle\ \rangle}$, $B\in B_{\langle\ \rangle}$ — некоторые элементы классов эквивалентности, мы корректно определим скалярное произведение на $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}_{\langle\ \rangle}$. Пополнение $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}_{\langle\ \rangle}$ по этому скалярному произведению и есть $\mathscr{H}_{\langle\ \rangle}$. Отображение $\pi_{\langle\ \rangle}$ на плотном множестве в $\mathscr{H}_{\langle\ \rangle}$ определяется следующим образом:

$$\pi_{\langle\ \rangle}(A)C_{\langle\ \rangle}=(AC)_{\langle\ \rangle},\tag{0.3.14}$$

а потом распространяется на все $\mathscr{H}_{\langle\ \rangle}$ в силу его ограниченности на $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}_{\langle\ \rangle}$. Остается указать циклический вектор $\Omega_{\langle\ \rangle}$:

$$\Omega_{\langle\ \rangle}=I_{\langle\ \rangle},\tag{0.3.15}$$

где I — единица C^*-алгебры $\mathfrak{A}$.

Определим для некоторой динамики τ_t и инвариантного относительно нее состояния $\langle\ \rangle$ самосопряженный оператор $H_{\text{физ}}$. Сильно непрерывная однопараметрическая группа U_t в $\mathscr{H}_{\langle\ \rangle}$

$$U_t(\pi_{\langle\ \rangle}(A)\Omega_{\langle\ \rangle})=\pi_{\langle\ \rangle}(\tau_t(A)\Omega_{\langle\ \rangle})\tag{0.3.16}$$

является, в силу инвариантности динамики τ_t относительно состояния $\langle\ \rangle$, унитарной, которая по теореме Стоуна имеет инфинитиземальный генератор H_{GNS} такой, что

$$e^{itH_{\text{GNS}}}(\pi_{\langle\ \rangle}(A)\Omega_{\langle\ \rangle})=\pi_{\langle\ \rangle}(\tau_t(A)\Omega_{\langle\ \rangle}).\tag{0.3.17}$$

Мы будем называть пространство $\mathscr{H}_{\text{физ}}\equiv\mathscr{H}_{\langle\ \rangle}$ физическим гильбертовым пространством, а оператор $H_{\text{физ}}\equiv H_{\text{GNS}}$ физическим гамильтонианом.

Далее унитарная однопараметрическая группа U_t также будет называться динамикой. Из контекста будет ясно, о какой динамике — в C^*-алгебре или в физическом гильбертовом пространстве — идет речь.

§ 0.4. Свободный ферми-газ. КМШ-состояния

Определение 0.12 ([28]). Пусть на C^*-алгебре $\mathfrak{A}$ заданы динамика τ и состояние $\langle\ \rangle$. Состояние $\langle\ \rangle$ называется (τ,β)-КМШ-состоянием ($\beta\in\overline{\mathbf{R}}\equiv\mathbf{R}\cup\{\pm\infty\}$), если для любых A, $B\in\mathfrak{A}$ существует функция $F_{A,B}$ такая, что:

а) $F_{A,B}$ аналитична в $\mathbf{D}_\beta$;

б) $F_{A,B}$ непрерывна и ограничена в $\overline{\mathbf{D}}_\beta$;

в) $F_{A,B}(t)=\langle A\tau_t(B)\rangle, \quad \forall t\in\mathbf{R},$

$$F_{A,B}(t+i\beta)=\langle\tau_t(B)A\rangle, \quad \forall t\in\mathbf{R}, \tag{0.4.1}$$

где $\mathbf{D}_\beta=\{z\colon 0<\operatorname{Im}z<\beta\}$ при $\beta>0$ и

$$\mathbf{D}_\beta=\{z\colon \beta<\operatorname{Im}z<0\} \quad \text{при} \quad \beta<0$$

Если $\beta=+\infty$, (τ,β)-КМШ-состояние называется основным.

Определим КМШ-состояние относительно свободной динамики $\tau_t{}^0$, порожденной одночастичным гамильтонианом h.

Утверждение 0.2. Для каждого $\beta\in\mathrm{R}$ существует единственное состояние $\langle\ \rangle$, которое является (τ^0,β)-КМШ-состоянием. Состояние $\langle\ \rangle$ оказывается при этом квазисвободным калибровочно-инвариантным с

$$B=\exp(-\beta h)\,(I_{\mathscr{H}}+\exp(-\beta h))^{-1}, \tag{0.4.2}$$

т. е. $\langle\ \rangle\equiv\langle\ \rangle_0{}^B$.

Доказательство. По определению β-КМШ-состояния имеем

$$\langle a(g)a^*(f)\rangle=\langle a^*(e^{-\beta h}f)a(g)\rangle=(e^{-\beta h}f,\ g)\ -\langle a^*(f)a(g)\rangle,$$

если f — аналитический вектор для h, откуда

$$\langle a^*((I_{\mathscr{H}}+e^{-\beta h})f)a(g)\rangle=(e^{-\beta h}f,\ g),$$

т. е. имеет место (0.4.2). Для монома общего вида эту выкладку надо итерировать (см. [27]), откуда следует, что $\langle\ \rangle$ квазисвободно и B имеет вид (0.4.2). ■

Глава 1

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА СВОБОДНОЙ ДИНАМИКИ В КВАЗИСВОБОДНОМ СОСТОЯНИИ

§ 1.1. Виковские скобки

Определим некоторое специальное отображение C^*-алгебры КАС $\mathfrak{A}(\mathscr{H})$ в себя, которое будем называть скобками Вика. Оно будет определяться по квазисвободному состоянию $\langle\ \rangle_0$, которое необязательно должно быть калибровочно-инвариантным. Из контекста будет ясно, о каком состоянии идет речь.

Зафиксируем некоторое квазисвободное состояние $\langle\ \rangle\equiv\langle\ \rangle_0$ на $\mathfrak{A}(\mathscr{H})$. Мы будем определять мономы Вика, т. е. результат применения виковских скобок к моному вида

$$W=a^\#(f_1)\ldots a^\#(f_m), \quad f_i\in\mathscr{H}$$

с помощью индуктивной формулы, которая похожа на ту, с помощью которой определяются виковские мономы для гауссовских систем (см. [6]).

Определим сначала виковские скобки $::\equiv::_{\langle\,\rangle}$ на мономах, а потом распространим их по линейности на всю C^*-алгебру.

Определение 1.1. (Мономы Вика на C^*-алгебре КАС $\mathfrak{A}(\mathscr{H})$). Положим

$$:I:=0,$$

$$a_T\equiv a_1^\# \dots a_n^\# = \sum_{T'} :a_{T'}^\#: \langle a_{T\setminus T'}^\# \rangle (-1)^{\pi(T,T')}, \qquad (1.1.1)$$

где $T=(1, \dots, n)$, T' — подпоследовательность T, сохраняющая порядок, $T\setminus T'$ — оставшаяся подпоследовательность $\pi(T, T')$ — четность перестановки $(1, \dots, n)\to(T\setminus T', T')$, $a_i^\#=a^\#(f_i)$, $f_i\in\mathscr{H}$.

Утверждение 1.1. Имеет место формула обращения

$$:a_T:=\sum_{T'} a_{T'}^\# \langle a_{T\setminus T'}^\# \rangle (-1)^{\pi(T,T')+|T\setminus T'|/2}. \qquad (1.1.2)$$

Доказательство формулы обращения в точности такое же, как и для гауссовских систем (см. [6]).

В дальнейшем мы часто будем обозначать виковские скобки по квазисвободному калибровочно-инвариантному состоянию, определяемому с помощью оператора B, через $::_B$.

Замечание. Из определения 1.1 легко выводится следующая формула, с помощью которой ранее и вводились виковские скобки $:\equiv:_B$ в [25], [46] по квазисвободному калибровочно-инвариантному состоянию ($\langle\ \rangle\equiv\langle\ \rangle_0^B$)

$$:a^*(f_1)\dots a^*(f_m)a(f_{m+1})\dots a(f_{m+n}): =$$

$$= \sum_{k=0}^{\min(m,n)} (-1)^k \sum_{\pi} (-1)^{|\pi|} \prod_{s=1}^{k} \langle a^*(f_{i_s})a(f_{j_s})\rangle a^*(f_1)\dots$$

$$\dots a^*(\check{f}_{i_1})\dots \check{a}^*(f_{i_k})\dots a^*(f_m)a(f_{m+1})\dots \check{a}(f_{j_1})\dots$$

$$\dots \check{a}(f_{j_k})\dots a(f_{m+n}), \qquad (1.1.3)$$

где сумма $\sum_\pi$ берется по всем перестановкам $\pi\in S_{m+n}$ таким, что

$$\pi=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & 2k-1 & 2k & 2k+1 & \dots & m+n \\ i_1 & j_1 & \dots & i_k & j_k & r_1 & \dots & r_{m+n-2k}\end{pmatrix}$$

для любой последовательности $1\leqslant i_1<i_2<\dots<i_k\leqslant m$, $m+1\leqslant j_s\leqslant m+n$, $s=1, \dots, k$ и любой возрастающей последовательности $r_1, \dots, r_{m+n-2k}$ чисел $1, 2, \dots, m+n$ без $i_1, \dots, i_k$, $j_1, \dots, j_k$. Знак «$\vee$» означает, что соответствующий оператор рождения-уничтожения в произведении отсутствует.

В следующей теореме рассматриваются основные свойства виковских скобок.

Теорема 1.2 ([25]). Пусть $::\equiv::_{\langle\,\rangle}$ есть виковские скобки по квазисвободному состоянию $\langle\ \rangle\equiv\langle\ \rangle_0$. Тогда

1) $(:A_1A_2:)^*=:A_2^*A_1^*:$

1′) $(:a^\#(f_1)\ldots a^\#(f_m):)^*=:a^{i(\#)}(f_m)\ldots a^{i(\#)}(f_1):$,
где i(«*») = « », i(« ») = «*».

2) $\langle :a^\#(f_1)\ldots a^\#(f_m):\rangle=0$ при $m>0$.

3) $\langle :a^\#(f_m)\ldots a^\#(f_1)::a^\#(g_1)\ldots a^\#(g_n):\rangle=$

$$=\begin{cases}0, & m\neq n\\ \sum(-1)^{|\pi|}\langle a^\#(f_1)a^\#(g_{\pi(1)})\rangle\ldots\langle a^\#(f_n)a^\#(g_{\pi(n)})\rangle,\end{cases}\tag{1.1.4}$$

где сумма берется по всем подстановкам $\pi=\begin{pmatrix}1 & \ldots & n\\ \pi(1) & \ldots & \pi(n)\end{pmatrix}$. Если состояние $\langle\ \rangle_0$ калибровочно-инвариантно, т. е. $\langle\ \rangle\equiv\equiv\langle\ \rangle_0^B$, то имеет место формула

3′) $\langle :a^*(f_m)\ldots a^*(f_1)a(g_1)\ldots a(g_n)::a^*(h_k)\ldots a^*(h_1)a(u_1),\ldots a(u_s):\rangle=\langle a^*(f_m)\ldots a^*(f_1)a(u_1)\ldots a(u_s)\rangle$

$$\langle a(g_1)\ldots a(g_n)a^*(h_k)\ldots a^*(h_1)\rangle=\delta_{ms}\delta_{kn}\det\{(Bf_i,u_j)\}\det\{((I_{\mathscr{H}}-B)g_i,h_j)\}\tag{1.1.5}$$

для всех $f_i, g_i, u_i, h_i\in\mathscr{H}$.

Свойства 1) и 1′) очевидным образом следуют из определения виковских скобок, а свойства 2) и 3) — из 3′).

Докажем свойство 3′). Заметим, что обе части равенства (1.1.5) линейны или антилинейны по одним и тем же аргументам. Поэтому достаточно проверить это равенство для случая, когда все $f_i, g_i, u_i, h_i, i=1,\ldots,n$ являются элементами некоторого базиса в $\mathscr{H}$.

Очевидно, что если равенство (1.1.5) выполнено для виковских скобок $::_{B_k}$ по квазисвободным калибровочно-инвариантным состояниям $\langle\ \rangle_0^{B_k}$, определяемым с помощью операторов B_k, где

$$0_{\mathscr{H}}\leqslant B_k\leqslant I_{\mathscr{H}},$$

и

$$(x, B_ky)\to(x, By)\ \forall x, y\in\mathscr{H},$$

то оно выполнено и для виковских скобок $::_B$ по квазисвободному калибровочно-инвариантному состоянию, определяемому с помощью оператора B.

Для любого оператора B, $0_{\mathscr{H}}\leqslant B\leqslant I_{\mathscr{H}}$ можно, очевидно, выбрать последовательность операторов B_k, таких, что $0_{\mathscr{H}}\leqslant B_k\leqslant\leqslant I_{\mathscr{H}}$, B_k имеет дискретный спектр и

$$(x, B_ky)\to(x, By)\ \forall x, y\in\mathscr{H}.$$

Докажем равенство (1.1.5) для оператора B_k, имеющего дискретный спектр $\{\lambda_i,\ 0\leqslant\lambda_i\leqslant 1,\ i\in\mathbf{N}\}$. Пусть e_i есть нормированный собственный вектор оператора B_k, соответствующий собственному значению λ_i, причем набор векторов $\{e_i,\ i\in\mathbf{N}\}$ является ортонормированным базисом.

Так как $(e_i, e_j)=\delta_{ij}$ и $\langle a^*(e_i)a(e_j)\rangle_0^{B_k}=\delta_{ij}\lambda_i$, то из определения виковских скобок следует, что

$$:a^*(e_{i_1})\dots a^*(e_{i_q})a^*(e_{j_1})\dots a^*(e_{j_p})a(e_{j_p})\dots a(e_{j_1})a(e_{r_1})\dots$$

$$\dots a(e_{r_s}):_{B_k}=a^*(e_{i_1})\dots a^*(e_{i_q})a(e_{r_1})\dots a(e_{r_s}):a^*(e_{j_1})\dots$$

$$\dots a^*(e_{j_p})a(e_{j_p})\dots a(e_{j_1}):_{B_k}=a^*(e_{i_1})\dots a^*(e_{i_q})a(e_{r_1})\dots$$

$$\dots a(e_{r_s})\ :a^*(e_{j_1})a(e_{j_1}):\ \dots\ :a^*(e_{j_p})a(e_{j_p}):_{B_k}=$$

$$=\prod_{k=1}^{q} a^*(e_{i_k})\prod_{k=1}^{s} a(e_{r_k})\prod_{k=1}^{p}(a^*(e_{j_k})a(e_{j_k})-\lambda_{j_k}I_{\mathscr{H}}),\qquad(1.1.6)$$

где $I=\{i_1,\dots,i_q\}$, $J=\{j_1,\dots,j_p\}$, $R=\{r_1,\dots,r_s\}$, причем

$$I\cap J=I\cap R=R\cap J=\varnothing.$$

Перестановками антикоммутирующих операторов $a^*(f)$ и $a^*(g)$, а также $a(f)$ и $a(g)$, к виду (1.1.6) приводится любое выражение

$$:a^*(e_{l_1})\dots a^*(e_{l_m})a(e_{l_{m+1}})\dots a(e_{l_{m+n}}):_{B_k}.\qquad(1.1.7)$$

Заметим, что такие перестановки в (1.1.7) ведут к одинаковой смене знаков в обеих частях равенства (1.1.5). Следовательно (1.1.5), достаточно проверить для выражений вида (1.1.6).

Имеем

$$\langle\ :a^*(e_i)a(e_i):_{B_k}\ :a^*(e_j)a(e_j):_{B_k}\rangle^{B_k}=$$

$$=\langle(a^*(e_i)a(e_i)-\lambda_i)(a^*(e_j)a(e_i)-\lambda_j)\rangle_0^{B_k}=$$

$$=\delta_{ij}\langle(1-2\lambda_i)a^*(e_i)a(e_i)+\lambda_i^2 I_{\mathscr{H}}\rangle_0^{B_k}=$$

$$=\delta_{ij}(\lambda_i^2-\lambda_i)=\delta_{ij}\lambda_i(1-\lambda_i)=$$

$$=\delta_{ij}\langle a^*(e_i)a(e_j)\rangle_0^{B_k}\langle a(e_j)a^*(e_i)\rangle_0^{B_k}\qquad(1.1.8)$$

для всех $i, j\in\mathbf{N}$.

Из (1.1.8) и (1.1.6) следует равенство (1.1.5).

§ 1.2. Фоковское представление свободной динамики в квазисвободном состоянии

Для краткости обозначений в этом параграфе будем считать, что $\langle\ \rangle \equiv \langle\ \rangle_0^B$. Рассмотрим ГНС-представление $(\mathscr{H}_{\langle\ \rangle}, \pi_{\langle\ \rangle}, \Omega_{\langle\ \rangle})$ C^*-алгебры $\mathfrak{A}(\mathscr{H})$, по квазисвободному калибровочно-инвариантному состоянию $\langle\ \rangle_0^B$.

Пусть свободная динамика τ_t^0, порождаемая одночастичным гамильтонианом $h=h^*$ с плотной областью определения $\mathscr{D}_0 \subseteq \mathscr{H}$, оставляет $\langle\ \rangle_0^B$ инвариантным, т. е. B и h коммутируют.

Рассмотрим оператор H_{GNS}, порождаемый свободной динамикой τ_t^0 в $\mathscr{H}_{\mathrm{GNS}} \equiv \mathscr{H}_{\langle\ \rangle}$.

Для гильбертова пространства $\mathscr{H}$ со скалярным произведением $(\ ,\ )_{\mathscr{H}}$ определим сопряженное пространство $\mathscr{H}^\iota$ со скалярныгм произведением $(\ ,\ )_{\mathscr{H}^\iota}$, где $\mathscr{H}^\iota$ совпадает с $\mathscr{H}$ как множество и $\iota : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ есть отображение, обладающее следующими свойствами

$$\iota^2 = 1, \iota(\lambda f) = \bar{\lambda}\iota(f), \quad f \in \mathscr{H}$$

$$(\iota(f), \ \iota(g))_{\mathscr{H}^\iota} = (g, f)_{\mathscr{H}}, \quad f, g \in \mathscr{H}.$$

Для любого оператора $D: \mathscr{H} \to \mathscr{H}$, положим

$$D^\iota: \mathscr{H}^\iota \to \mathscr{H}^\iota, \quad D^\iota(\iota(f)) \overset{\mathrm{def}}{=} \iota(Df), \quad f \in \mathscr{H}.$$

Введем обозначения $B_1 = (1_{\mathscr{H}} - B)^{\frac{1}{2}}$, $B_2 = B^{\frac{1}{2}}$.

Теорема 1.3. Пусть квазисвободное состояние $\langle\ \rangle_0^B$ инвариантно относительно свободной динамики τ_t^0, порожденной h. Определим $\mathscr{H}_1 = B_1\mathscr{H}$, $\mathscr{H}_2^\iota = B_2^\iota \mathscr{H}^\iota$. Пусть

$$\widehat{\mathscr{H}}_{m,n} = (\underbrace{\mathscr{H}_1 \otimes \ldots \otimes \mathscr{H}_1}_{m \text{ раз}})_{\mathrm{as}} \otimes (\underbrace{\mathscr{H}_2^\iota \otimes \ldots \otimes \mathscr{H}_2^\iota}_{n \text{ раз}})_{\mathrm{as}},$$
$$\widehat{\mathscr{H}} = \bigoplus_{m,n=0}^{\infty} \widehat{\mathscr{H}}_{m,n}, \tag{1.2.1}$$

где $(\otimes \ldots \otimes)_{\mathrm{as}}$ означает антисимметризованное тензорное произведение гильбертовых пространств.

Тогда существует разложение $\mathscr{H}_{\mathrm{GNS}}$ на ортогональные и инвариантные подпространства оператора H_{GNS}

$$\mathscr{H}_{\mathrm{GNS}} = \bigoplus_{m,n=0}^{\infty} \mathscr{H}_{m,n}$$

и унитарный оператор U: $\mathscr{H}_{\mathrm{GNS}} \to \hat{\mathscr{H}}_{\mathrm{GNS}}$ такой, что:

$$U_{m,n} \overset{\mathrm{def}}{=} U\,|_{\mathscr{H}_{m,n}} : \mathscr{H}_{m,n} \to \hat{\mathscr{H}}_{m,n}.$$

Причем

$$U_{m,n} H_{\mathrm{GNS}} U_{m,n}^{-1} = \sum_{i=1}^{m} 1_{\mathscr{H}} \otimes \ldots \otimes 1_{\mathscr{H}} \otimes \overset{i}{\check{h}} \otimes 1_{\mathscr{H}} \otimes \ldots \otimes 1_{\mathscr{H}} -$$

$$- \sum_{i=m+1}^{m+n} 1_{\mathscr{H}} \otimes \ldots \otimes 1_{\mathscr{H}} \otimes \overset{i}{\check{h}^{\iota}} \otimes 1_{\mathscr{H}} \otimes \ldots \otimes 1_{\mathscr{H}} \qquad (1.2.2)$$

на плотной области определения $\hat{\mathscr{D}}_{m,n} \subseteq \hat{\mathscr{H}}_{m,n}$, где

$$\hat{\mathscr{D}}_{m,n} = (\underbrace{\mathscr{D}_1 \otimes \ldots \otimes \mathscr{D}_1}_{m\ \text{раз}})_{\mathrm{as}} \otimes (\underbrace{\mathscr{D}_2^{\iota} \otimes \ldots \otimes \mathscr{D}_2^{\iota}}_{n\ \text{раз}})_{\mathrm{as}},$$

где $\mathscr{D}_1 = B_1 \mathscr{D} \subseteq \mathscr{H}_1$, $\mathscr{D}_2^{\iota} = B_2 \mathscr{D}^{\iota} \subseteq \mathscr{H}_2^{\iota}$.

Доказательство теоремы 1.3. Для краткости обозначений положим $\Omega = \Omega_{\langle\ \rangle}$, $\pi = \pi_{\langle\ \rangle}$.

Рассмотрим следующие подпространства $\mathscr{H}_{\mathrm{GNS}}$:

$$\mathscr{H}_{m,n} = \{\pi(:a^*(f_1) \ldots a^*(f_m) a(f_{m+1}) \ldots a(f_{m+n}):)\Omega,\ f_i \in \mathscr{H}\}.$$

Утверждение 1.4. Подпространства $\mathscr{H}_{m,n}$ взаимно ортогональны и инвариантны относительно свободной динамики

$$\mathscr{H}^0 = \bigoplus_{m,n=0}^{\infty} \mathscr{H}_{m,n}. \qquad (1.2.3)$$

Доказательство. Ортогональность подпространств $\mathscr{H}_{m,n}$ следует из свойств мономов Вика (теорема 1.2).

Из определения виковских скобок и из того факта, что h и B коммутируют, следует, что

$$\tau_t(:a^*(f_1) \ldots a(f_{m+n}):) = :\tau_t(a^*(f_1) \ldots a(f_{m+n})):, \qquad (1.2.4)$$

что и означает инвариантность подпространств $\mathscr{H}_{m,n}$ относительно оператора H_{GNS}.

Пусть пространства $\hat{\mathscr{H}}_{m,n}$ задаются (1.2.1). Определим операторы $U_{m,n}: \mathscr{H}_{m,n} \to \hat{\mathscr{H}}_{m,n}$ следующим образом:

$$U_{m,n}\pi(:a^*(f_1) \ldots a^*(f_m) a(g_1) \ldots a(g_n):)\Omega =$$

$$= (B_1 f_1 \otimes \ldots \otimes B_1 f_m)_{\mathrm{as}} \otimes (B_2^{\iota} g_1 \otimes \ldots \otimes B_2^{\iota} g_n)_{\mathrm{as}}. \qquad (1.2.5)$$

Проверим изометричность оператора $U_{m,n}$. Имеем

$$(U_{m,n}\pi(:a^*(f_1)\dots a^*(f_m)a(g_n)\dots a(g_1):)\Omega,$$
$$U_{m,n}\pi(:a^*(u_1)\dots a^*(u_m)a(v_n)\dots a(v_1):)\Omega)=$$
$$=((B_1f_1\otimes\dots\otimes B_1f_m)_{as}\otimes(B_2^{\iota}g_n\otimes\dots\otimes B_2^{\iota}g_1)_{as},$$
$$(B_1u_1\otimes\dots\otimes B_1u_m)_{as}\otimes(B_2^{\iota}v_n\otimes\dots\otimes B_2^{\iota}v_1)_{as})=$$
$$=\det((B_1f_i,B_1u_j))\det((B_2v_i,B_2g_j))=$$
$$=\det((f_i,(\mathbf{1}_{\mathscr{H}}-B)u_j))\det((v_i,Bg_j)).$$

Последнее произведение в силу свойства 3′ (теорема 1.2) равно

$$\langle :a^*(f_1)\dots a^*(f_m)a(g_n)\dots a(g_1)::a^*(u_1)\dots a^*(u_m)a(v_n)\dots$$
$$\dots a(v_1):\rangle=(\pi(:a^*(f_1)\dots a^*(f_m)a(g_n)\dots a(g_1):)\Omega,$$
$$\pi(:a^*(u_1)\dots a^*(u_m)a(v_n)\dots a(v_1):)\Omega),$$

откуда следует унитарность оператора $U_{m,n}$.

Докажем, что выполнено соотношение (1.2.2). Имеем

$$(U_{m,n}H_{GNS}U_{m,n}^{-1}(B_1f_1\otimes\dots\otimes B_1f_m)_{as}\otimes(B_2^{\iota}g_n\otimes\dots\otimes B_2^{\iota}g_1)_{as},$$
$$(B_1u_1\otimes\dots\otimes B_1u_m)_{as}\otimes(B_2^{\iota}v_n\otimes\dots\otimes B_2^{\iota}v_1)_{as})=$$
$$=i\frac{d}{dt}(\pi(:a^*(e^{ith}f_1)\dots a^*(e^{ith}f_m)a(e^{ith}g_n)\dots a(e^{ith}g_1):)\Omega),$$
$$\pi(:a^*(u_1)\dots a^*(u_m)a(v_n)\dots a(v_1):)\Omega)=$$
$$=\Bigg(\sum_{k=1}^{m}(B_1f_1\otimes\dots\otimes hB_1f_k\otimes\dots\otimes B_1f_m)_{as}\otimes(B_2^{\iota}g_n\otimes\dots\otimes B_2^{\iota}g_1)_{as}-$$
$$-\sum_{k=m+1}^{m+n}(B_2f_1\otimes\dots\otimes B_2f_m)_{as}\otimes(B_2^{\iota}g_n\otimes\dots\otimes h^{\iota}B_2^{\iota}f_k\otimes\dots\otimes B_2^{\iota}g_1)_{as},$$
$$(B_1f_1\otimes\dots\otimes B_1f_m)_{as}\otimes(B_2^{\iota}g_n\otimes\dots\otimes B_2^{\iota}g_1)_{as}),$$

откуда и следует равенство (1.2.2). Подмножество $\mathscr{D}_{m,n}$, очевидно, плотно в $\mathscr{H}_{m,n}$. Теорема 1.3 полностью доказана.

Заметим, что из того факта, что самосопряженные операторы h и B коммутируют, следует, что их, в силу спектральной теоремы, можно реализовать как операторы умножения на одном и том же пространстве $L_2(X, d\mu)$.

§ 1.3. Фоковское представление свободной динамики в КМШ-состоянии

Рассмотрим свободный ферми-газ в равновесном температурном состоянии при температуре $\frac{1}{\beta}$, которое является квазисвободным калибровочно-инвариантным состоянием с

$$B=\exp(-\beta h)(I_{\mathscr{H}}+\exp(-\beta h))^{-1}, \tag{1.3.1}$$

где $h=-\Delta+\mu$ оператор в $\mathscr{H}=L_2(\mathbf{R}^\nu, dx)$, $\mu\in\mathbf{R}$ есть химический потенциал, $-\Delta$ — оператор Лапласа.

Положим

$$\mathscr{F}_a^\iota \overset{\mathrm{def}}{=} \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathscr{F}_a^{(n)}(\mathscr{H}^\iota).$$

Теорема 1.5. Оператор H_{GNS} для свободного ферми-газа в равновесном состоянии при температуре $\frac{1}{\beta}$, $\beta\in\mathbf{R}$ действует в пространстве

$$\mathscr{H}_{\mathrm{GNS}}=\mathscr{F}_a\otimes\mathscr{F}_a^\iota=\bigoplus_{m,n=0}^{\infty}\mathscr{H}_{m,n}, \tag{1.3.2}$$

где $\mathscr{H}_{m,n}=L_2^{\mathrm{as}}((\mathbf{R}^\nu)^m, dx)\otimes L_2^{\mathrm{as}}((\mathbf{R}^\nu)^n, dx)$ есть подпространство $L_2((\mathbf{R}^\nu)^{m+n}; dx)$ функций, антисимметрических по первым m и последним n аргументам. H_{GNS} оставляет эти подпространства инвариантными и его ограничение на $\mathscr{H}_{m,n}$ совпадает с оператором

$$-\Delta_1-\ldots\Delta_m+\Delta_{m+1}+\ldots\Delta_{m+n}+\mu(m-n), \tag{1.3.3}$$

где $-\Delta_i$ есть оператор Лапласа, действующий на i-ую переменную.

Доказательство теоремы 1.5 следует из теоремы 1.3.

Следствие. Динамика $e^{itH_{\mathrm{GNS}}}$ в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}_{\mathrm{GNS}}=\mathscr{F}_a\otimes\mathscr{F}_a^\iota$ задается следующей формулой:

$$\Gamma(e^{ith})\otimes\Gamma(e^{-ith^\iota}). \tag{1.3.4}$$

Замечание. Очевидно, что

$$\mathscr{H}_{\mathrm{GNS}}=\mathscr{F}(\mathscr{H}_1\oplus\mathscr{H}_2), \qquad H_{\mathrm{GNS}}=d\Gamma(h), \tag{1.3.5}$$

где

$$h=h\otimes 1-1\otimes h^\iota. \tag{1.3.6}$$

Теорема 1.5 позволяет нам реализовать оператор H_{GNS} на инвариантных подпространствах как оператор умножения. Заметим, что такое представление оператора не зависит от $\beta\in\mathbf{R}$. Если же $\beta=+\infty$ (основное состояние), то $B=0$ и для него $\mathscr{H}_{\mathrm{GNS}}=\mathscr{F}_a$ — фоковское пространство, а не тензорное произведение фоковских пространств. В основном состоянии спектр оператора H_{GNS} ограничен снизу, а в температурном состоянии

(КМШ-состоянии) он неограничен ни снизу, ни сверху. Поэтому, изучение спектральных свойств H_{GNS} в температурном состоянии наталкивается на ряд трудностей, проистекающих из этого факта.

§ 1.4. Основное состояние для свободной динамики

Следующее утверждение является необходимым и достаточным условием на оператор B, чтобы квазисвободное калибровочно-инвариантное состояние $\langle\ \rangle_0^B$ было основным.

Утверждение 1.6. Для того, чтобы квазисвободное калибровочно-инвариантное состояние $\langle\ \rangle_0^B$ было основным, необходимо и достаточно, чтобы

$$1_{\mathscr{H}}-B=E_{(0,+\infty)}+c\,(E_{[0,+\infty)}-E_{(0,+\infty)}), \tag{1.4.1}$$

где $0\leqslant c\leqslant 1$, а E_Δ — спектральная мера оператора h.

Доказательство. Проведем для случая $\dim\mathscr{H}=n<\infty$. Можно считать, что $d\Gamma(h)$ представим в виде

$$d\Gamma(h)=\sum_{i=1}^{n}h_i a_i^* a_i, \tag{1.4.2}$$

где $\{e_i,\ i=1,\ \ldots,\ n\}$ — некоторый базис в $\mathscr{H}$ из нормированных собственных векторов оператора h, $he_i=h_ie_i$, причем $a_i=a(e_i)$, $a_i^*=a^*(e_i)$, $h_i=(e_i,\ he_i)$. В силу коммутативности операторов h и B, каждый вектор e_i является собственным вектором и оператора B, $Be_i=b_ie_i$.

Пусть $T=\{i_1,\ \ldots,\ i_k\}$; положим

$$a_T^*=a^*(e_{i_1})\ldots a^*(e_{i_k}),\quad a_T=a(e_{i_1})\ldots a(e_{i_k}).$$

Заметим, что элементы

$$:a_T^* a_{T'}: \tag{1.4.3}$$

для T, $T'\subseteq\{1,\ldots,n\}$ ортогональны относительно скалярного произведения $(A,\ A')=\langle (A')^*A\rangle_0^B$ и имеют нулевую норму, если в T имеются нулевые собственные значения оператора B или в T' — нулевые собственные значения оператора $1_{\mathscr{H}}-B$. Элементы вида (1.4.3) с ненулевой нормой и порождают $\mathscr{H}_{GNS}$.

Так как

$$[a_i^*a_i,\ :a_T^*a_{T'}:]=r_i(T,\ T'):a_T^*a_{T'}:, \tag{1.4.4}$$

где

$$r_i(T,\ T')=\begin{cases}-1, & i\in T',\ i\notin T,\\ 1, & i\notin T',\ i\in T,\\ 0, & \text{в остальных случаях,}\end{cases}$$

собственное значение H_{GNS} для собственного вектора $:a_T^* a_{T'}:$ равно

$$\sum_{i \in T} h_i - \sum_{j \in T'} h_j. \tag{1.4.5}$$

Из (1.4.5) и определения основного состояния следует утверждение 1.6. ■

Следствие из утверждения 1.6. Основное состояние свободного ферми-газа является квазисвободным калибровочно-инвариантным состоянием с

$$B = 0, \tag{1.4.5}$$

где $h = -\Delta$ — оператор в $\mathscr{H} = L_2(\mathbf{R}^\nu, dx)$, $-\Delta$ — оператор Лапласа.

Доказательство. В силу того, что h в преобразовании Фурье есть оператор умножения на функцию

$$h(k) = \sum_{i=1}^{\nu} k_i^2, \quad k = (k_1, \ldots, k_\nu) \in \mathbf{R}^\nu,$$

имеем $B = 0$. ■

Глава 2

ФЕРМИ-СИСТЕМА С ОГРАНИЧЕННЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

§ 2.1. Ограниченные возмущения свободной динамики. Морфизмы Меллера. Критерий Кука

В предыдущих главах мы рассматривали в качестве динамики C^*-алгебры $\mathfrak{A}(\mathscr{H})$ так называемую свободную динамику τ_t^0, которая строилась с помощью одночастичного гамильтониана h.

Существует некоторый стандартный прием построения новой C^*-динамической системы $(\mathfrak{A}, \tau_t^V)$ по произвольной C^*-динамической системе $(\mathfrak{A}, \tau_t)$ и по $V = V^* \in \mathfrak{A}$.

Его можно пояснить следующим образом. Пусть τ_t^0 — свободная динамика на $\mathfrak{A}(\mathscr{H})$, порожденная одночастичным гальмитонианом h. Если $V = V^* \in \mathfrak{A}(\mathscr{H})$, то определим динамику τ_t^V, являющуюся ограниченным возмущением свободной динамики τ_t^0, следующим образом

$$\tau_t^V(A) \stackrel{\text{def}}{=} e^{itH} A e^{-itH} =$$

$$= \tau_t^0(A) + \sum_{n=1}^{\infty} i^n \int_{\Delta_n^t} [\tau_{s_1}^0(V), [\tau_{s_2}^0(V), [\ldots[\tau_{s_n}^0(V), \tau_t^0(A)]\cdots]]]$$

$$ds_1 \ldots ds_n, \quad A \in \mathfrak{A}, \tag{2.1.1}$$

где $\Delta_n^t=\{0<s_1<s_2<\ldots<s_n<t\}$ и $H=H_0+V$, $H_0=d\Gamma(h)$, причем ряд в правой части (2.1.1) при любом $t\in\mathbb{R}$ сходится по норме. Действительно, так как

$$\|\tau_t^0(A)\|=\|A\|,\ \forall A\in\mathfrak{A}(\mathcal{H}),$$

то

$$\|[\tau_{s_1}^0(V),[\tau_{s_2}^0(V),[\ldots[\tau_{s_n}^0(V),\tau_t^0(A)]\cdots]]\|\leqslant(2\|V\|)^n\|A\|,$$

и, следовательно,

$$\|\tau_t^V(A)\|\leqslant 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2\|V\|)^n\|A\||t|^n}{n!}=\exp(2|t|\|V\|)\|A\|.$$

Докажем, что τ_t^V — действительно динамика, т. е. является однопараметрической группой $*$—автоморфизмов алгебры $\mathfrak{A}(\mathcal{H})$. Для этого достаточно доказать только последнее равенство(2.1.1), так как по определению отображения τ_t^V (первое равенство в (2.1.1)) оно, в силу самосопряженности оператора $H=d\Gamma(h)+V$, является группой $*$—автоморфизмов в более широкой алгебре $B(\mathcal{F}_a)$—ограниченных операторов в $\mathcal{F}_a$. Последнее же равенство утверждает, что τ_t^V оставляет $\mathfrak{A}(\mathcal{H})\subseteq B(\mathcal{F}_a)$ инвариантной.

Действительно, величина

$$B_t=i\tau_t^V\tau_{-t}^0(B)\overset{\text{def}}{=}e^{it(H_0+V)}e^{-itH_0}Be^{itH_0}e^{-it(H_0+V)},$$

как легко проверить, дифференцируя B_t по t, удовлетворяет уравнению

$$\frac{dB_t}{dt}=i\tau_t^V\tau_{-t}^0([\tau_t^0(V),B]),\tag{2.1.2}$$

откуда

$$B_t=B_0+i\int_0^t\tau_s^V\tau_{-s}^0([\tau_s(V),B])\,ds.\tag{2.1.3.}$$

Если в (2.1.3) мы подставим представление $\tau_s^V\tau_{-s}^0([\tau_t^0(V),B])$ в виде (2.1.3), то получим первые два члена ряда (2.1.1) для $A=\tau_{-t}^0(B)$. Повторяя эту процедуру многократно, мы получим требуемое.

Но оказывается, что с помощью ряда (2.1.1) можно определить ограниченное возмущение любой динамики на произвольной C^*-алгебре $\mathfrak{A}$.

Определение 2.1. Взаимодействие $V=V^*$ называется ограниченным, если $V\in\mathfrak{A}$.

Утверждение 2.1. Пусть $\mathfrak{A}$ произвольная C^*-алгебра и τ_t—динамика на ней, $V=V^*\in\mathfrak{A}$. Тогда τ_t^V—тоже динамика на $\mathfrak{A}$, где

$$\tau_t^V(A)=\tau_t(A)+\sum_{n=1}^{\infty} i^n \int\limits_{\Delta_n^t} [\tau_{s_1}(V), [\tau_{s_2}(V), [\ldots[\tau_{s_n}(V),\tau_t(A)]\ldots]]]$$

$$ds_1 \ldots ds_n, \qquad A\in\mathfrak{A},$$

Доказательство смотрите, например в [27].

Определим теперь морфизмы Меллера в C^*-алгебре $\mathfrak{A}$, которые являются аналогами волновых операторов в теории рассеяния, где с помощью их доказывается асимптотическая полнота. С помощью морфизмов Меллера мы также докажем асимптотическую полноту для ферми-газа с малым ограниченным взаимодействием.

Пусть заданы на C^*-алгебре $\mathfrak{A}$ две динамики τ_t^1 и τ_t^2.

Определение 2.2 ([83]). Морфизмами Меллера для упорядоченной пары динамик (τ^1, τ^2) называются отображения $\gamma_\pm^{\tau^1,\tau^2}:\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}$, определяемые как следующие пределы

$$\gamma_\pm^{\tau^1,\tau^2}(A)=\lim_{t\to\pm\infty}\tau_{-t}^2\tau_t^1(A), \quad A\in\mathfrak{A}, \tag{2.1.4}$$

если пределы существуют.

Утверждение 2.2. Пусть $\mathfrak{A}$ — некоторая C^*-алгебра и τ^1, τ^2 — две динамики на алгебре $\mathfrak{A}$. Тогда:

а) если существуют $\gamma_\pm^{\tau^1,\tau^2}$ и $\gamma_\pm^{\tau^2,\tau^1}$, то

$$\gamma_\pm^{\tau^1,\tau^2}\equiv(\gamma_\pm^{\tau^2,\tau^1})^{-1}; \tag{2.1.5}$$

б) если существуют $\gamma_\pm^{\tau^1,\tau^2}$, то

$$\tau_t^2\gamma_\pm^{\tau^1,\tau^2}=\gamma_\pm^{\tau^1,\tau^2}\tau_t^1 \quad \forall t\in\mathrm{R}; \tag{2.1.6}$$

в) если существуют $\gamma_\pm^{\tau^1,\tau^2}$ и $\gamma_\pm^{\tau^2,\tau^1}$, то

$$\tau_t^2=\gamma_\pm^{\tau^1,\tau^2}\tau_t^1\gamma_\pm^{\tau^2,\tau^1} \quad \forall t\in\mathrm{R}. \tag{2.1.7}$$

Доказательство. а) Очевидно следует из определения морфизмов Меллера.

б) Имеем $\forall A\in\mathfrak{A}$, $\forall t\in\mathrm{R}$

$$\tau_t^2\gamma_\pm^{\tau^1,\tau^2}(A)=\lim_{s\to\pm\infty}\tau_t^2\tau_{-s}^2\tau_s^1(A)=\lim_{s\to\pm\infty}\tau_{-(s-t)}^2\tau_{s-t}^1\tau_t^1(A)=\gamma_\pm^{\tau^1,\tau^2}\tau_t^1(A).$$

Пункт в) следует из б) и определения морфизмов Меллера для пары динамик τ^1, τ^2. ■

Наибольший интерес для нас будет представлять случай, когда динамики τ_t^1, τ_t^2 совпадают с τ_t^0 или τ_t^V. Для этого специального случая введем следующее определение.

Определение 2.3 ([83]). Прямыми морфизмами Меллера называются морфизмы Меллера для пары динамик (τ^0, τ^V), т. е. отображения $\gamma_\pm : \mathfrak{A}(\mathscr{H}) \to \mathfrak{A}(\mathscr{H})$, определяемые как пределы

$$\gamma_\pm(A) = \lim_{t\to\pm\infty} \tau^V_{-t}\,\tau^0(A),\ A\in\mathfrak{A}\ (\mathscr{H}), \tag{2.1.8}$$

если пределы существуют.

Обратными морфизмами Меллера называются морфизмы Меллера для пары динамик (τ^V, τ^0), т. е. отображения $\gamma_\pm : \mathfrak{A}(\mathscr{H}) \to \mathfrak{A}(\mathscr{H})$, определяемые как пределы

$$\hat{\gamma}_\pm(A) = \lim_{t\to\pm\infty} \tau^0_{-t}\tau^V_t(A), \quad A\in\mathfrak{A}(\mathscr{H}), \tag{2.1.9}$$

если пределы существуют.

Утверждение 2.3 ([83]) (Метод Кука). Если существует плотное по норме подмножество $\mathfrak{A}^0 \subseteq \mathfrak{A}$, такое, что для всех $A \in \mathfrak{A}^0$ существует $R \geqslant 0$ такое, что

$$\| [\tau^1_t(V), A] \| \in L_1((-\infty, -R] \cup [R, \infty)), \tag{2.1.10}$$

то $\gamma_\pm^{\tau^1,\tau^2}(A)$ существуют для любого $A\in\mathfrak{A}$.

Доказательство. Интегрируя обе части равенства (2.1.2), после замены времени $t \to -t$ от t_1 до t_2, получаем

$$\tau^2_{-t_2}\tau^1_{t_2}(B) - \tau^2_{-t_1}\tau^1_{t_1}(B) = i\int_{t_1}^{t_2} \tau^2_{-t}\tau^1_t([\tau^1_{-t}(V), B])\,dt.$$

Откуда

$$\| \tau^2_{-t_2}\tau^1_{t_2}(B) - \tau^2_{-t_1}\tau^1_{t_1}(B) \| \leqslant \int_{t_1}^{t_2} \| [\tau^1_{-t}(V), B] \|\, dt < \infty,$$

так как τ^2_t и τ^1_t сохраняют норму.

Следовательно для всех $B\in\mathfrak{A}^0$ $\gamma_\pm^{\tau^1,\tau^2}(B)$ существуют. Так как

$$\| \gamma_\pm(B) \| = \| B \| \quad \forall B\in\mathfrak{A}^0,$$

то, как легко видеть, пределы для $\gamma_\pm$ существуют на всей C^*-алгебре $\mathfrak{A}$. ■

§ 2.2. Существование прямых морфизмов Меллера при ограниченных возмущениях свободной динамики

В $\mathfrak{A}(\mathscr{H})$ плотной $*$-подалгеброй является множество $\mathfrak{A}^0(\mathscr{H})$ конечных линейных комбинаций мономов от операторов рождения-уничтожения от функций, преобразования Фурье которых из $C_0^\infty(\mathbf{R}^\nu)$.

Рассмотрим в алгебре $\mathfrak{A}(\mathscr{H})$ C^*-подалгебру $\mathfrak{A}_e(\mathscr{H})$, порождаемую полиномами от четного в сумме числа операторов рождения и уничтожения. Элементы C^*-подалгебры $\mathfrak{A}_e(\mathscr{H})$ мы будем в дальнейшем называть четными. В $\mathfrak{A}_e(\mathscr{H})$ плотной $*$-подалгеброй является множество $\mathfrak{A}_e^0(\mathscr{H}) = \mathfrak{A}^0(\mathscr{H}) \cap \mathfrak{A}_e(\mathscr{H})$.

В этом параграфе мы докажем, что на множестве четных самосопряженных элементов C^*-алгебры $\mathfrak{A}(\mathscr{H})$ существует всюду плотное подмножество, для которого существуют прямые морфизмы Меллера.

Введем следующие классы гладких ограниченных взаимодействий. Пусть $V=V^*$ и V имеет вид

$$V=\sum_{l=1}^{d} V_l.$$

$$V_l=\sum_{k=1}^{M_l} c_k a^*\left(f_{l,1}^{(k)}\right)\ldots a^*\left(f_{l,m_l}^{(k)}\right) a\left(f_{l,m_l+1}^{(k)}\right)\ldots a\left(f_{l,m_l+n_l}^{(k)}\right), \quad (2.2.1)$$

где d, M_l — конечны, $m_l+n_l>0$, $\hat{f}_{l,j}^{(k)} \in C_0^\infty(\mathrm{R}^\nu)$ для всех i, j, k.

Скажем, что $V \in \mathscr{A}_e^0$, если в (2.2.1) для всех i m_l+n_l — четны, и, соответственно, $V \in \mathscr{A}^0$ если для всех i $m_l>0$, $n_l>0$.

Очевидно, что оба класса принадлежат $\mathfrak{A}^0(\mathscr{H})$, причем $\mathscr{A}_e^0 \subseteq \mathfrak{A}_e^0(\mathscr{H})$.

Замечание. Все дальнейшие результаты будут верны и для более широких классов гладких ограниченных взаимодействий $\mathscr{A}$, $\mathscr{A}_e$. В этом случае $V=V^*$ имеет вид

$$V=\sum_{l=1}^{d}\int \mathscr{V}_l(x_1,\ldots,x_{m_l}, x_{m_l+1},\ldots,x_{m_l+n_l})\, a^*(x_1)\ldots$$

$$\ldots a^*(x_{m_l})\, a(x_{m_l+1})\ldots a(x_{m_l+n_l})\, dx_1\ldots dx_{m_l+n_l} \quad (2.2.1)'$$

$$\mathscr{V}_l \in S\left(\mathrm{R}^{\nu(m_l+n_l)}\right), \quad m_l+n_l>0.$$

Если m_i+n_i — четны для всех i, то $V \in \mathscr{A}_e$. Если же $m_i>0$, $n_i>0$, то $V \in \mathscr{A}$.

Все теоремы этой и следующих глав мы будем в основном доказывать только для взаимодействий из $\mathscr{A}_e^0$, $\mathscr{A}^0$, и лишь кратко будем отмечать особенности доказательств для взаимодействий из $\mathscr{A}_e$, $\mathscr{A}$, соответственно.

Обозначим в (2.2.1) и в (2.2.1)$'$, соответственно,

$$m_{\max}=\max_l m_l=\max_l n_l,$$

$$m_{\min}=\min_l m_l=\min_l n_l.$$

Введем также класс $\mathbf{H}$ одночастичных гамильтонианов. Скажем, что $h \in \mathbf{H}$, если h в Фурье представлении есть оператор умножения на функцию $h(k)$, $h \in C^\infty(\mathbf{R}^\nu)$, $k \in \mathbf{R}^\nu$, причем сама функция и ее первые две производные ограничены некоторым полиномом на $\mathbf{R}^\nu$, и

$$\operatorname{dist}(\bar{S}_h, G_h) > 0,$$
$$\operatorname{mes} S_h = \operatorname{mes} G_h = 0,$$

где $S_h = \{k: \nabla h(k) = 0\}$ — множество стационарных точек функции h, а G_h множество тех $k \in \mathbf{R}^\nu$, где матрица ее вторых производных вырождена.

Заметим, что в класс $\mathbf{H}$ вошли одночастичные нерелятивистские гамильтонианы $-\Delta + \mu$, $\mu \in \mathbf{R}$, в $\mathbf{R}^\nu$ и на решетке $\mathbf{Z}^\nu$, а также релятивистский гамильтониан $\sqrt{-\Delta + m^2}$, $m > 0$.

Будем в дальнейшем считать, что свободная динамика τ_t^0 порождена одночастичным гамильтонианом h из класса $\mathbf{H}$.

Теорема 2.4 (Существование прямых морфизмов Меллера). Пусть $\nu \geq 1$, тогда для $V = V^* \in \mathscr{A}_e$ существуют морфизмы

$$\gamma_\pm(A) = \lim_{t \to \pm\infty} \tau^V_{-t} \tau^0_t(A) \ \forall A \in \mathfrak{A}(\mathscr{H}).$$

Замечание. Существование морфизмов Меллера впервые было доказано Робинсоном в [83] и обобщено Эвансом [44].

Доказательство. Случай $\nu = 1$, 2 немного отличается от случая $\nu \geq 3$.

Пусть $\nu \geq 3$. В силу критерия Кука нам достаточно указать плотное подмножество $\mathfrak{A}^0 \subseteq \mathfrak{A}(\mathscr{H})$, для которого выполнено условие (2.1.10).

Пусть $\mathfrak{A}^0 = \mathfrak{A}^0(\mathscr{H})$, то есть

$$\mathfrak{A}^0 = \{a^*(f_1) \dots a^*(f_m) a(g_1) \dots a(g_n),\quad m, n \geqslant 0,\ \hat{f}_i,\ \hat{g}_j \in C_0^\infty(\mathbf{R}^\nu)\}.$$

Если мы докажем выполнение условия (2.1.10) для $A = a^\#(f)$, где $\hat{f} \in C_0^\infty(\mathbf{R}^\nu)$ — произвольная функция, то, в силу того, что $\tau^V_{-t}\tau^0_t$ есть $*$-автоморфизм для любого фиксированного $t \in \mathbf{R}$, будет следовать существование $\gamma_\pm(A)$ для всех $A \in \mathfrak{A}^0$.

Пусть $A = a(f)$. Имеем

$$\|[\tau^0_t(V), A]\| = \|[\tau^0_{-t}(A), V]\| \leqslant \|[a(e^{-ith}f), V]\| =$$

$$= \Big\| \sum_{l=1}^{d} \sum_{k=1}^{M_l} \sum_{j=1}^{m_l} (-1)^{j-1} (f^{(k)}_{l,j}, e^{-ith}f)\, a^*(f^{(k)}_{l,1}) \dots a^*(\check{f}^{(k)}_{l,j}) \dots$$

$$\dots a^*(f^{(k)}_{l,m_l})\, a(f^{(k)}_{l,m_l+1}) \dots a(f^{(k)}_{l,m_l+n_l}) \Big\| \leqslant \frac{C(V, f)}{(1+|t|)^{\nu/2}}, \qquad (2.2.2)$$

так как в силу теоремы о стационарной фазе (см., например, [77])

$$|(f^{(k)}_{l,j}, e^{-ith}f)| \leqslant \frac{C(f, f^{(k)}_{l,j})}{(1+|t|)^{\nu/2}}, \qquad (2.2.3)$$

где $C\left(f, f_{i,j}^{(k)}\right)$ — некоторая константа, и

$$C(V, f)=\sum_{i=1}^{d}\sum_{k=1}^{M_l}\sum_{j=1}^{m_l}|c_k|\,C\left(f, f_{i,j}^{(k)}\right)\prod_{l\neq j}^{m_l+n_l}\|f_{i,l}^{(k)}\|<\infty. \quad (2.2.4)$$

Так в выражении (2.2.2) справа стоит функция из $L_1(\mathbf{R})$, то в силу критерия Кука $\gamma_\pm(a(f))$ существует. Случай $a=a^*(f)$ разбирается аналогично.

Для $\nu=1, 2$ плотное подмножество $\mathfrak{A}^0$ в $\mathfrak{A}(\mathscr{H})$ выберем следующим образом:

$$\mathfrak{A}^0=\{a^*(f_1)\ldots a^*(f_m)a(g_1)\ldots a(g_n),\ m, n\geqslant 0,$$
$$\hat{f}_i,\ \hat{g}_j\in C_0^\infty(\mathbf{R}^\nu\setminus\{S_h\})\}.$$

Для функции $\hat{f}\in C_0^\infty(\mathbf{R}^\nu\setminus\{S_h\})$ с помощью q-кратного интегрирования по частям при $|t|\geqslant 1$ получаем оценку

$$\left|\left(f, e^{ith}f_{i,j}^{(k)}\right)\right|\leqslant\frac{C_q\left(f, f_{i,j}^{(k)}\right)}{|t|^q}, \quad (2.2.5)$$

где константа $C_q\left(f, f_{i,j}^{(k)}\right)>0$ зависит еще от q. Если взять $q\geqslant 2$, то мы получим в (2.2.4) функцию из $L_1(\mathbf{R}\setminus[-1, 1])$.

Теорема 2.4 доказана для взаимодействий из $\mathscr{A}_e^0$. Чтобы доказать теорему 2.4 для $V\in\mathscr{A}_e$, заметим, что нам достаточно проверить лишь оценку (2.2.4).

Для этого нам достаточно $V\in\mathscr{A}_e$ представить в следующем виде

$$V=\sum_{i=1}^{d}\sum_{N_1}\ldots\sum_{N_{m_l+n_l}}C_l(N_1, \ldots, N_{m_l+n_l})a^*(e_{N_1})\ldots$$
$$\ldots a^*(e_{N_{m_l}})a^*(e_{N_{m_l+1}})\ldots a^*(e_{N_{m_l+n_l}}), \quad (2.2.6)$$

где $\|e_N\|=1$, $e_N\in C_0^\infty(\mathbf{R}^\nu)$, N_j пробегают некоторое счетное множество $\mathscr{N}$, причем

$$\sum_{i=1}^{d}\sum_{N_1}\ldots\sum_{N_{m_l+n_l}}|C_l(N_1, \ldots, N_{m_l+n_l})|<\infty \quad (2.2.7)$$

и для любых $N, N'\in\mathscr{N}$ и $f\in C_0^\infty(\mathbf{R}^\nu)$ имеют место оценки

$$|(e_N, e^{-ith}f)|\leqslant\frac{C(f)}{(1+|t|)^\delta}; \quad (2.2.8)$$

$$|(e_N, e^{-ith}e_{N'})|\leqslant\frac{C}{(1+|t|)^\delta}, \quad (2.2.9)$$

где $C(f)$ — некоторая константа, зависящая только от f, а C, δ — абсолютные константы, причем $\delta>1$.

Легко видеть, что из (2.2.6), (2.2.7), (2.2.8) и (2.2.9) следует оценка (2.2.4).

Докажем, что $V \in \mathcal{A}_\varepsilon$ представимо в виде (2.2.6).

Пусть сначала преобразования Фурье ядер $\mathcal{V}_l$

$$\hat{\mathcal{V}}_l \in C_0^\infty(R^{\nu(m_l+n_l)}),$$

тогда можно выбрать $\mathcal{N}$ так, что

$$\operatorname{supp} \hat{\mathcal{V}}_l \subseteq [-\mathcal{N}, \mathcal{N}]^{\nu(m_l+n_l)} \text{ для любого } l.$$

Пусть

$$e_n(k) = \frac{\varkappa(k)\exp(2\pi i n k/A)}{d_n}, \quad k \in \mathrm{R}, \tag{2.2.10}$$

где функция $\varkappa(k)$ из $C_0^\infty(R)$, $0 \leqslant \varkappa(k) \leqslant 1$, $\varkappa(k) = 1$ для $|k| \leqslant B$ и $\varkappa(k) = 0$ для всех $|k| \geqslant B+1$. Константы d_n выбраны так, чтобы было $\|e_n\| = 1$.

Выберем A и B так, что $\mathcal{N} < B < 2\mathcal{N} < A$,

$$\hat{\mathcal{V}}_l = \sum_{\overline{N}} C_l(\overline{N}) \prod_{j=1}^{D_l} e_{n_j}(k_j), \tag{2.2.11}$$

где $\overline{N} = (n_1, \ldots, n_{D_l})$, $D_l = \nu(m_l + n_l)$. Очевидно, что для любого q существует константа $C(q)$ такая, что

$$|C_N| \leqslant \frac{C(q)}{|\overline{N}|^q}, \quad |\overline{N}| = \sum_l |n_l|. \tag{2.2.12}$$

Очевидно, что при $q > D_l$ имеет место оценка

$$\sum_{\overline{N}} |C_{\overline{N}}| < \infty.$$

Для функций

$$e_N = \prod_{j=1}^{\nu} e_{n_j}(k_j), \quad e_{N'} = \prod_{j=1}^{\nu} e_{n'_j}(k_j)$$

равномерно по N, $N' \in Z^\nu$, t, $t' \in \mathrm{R}$ выполнены оценки:

$$\text{а) } |(e_N, e^{-ith} e_{N'})| \leqslant \frac{C}{(|t|+1)^{\nu/2-\delta'}}; \tag{2.2.13}$$

$$\text{б) } |(e_N, e^{-ith} f)| \leqslant \frac{C(f)}{(1+|t|)^{\nu/2-\delta'}}, \tag{2.2.14}$$

где константу $\delta' > 0$ можно сделать сколь угодно малой, $C = C(\nu, \delta')$, $C(f) = C(f, \nu, \delta')$. Выбрав $\delta = \nu/2 - \delta' > 1$ при $\nu \geqslant 3$, $\delta' < \frac{1}{2}$ в (2.2.13) и (2.2.14) мы получим неравенства (2.2.8) и (2.2.9).

Если же $\hat{\mathscr{V}}_l \in S(R^{\nu(m_l+n_l)})$, то воспользуемся разложением единицы

$$\sum_{\bar{k}} \alpha_{\bar{k}}(k)=1, \qquad (2.2.15)$$

где $\operatorname{diam}\operatorname{supp}\alpha_{\bar{k}} \leqslant \mathrm{const}$ равномерно по $\bar{N}$.

Затем представляем ядро $\hat{\mathscr{V}}_l$ в виде суммы $\hat{\mathscr{V}}_l\alpha_{\bar{k}}$ финитных ядер и используя аналогичное (2.2.6) разложение для $\hat{\mathscr{V}}_l\alpha_{\bar{k}}$, с соответствующим образом сдвинутыми функциями $e_{\bar{k}}$, повторяем доказательство.

Теорема 2.4 полностью доказана. ■

§ 2.3. Обратимость морфизмов Меллера при малых ограниченных возмущениях свободной динамики

Для доказательства обратимости прямых морфизмов Меллера достаточно доказать существование обратных морфизмов Меллера. Как и в случае волновых операторов, доказать существование обратных морфизмов Меллера оказывается значительно труднее, чем существование прямых морфизмов Меллера.

Теорема 2.5 ([26]). (Обратимость прямых морфизмов Меллера). Пусть $\nu \geqslant 3$, тогда для $V=V^* \in \mathscr{A}_e$ существует $\varepsilon>0$ такое, что при $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$, $\varepsilon \in \mathbf{R}$, существуют и обратимы прямые морфизмы Меллера

$$\gamma_\pm(A)=\lim_{t\to\pm\infty} \tau_{-t}^{\varepsilon V}\tau_t^0(A), \ \forall A \in \mathfrak{A},$$

причем

$$\tau_t^{\varepsilon V}=\gamma_\pm \circ \tau_t^0 \circ \gamma_\pm^{-1} \ \forall\, t \in \mathbf{R}. \qquad (2.3.1)$$

Следствие. Пусть $\nu \geqslant 3$, тогда для $V=V^* \in \mathscr{A}_e$ существует $\varepsilon_0>0$ такое, что при $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$, $\varepsilon \in \mathbf{R}$, C^*-динамические системы $(\mathfrak{A}(\mathscr{H}), \tau_t^0)$ и $(\mathfrak{A}(\mathscr{H}), \tau_t^{\varepsilon V})$ эквивалентны.

Прежде чем доказывать теорему 2.5, сделаем два замечания.

Замечание 1. В отличие от прямых морфизмов Меллера, обратные могут не существовать при $\nu=1, 2$ ([66]) при сколь угодно малом значении константы связи ε. Соответствующий пример можно построить следующим образом.

Пример. Пусть $V=-a^*(f_0)a(f_0)$, тогда $\tau_t^{\varepsilon V}$ — тоже свободная динамика, порожденная оператором $h_\varepsilon=h+\varepsilon P_0$, где P_0 — проектор на вектор $-f_0$. При $A=a^\#(f)$ обратные мор физмы Меллера выглядят так

$$\hat{\gamma}_\pm(A) = \lim_{t\to\pm\infty} \tau^0_{-t}\tau^{\varepsilon V}_t(a^\#(f)) = \lim_{t\to\pm\infty} a^\#(e^{-ith}e^{ith_\varepsilon}f) = \\ = a^\#(\hat{W}_\pm f), \tag{2.3.2}$$

где $\hat{W}_\pm$ — есть обычные обратные волновые операторы. Хорошо известно, что если $h = -\Delta$, а функция f_0 такова, что $\hat{f}_0 \in C_0^\infty(\mathbf{R}^\nu)$ и

$$\int_{\mathbf{R}^\nu} \hat{f}_0(k)\,dk < 0, \tag{2.3.3}$$

то у оператора h_ε есть собственное значение $\lambda_\varepsilon < 0$ при сколь угодно малом ε с собственным вектором e_ε. Поэтому $\hat{W}_\pm(e_\varepsilon)$ не существует, а следовательно не существует и $\hat{\gamma}_\pm(a^\#(e_\varepsilon))$.

Замечание 2. В теореме 2.3. при $\nu \geqslant 3$ требуется малость параметра связи, и это по существу, так как при больших значениях константы связи ε могут возникать связанные состояния. Предыдущий пример при $\nu \geqslant 3$ и больших $|\varepsilon|$, как легко видеть, демонстрирует указанное явление.

Доказательство. По критерию Кука и в силу замечания при доказательстве теоремы 2.4 для существования $\hat{\gamma}_+$ нам достаточно доказать, что

$$\| [\tau^{\varepsilon V}_t(V), a^\#(f)] \| \in L_1(\mathbf{R}_+),$$

то есть, что

$$\int_0^\infty \| [\tau^{\varepsilon V}_t(V), a^\#(f)] \| < \infty$$

для всех $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^\nu)$.

Имеем

$$\int_0^\infty \| [\tau^{\varepsilon V}_t(V), a^\#(f)] \|\, dt \leqslant \int_0^\infty \| [\tau^0_t(V), a^\#(f)] \|\, dt +$$

$$+ \sum_{n=1}^\infty |\varepsilon|^n \int_0^\infty \int_{\Delta^t_n} \| [a^\#(f), [\tau^0_{s_1}(V), [\ldots[\tau^0_{s_n}(V), \tau^0_t(V)]\ldots]]] \|\, ds_1 \ldots$$

$$\ldots ds_n dt.$$

Лемма 2.6. В условиях теоремы 2.5 существует константа $C = C(V, \nu) > 0$, независящая от f и константа $C(f, V) >$, такие, что имеют место оценки:

$$\text{а)}\quad \int_0^\infty \| [\tau_s^0(V), a^\#(f)] \| ds \leqslant CC(f, V) \tag{2.3.5}$$

$$\text{б)}\quad \int_0^\infty \int_{\Delta_n^s} \| [a^\#(f), [\tau_{s_1}^0(V), [\tau_{s_2}^0(V), [\ldots [\tau_{s_n}^0(V), \tau_s^0(V)]\ldots]]] \| ds_1 \ldots$$

$$\ldots ds_n ds \leqslant C^{n+1} C(f, V). \tag{2.3.6}$$

Замечание. Очевидно, что из леммы 2.6 при $\varepsilon_0 = \frac{1}{C}$ следует теорема 2.5.

Доказательство леммы 2.6. Рассмотрим n-ый член ряда. Мы сначала оценим подинтегральное выражение (2.3.6) некоторой суммой

$$\| [a^\#(f), [\tau_{s_1}^0(V), [\ldots [\tau_{s_n}^0(V), \tau_s^0(V)] \ldots]] \| \leqslant \sum_G W_G(s_1, \ldots, s_n, s),$$

где $\sum\limits_G$ берется по всем допустимым диаграммам с весом W_G. Допустимые диаграммы G и их вес мы опишем ниже. А затем уже оценим

$$\int_0^\infty \int_{\Delta_n^s} \sum_G W_G(s_1, \ldots, s_n, s)\, ds_1 \ldots ds_n ds \leqslant C^{n+1} C(f, V)$$

с помощью новой техники оценки суммы диаграмм.

Сопоставим каждому s_i, $i=0, 1, \ldots, n+1$, где $s_{n+1} \equiv s$, $s_0 \equiv 0$, вершину с номером $n+1-i$.

Имеем

$$\tau_{s_v}^0(V) = \sum_{l=1}^{d} \sum_{k=1}^{M_l} c_k a^*(e^{is_v h} f_{l,l_1}^{(k_v)}) \ldots a^*\left(e^{is_v h} f_{l,m_l}^{(k_v)}\right) a\left(e^{is_v h} f_{l,m_l+1}^{(k_v)}\right) \ldots$$

$$\ldots a\left(e^{is_v h} f_{l,m_l+n_l}^{(k_v)}\right). \tag{2.3.7}$$

Рассмотрим выражение под интегралом. Это есть $(n+1)$-кратный коммутант. Мы будем его раскрывать последовательно, за $(n+1)$ шагов.

На первом шаге в самом внутреннем коммутанте $[\tau_{s_n}^0(V), \tau_s^0(V)]$ будем с помощью канонических антикоммутационных соотношений «протаскивать» вправо операторы рождения и уничтожения, относящиеся к $\tau_{s_n}^0(V)$, т. е. вида

$$a^\#\left(e^{is_n h} f_{l,j}^{(k_1)}\right)$$

«сквозь» оператор $\tau_s(V)$. Иначе говоря, мы используем формулы

$$a(f)a(g)=-a(g)a(f),$$
$$a(f)a^*(g)=-a^*(g)a(f)+(f,g)I,$$

или аналогичные — для $a^*(f)$. При этом «протаскивании» будут возникать множители вида

$$\left(e^{is_n h} f_{i,j}^{(k_1)},\ e^{ish} f_{i',j'}^{(k_0)}\right) \tag{2.3.8}$$

или сопряженные к ним. Причем такое «протаскивание» мы делаем поочередно: сначала $\tau^0_{s_n}(v)$ «протаскиваем» через самый левый оператор рождения-уничтожения в $\tau^0_s(V)$. Если возникло спаривание, дальнейшее «протаскивание» $\tau^0_{s_n}(V)$ через $\tau^0_s(V)$ прекращаем и говорим, что возникло «ребро» с вкладом (2.3.8). Если же спаривание не произошло, то $\tau^0_{s_n}(V)$ «протаскиваем» через следующий оператор рождения-уничтожения в $\tau^0_s(V)$ и т. д. Заметим, что в силу четности V члены, в которых не возникло спариваний, сократятся, так как войдут в выражение для коммутанта

$$W_1=[\tau^0_{s_n}(V),\ \tau^0_s(V)]$$

с разными знаками. Таким образом, на первом шаге возникло ровно одно ребро.

Далее, таким же образом представим следующий коммутант $[\tau^0_{s_{n-1}}(V), W_1]$, т. е. с помощью аналогичной процедуры «протаскивания» операторов рождения-уничтожения вида

$$a^{\#}\left(e^{is_{n-1}h} f_{i,j}^{(k_2)}\right)$$

«сквозь» W_1. На втором шаге возникнут множители вида

$$\left(e^{is_{n-1}h} f_{i,j}^{(k_2)},\ e^{ish(k_0)}_{f_{i',j'}}\right) \text{ или } \left(e^{is_{n-1}h} f_{i,j}^{(k_{n-1})},\ e^{is_n h} f_{i',j'}^{(k_n)}\right)$$

и тоже только одно ребро.

И так далее до $(n+1)$-го шага, когда мы будем «протаскивать» оператор $a^{\#}(f)$.

На v-ом шаге возникнет ребро, причем ему будет соответствовать множитель вида

$$r_v=\left(e^{is_v h} f_{i,j}^{(k_v)},\ e^{is_{v'}h} f_{i',j'}^{(k_{v'})}\right), \tag{2.3.9}$$

где $v'=v'(v)>v$.

Очевидно, что для всех $1\leqslant i,\ j,\ i',\ j'\leqslant d$, $0\leqslant v\leqslant n+1$ имеет место оценка

$$|r_v|\leqslant\frac{C}{(|s_v-s_{v'(v)}|+1)^\delta}, \tag{2.3.10}$$

где $\delta=\nu/2-\delta'>0$, δ' — сколь угодно малая константа, $C>0$ не зависит от $i,\ j,\ i',\ j',\ s_v,\ s_{v'},\ k_v,\ k_{v'}$.

Диаграмма — это граф с вершинами $n+1, n, \ldots, 1, 0$. Ребро графа между вершинами v и v' возникает при нашей процедуре «протаскивания» вместе с множителем

$$\frac{C}{(|s_v-s_{v'(v)}|+1)^\delta}. \qquad (2.3.10)$$

Все возникшие в результате диаграммы назовем допустимыми.

Из каждой вершины v выходит ровно одно ребро вправо, которое спаривается с вершиной $v'(v)<v$, причем в каждой вершине не более $2m_{\max}$ выходящих влево ребер. По построению каждая допустимая диаграмма связана. Обозначим множество всех допустимых диаграмм через $\mathbf{G}$.

Каждая диаграмма входит в выражение (3.3.6) со своим

Вес диаграммы. Пусть множество ребер $\{(v, v'(v))\}$ соответствует допустимой диаграмме G, тогда ее вес определяется формулой

$$W_G=C^n\prod_v\frac{1}{(|s_v-s_{v'(v)}|+1)^\delta}.$$

Из оценки (2.3.10), после замены переменных в каждом слагаемом, следует, что n-ый член ряда оценивается как

$$\int\limits_{\Delta_{n+1}^\infty} C^n\left[\sum_{\{v'(v)\}\in\mathbf{G}^{n+1}}\prod_v\frac{1}{(|s_v-s_{v'(v)}|+1)^\delta}\right]ds_1\ldots ds_{n+1}, \qquad (2.3.11)$$

где каждому v соответствует единственное $v'(v)>v$, и сумма Σ берется по всем наборам $\{v'(v),\ v=1, \ldots, n+1\}$ таким, что среди чисел $\{v'(1), \ldots, v'(n+1)\}$ не более чем $2m_{\max}$ совпадающих с l, где l принимает значения $0, 1, \ldots, n$.

Для оценки суммарного вклада всех диаграмм воспользуемся следующей леммой:

Лемма 2.7. Пусть $g\in L_1(\mathbf{R})$, $g(t)\geqslant 0$ для всех $t\in\mathbf{R}$. Тогда для всех n имеет место следующая оценка

$$\int\limits_{\Delta_n^\infty}\left[\sum_{\{v'(v)\}\in\mathbf{G}^n}\prod_v g(t_v-t_{v'(v)})\right]ds_1\ldots ds_n\leqslant C^n\left[\int\limits_{\mathbf{R}}g(t)\,dt\right]^n, \qquad (2.3.12)$$

где сумма Σ берется по всем наборам допустимых диаграммам, а константа $C>0$ не зависит от n.

Очевидно, что из оценок (2.3.11) и (2.3.12) следует теорема 2.5.

Доказательство леммы. Доказательство оценки (2.3.12) аналогично доказательству оценки (4.1) работы [26], где она доказана для случая $m_{\min}=m_{\max}=2$,

$$g(t)=\frac{1}{(1+|t|)^{\nu/2}}.$$

Рассмотрим римановы суммы обеих частей неравенства (2.3.12) и докажем, что это неравенство верно при любом $d>0$ для римановых сумм, где d есть шаг аппроксимации

$$d^n\left[\sum_{0<t_1<\ldots<t_n}\sum_{\{v'(v)\}}\prod_v g(t_v-t_{v'(v)})\right]\leqslant$$

$$\leqslant d^nC^n\left[\sum_{s\neq 0}g(s)\right]^n\leqslant d^nC^n\left[\sum_{s_1\neq 0}\ldots\sum_{s_{n+1}\neq 0}\prod_{i=1}^{n}g(s_i)\right]. \quad (2.3.13)$$

Суммы в неравенстве (2.3.13) берутся по всем t_i, s_i, $s_i\in\mathbf{Z}_d$, где $\mathbf{Z}_d$ одномерная решетка с шагом $d>0$.

Покажем с помощью некоторого алгоритма, что для любого набора $(s_0, \ldots, s_n)$, $s_0=0$ из суммы в правой части неравенства (2.3.13) можно отнести не более C^n возможных диаграмм из левой части с вкладом

$$g(s_1)\ldots g(s_n).$$

Алгоритм будет состоять не более чем из $2m_{\max}\,n$ шагов. Мы будем нумеровать шаги

$$(1,1), \ldots, (1,2m_{\max}), \ldots, (n,1), \ldots, (n,2m_{\max}).$$

На шаге $(1,1)$ мы возьмем s_1 и построим ребро из 1-ой вершины в s_1. Мы построили вершины $1, s_1$ и ребро между ними. Далее действуем по индукции. Пусть линии длины $s_1, \ldots, s_q$ построены и следующий шаг (i, j). Далее действуем по правилам.

Правила алгоритма будут следующие.

1. На каждом шаге мы строим либо одно ребро, либо не строим ни одного ребра, и соответственно, одну или ни одной вершины.

2. Если на шаге (i, j) мы решаем не строить ребро, то на следующих шагах (i, j'), $j'>j$ мы также не строим ребер.

3. На шаге $(i, 1)$ мы выбираем одну из построенных уже вершин v_i и на следующих шагах $(i, 1), \ldots, (i, 2m_{\max})$ мы можем строить ребра только из вершины v. При этом мы будем называть вершину v_1 «использованной» на шаге $(i, 1)$.

4. Выбор вершины v_i определяется однозначно с помощью следующего правила: v_i первая (с наименьшим номером) из уже построенных вершин, но не «использованных» на предыдущих шагах, исключая нулевую вершину; если все построенные вершины являются «использованными», то выбирается непостроенная вершина с наименьшим номером, исключая нулевую вершину.

5. Алгоритм останавливается или на шаге $(n, 2m_{\max})$, или, если нет неиспользованных вершин, все n ребер построены, т. е. все $s_1, \ldots, s_n$ исчерпаны. Очевидно, что каждая диаграмма G будет построена алгоритмом и каждый набор $s_1, \ldots, s_n$ будет использован не более чем C^n раз, где C зависит от $m_{\max}$,

так как на шагах $(i, 1), \ldots, (i, 2m_{\max})$ при каждом i, $1 \leqslant i \leqslant n$ алгоритм имеет следующие разветвления:

а) ребро ведется либо вправо, либо влево;

б) в v_i-ой вершине на этих шагах строится не более $2m_{\max}$ ребер;

в) Если ребро ведется вправо, то мы можем либо попасть в нулевую вершину, либо нет.

При $d \to 0$ из неравенства (2.3.13) следует неравенство (2.3.12).

Лемма 2.7 доказана и, следовательно, доказана теорема 2.5. для взаимодействий из $\mathscr{A}_e^0$. ■

Для обобщения доказательства теоремы 2.6 на класс $\mathscr{A}_e$ легко видеть, что достаточно $V \in \mathscr{A}_e$ представить в виде (2.2.6) так, чтобы были выполнены оценки (2.2.7), (2.2.8), (2.2.9), что и было показано в параграфе 2.2. Теорема 2.5 полностью доказана. ■

§ 2.4. Унитарная эквивалентность гамильтонианов свободного и ограниченно возмущенного ферми-газа *в основном состоянии*

Рассмотрим свободный и ограниченно возмущенный ферми-газ в основном состоянии, т. е. при $\beta = +\infty$. Основное состояние $\langle\ \rangle$ задается следующим образом

$$\langle A \rangle = (A\Omega, \Omega). \tag{2.4.1}$$

Докажем следующую теорему.

Теорема 2.8. Пусть $\mathscr{H} = L_2(\mathbf{R}^\nu, dx)$, $H_0 = d\Gamma(h)$, $H_\varepsilon = H_0 + \varepsilon V$, где $h \in \mathbf{H}$, $V \in \mathscr{A}$. Тогда при $\nu \geqslant 3$ существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$ существуют и обратимы прямые волновые операторы

$$W_\pm = s - \lim_{t \to \pm\infty} e^{-it(H_0 + \varepsilon V)} e^{itH_0}, \tag{2.4.2}$$

причем

$$H_0 + \varepsilon V = W_\pm H_0 W_\pm^{-1}. \tag{2.4.3}$$

Замечание. Для взаимодействия $V \in \mathscr{A}_e$ утверждение теоремы 2.8 следует из теоремы 2.5. Действительно, в силу того, что в этом случае нет поляризации вакуума, т. е. $V\Omega = 0$, имеем

$$e^{it(H_0 + \varepsilon V)}\Omega = e^{itH_0}\Omega \equiv 0 \tag{2.4.4}$$

для всех $t \in \mathbf{R}$.

Поэтому, для

$$A = a^*(f_1) \ldots a^*(f_n), \quad \hat{f}_i \in C_0^\infty(\mathbf{R}^\nu) \tag{2.4.5}$$

предел

$$\lim_{t\to\pm\infty} e^{-it(H_0+\varepsilon V)}\, e^{itH_0} A\Omega =$$

$$= \lim_{t\to\pm\infty} e^{-it(H_0+\varepsilon V)} e^{itH_0} A e^{-itH_0} e^{it(H_0+\varepsilon V)}\Omega = \hat{\gamma}(A)\Omega \qquad (2.4.6)$$

существует в силу теоремы 2.5 при достаточно малых ε. А так как линейные комбинации векторов вида (2.4.5) плотны в $\mathcal{F}_a$, то существуют обратные волновые операторы. То же, очевидно, верно и для прямых волновых операторов.

Доказательство теоремы 2.8. В случае $V \in \mathcal{A}$ тоже нет поляризации вакуума, но мы не можем воспользоваться теоремой 2.5, так как в V могут содержаться нечетные мономы. Но мы воспользуемся идеей доказательства теоремы 2.5.

Пусть

$$\Phi_N = (\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_N, 0, \ldots), \quad \Phi_N \in \mathcal{F}_{a,0}, \quad \hat{\varphi}_l \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{\nu l}).$$

Обратный волновой оператор $\hat{W}_\pm \Phi_N$ можно представить в виде ряда теории возмущений

$$\hat{W}_\pm(t)\Phi_N = \Phi_N + \sum_{i=1}^{\infty} (-i\varepsilon)^n \int_{\Delta_n^{0,t}} dt_1 \ldots dt_n V(t_n) \ldots V(t_1)\Phi_N \qquad (2.4.6)$$

$$\hat{W}_\pm \Phi_N = \lim_{t\to\pm\infty} \hat{W}_\pm(t)\Phi_N,$$

где $\Delta_n^{0,t} = \{(t_1, \ldots, t_n),\ 0 < t_1 < \ldots < t_n < t\}$ и

$$V(t) = e^{itH_0} V e^{-itH_0}.$$

Выражение под интегралом является произведением виковских мономов и может быть представлено в виде суммы

$$V(t_1) \ldots V(t_n) = \sum_G V_G(t_1, \ldots, t_n) \qquad (2.4.7)$$

виковских мономов, индексируемых диаграммами Фридрихса G (см. § 3.1). Но таких диаграмм слишком много, и мы воспользуемся другим разложением. В этом новом разложении мы фактически проделаем частичное пересуммирование фридрихсовских диаграмм.

Сопоставим $V(t_v)$ вершину v некоторого графа и выделим в нем крайний справа оператор уничтожения вида

$$a(f^{(v)}(t_v)),$$

где

$$f^{(v)}(t_v) = e^{it_v h} f^{(v)},$$

который, пользуясь антикоммутационными соотношениями,

$$a(f^{(v)}(t_v))a^*(f^{(v')}(t_{v'}))=$$
$$=-a^*(f^{(v')}(t_{v'}))a(f^{(v)}(t_{v'})+(f^{(v')}(t_{v'}),\ f^{(v)}(t_v)) \quad (2.4.8)$$

будем переносить вправо к вакуумному вектору Ω.

При каждой такой перестановке возникает один из двух членов в правой части (2.4.6). Если возник первый член, мы продолжаем перенос, если возник второй, т. е. спаривание, то скажем, что возникла линия (v, v') диаграммы. Если в результате перестановок спаривание так и не возникло, то такой член даст нулевой вклад, так как $a(f)=0$ для всех $f\in\mathscr{H}$. Таким образом у нас возникнет ровно n линий $(v, v'(v))$, $v=1, \ldots, n$. При этом, если спаривание возникло с вектором Φ_N, то скажем, что $v'(v)=0$.

Очевидно, что

$$|(f^{(v')}(t_{v'}),\ f^{(v)}(t_v))|\leqslant C\frac{1}{(1+|t_v-t_{v'}|)^{\nu/2}}. \quad (2.4.9)$$

Рассмотрим возникший граф G с вершинами $n, n-1, \ldots, 1, 0$ и ребрами (линиями) $(v, v'(v))$, который по построению является связным. Обозначим класс всех таких графов через $\mathrm{G}_N{}^n$.

Заметим, что единственное отличие графов из $\mathrm{G}_N{}^n$ от соответствующих графов из G^n заключается в том, что в нулевую вершину может входить не одно, а много ребер, но не более чем N.

Нетрудно видеть, что в этом случае имеет место оценка

$$\|V(t_n)\ldots V(t_1)\Phi_N\|\leqslant$$
$$\leqslant C(\Phi_N)C^n\left(\sum_{\{v'(v)\}\in\mathrm{G}_N^n}\prod_v\frac{1}{(|t_v-t_{v'(v)}|+1)^\delta}\right),\quad \delta>1. \quad (2.4.10)$$

Лемма 2.7′. Пусть $g\in L_1(\mathbf{R})$, $g(t)\geqslant 0$ для всех $t\in\mathbf{R}$. Тогда для всех n имеет место следующая оценка

$$\int_{\Delta_n^\infty}\left(\sum_{\{v'(v)\}\in\mathrm{G}_N^n}\prod_v g(t_v-t_{v'(v)})\right)ds_1\ldots$$
$$\ldots ds_n\leqslant N!\,C^n\left(\int_{\mathbf{R}}g(t)\,dt\right)^n, \quad (2.4.11)$$

где сумма Σ берется по всем наборам допустимых диаграмм, а константа C не зависит от n.

Доказательство леммы 2.7′ полностью аналогично доказательству леммы 2.7. ■

Из леммы 2.7′ следует теорема 2.8. ■

§ 2.5. Унитарная эквивалентность гамильтонианов свободного и ограниченно возмущенного ферми-газа в КМШ-состоянии

Рассмотрим свободный и ограниченно возмущенный ферми-газ в температурном состоянии, т. е. при $\beta \in \mathbf{R}$, $\beta \neq 0$.

Пусть $\mathscr{H} = L_2(\mathbf{R}^\nu, dx)$ и

$$h = -\Delta + \mu, \tag{2.5.1}$$

где $\mu \in \mathbf{R}$ — химический потенциал, $-\Delta$ — оператор Лапласа в $\mathscr{H}$.

Определим свободный ферми-газ и ферми-газ с ограниченным взаимодействием $V = V^* \in \mathfrak{A}(\mathscr{H})$ при температуре $\frac{1}{\beta}$.

Определение 2.4 (см. [28]). Свободный ферми-газ при температуре $\frac{1}{\beta}$ — это $(\mathfrak{A}(\mathscr{H}), \tau_t^0, \langle\ \rangle_0, \beta)$, где свободная динамика τ_t^0 порождена одночастичным гамильтонианом h вида (2.5.1), а $\langle\ \rangle_0$ — единственное (τ_t^0, β)-КМШ-состояние.

Определение 2.5 (см. [28]). Ферми-газ с ограниченным взаимодействием $V = V^* \in \mathfrak{A}(\mathscr{H})$ при температуре $\frac{1}{\beta}$ — это $(\mathfrak{A}(\mathscr{H}), \tau_t^V, \langle\ \rangle_V, \beta)$, где τ_t^V — ограниченно возмущенная динамика, а $\langle\ \rangle_V$ — единственное (τ_t^V, β)-КМШ-состояние, которое определяется через $\langle\ \rangle_0$ следующим образом:

$$\langle A \rangle_V = \frac{\langle F^* A F \rangle_0}{\langle F^* F \rangle_0}, \quad A \in \mathfrak{A}(\mathscr{H}), \tag{2.5.2}$$

где $F \in \mathfrak{A}(\mathscr{H})$ ([28]) и

$$F \overset{\text{def}}{=} e^{-\beta/2(H_0+V)} e^{\beta/2 H_0} =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \int_0^{\beta/2} \int_0^{s_1} \int_0^{s_{n-1}} \tau_{is_1}(V) \tau_{is_2}(V) \ldots \tau_{is_n}(V)\, ds_1 \ldots ds_n, \tag{2.5.3}$$

где ряд (2.5.3) сходится по норме

Определение 2.6. C^*-динамическая система $(\mathfrak{A}, \tau)$ называется $L_1(\mathfrak{A}^0)$ асимптотически абелевой, если

$$\int_{-\infty}^{\infty} \| [A, \tau_t(B)] \|\, dt < \infty \tag{2.5.5}$$

для любых A, B из плотной по норме в $\mathfrak{A}^*$-подалгебры $\mathfrak{A}^0$.

Между КМШ-состояниями и морфизмами Меллера существует следующая простая связь.

Утверждение 2.9 ([28]). Пусть $(\mathfrak{A}, \tau)$ является $L_1(\mathfrak{A}^0)$ асимптотически абелевой, тогда для любого $V = V^* \in \mathfrak{A}^0$ существуют прямые морфизмы Меллера

$$\gamma_\pm(A)=\lim_{t\to\pm\infty}\tau^V_{-t}\tau^0_t(A),\quad A\in\mathfrak{A}(\mathscr{H})$$

и если $\langle\ \rangle_V$ есть (τ^V_t,β)-КМШ-состояние при $\beta\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$, то и состояние $\langle\gamma_\pm(\circ)\rangle$ есть (τ_t,β)-КМШ-состояние.

Заметим, что $(\mathfrak{A}_e(\mathscr{H}),\tau^0_t)$ является $L_1(\mathfrak{A}^0_e(\mathscr{H}))$ асимптотически абелевой, где τ^0_t порождена одночастичным гамильтонианом h.

Теорема 2.10. Пусть $\nu\geqslant 3$, $\beta\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$ и $V=V^*\in\mathscr{A}_e$. Тогда существует $\varepsilon_0=\varepsilon_0(V,\nu)>0$ такое, что при $|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_0$ операторы H^0_{GNS} и $H^{\varepsilon V}_{\mathrm{GNS}}$ унитарно эквивалентны.

Доказательство. В силу теоремы 2.5 существует $\varepsilon_0=\varepsilon_0(V,\nu)>0$ такое, что при $|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_0$ существуют и обратимы морфизмы Меллера $\gamma_\pm$. Из утверждения 2.9 следует, что состояние $\langle\gamma_\pm(\circ)\rangle_{\varepsilon V}$ является (τ_t,β)-КМШ-состоянием на $\mathfrak{A}_e(\mathscr{H})$, но такое состояние единственно (см. [28]). А в силу калибровочной инвариантности $\langle\ \rangle_0$ и $\langle\ \rangle_{\varepsilon V}$ имеет место равенство

$$\langle\gamma_\pm(A)\rangle_{\varepsilon V}\equiv\langle A\rangle_0 \tag{2.5.6}$$

для всех $A\in\mathfrak{U}(\mathscr{H})$.

Определим оператор $U_\pm:\mathscr{H}^0_{\mathrm{GNS}}\to\mathscr{H}^{\varepsilon V}_{\mathrm{GNS}}$ следующим образом:

$$U_\pm(\pi_0(A)\Omega_0)=\pi_{\varepsilon V}(\gamma_\pm(A))\Omega_{\varepsilon V}, \tag{2.5.7}$$

где мы для краткости положили $\pi_0\equiv\pi_{\langle\ \rangle_0}$, $\pi_{\varepsilon V}\equiv\pi_{\langle\ \rangle_{\varepsilon V}}$, $\Omega_0\equiv\Omega_{\langle\ \rangle_0}$, $\Omega_{\varepsilon V}\equiv\Omega_{\langle\ \rangle_{\varepsilon V}}$.

Операторы $U_\pm$ унитарны. Действительно

$$(U_\pm\pi_0(A)\Omega_0,\ U_\pm\pi_0(B)\Omega_0)=(\pi_{\varepsilon V}(\gamma_\pm(A))\Omega_{\varepsilon V},\ \pi_{\varepsilon V}(\gamma_\pm(B))\Omega_{\varepsilon V})=$$
$$=\langle(\gamma_\pm(B))^*\gamma_\pm(A)\rangle_{\varepsilon V}=\langle\gamma_\pm(B^*A)\rangle_{\varepsilon V}=\langle B^*A\rangle_0=$$
$$=(\pi_0(A)\Omega_0,\pi_0(B)\Omega_0).$$

Очевидно, что $\operatorname{Ran}U_\pm=\mathscr{H}^{\varepsilon V}_{\mathrm{GNS}}$ и обратные операторы $U^{-1}_\pm$ задаются следующим образом:

$$U^{-1}_\pm(\pi_{\varepsilon V}(A)\Omega_{\varepsilon V})=\pi_0(\gamma^{-1}_\pm(A))\Omega_0) \tag{2.5.8}$$

для всех $A\in\mathfrak{A}(\mathscr{H})$.

По определению операторов H^0_{GNS} и $H^{\varepsilon V}_{\mathrm{GNS}}$

$$e^{itH^0_{\mathrm{GNS}}}\pi_0(A)\Omega_0=\pi_0(\tau^0_t(A))\Omega_0,$$

$$e^{itH^{\varepsilon V}_{\mathrm{GNS}}}\pi_{\varepsilon V}(A)\Omega_{\varepsilon V}=\pi_{\varepsilon V}(\tau^{\varepsilon V}_t(A))\Omega_{\varepsilon V}.$$

Откуда в силу того, что $\tau_t^{\varepsilon V}(A)=\gamma_\pm \tau_t^0 \gamma_\pm^{-1}$, имеем

$$U_\pm^{-1} e^{itH_{\mathrm{GNS}}^{\varepsilon V}} U_\pm \pi_0(A)\Omega_0 = U_\pm^{-1} e^{itH_{\mathrm{GNS}}^{\varepsilon V}} \pi_{\varepsilon V}(\gamma_\pm(A))\Omega_{\varepsilon V} =$$
$$= U_\pm^{-1} \pi_{\varepsilon V}(\tau_t^{\varepsilon V}(\gamma_\pm(A)))\Omega_{\varepsilon V} = \pi_0(\gamma_\pm^{-1}\tau_t^{\varepsilon V}\gamma_\pm(A))\Omega_0 =$$
$$= \pi_0(\tau_t^0(A))\Omega_0 = e^{itH_{\mathrm{GNS}}^0}\pi_0(A)\Omega_0.$$

Таким образом

$$e^{itH_{\mathrm{GNS}}^0} = U_\pm^{-1} e^{itH_{\mathrm{GNS}}^{\varepsilon V}} U_\pm, \quad \forall t \in \mathbf{R}. \tag{2.5.9}$$

И следовательно

$$U_\pm^{-1} H_{\mathrm{GNS}}^{\varepsilon V} U_\pm = H_{\mathrm{GNS}}^0. \ \blacksquare \tag{2.5.10}$$

Глава 3

«LINKED CLUSTER THEOREM». АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ПОЛНОТА ДЛЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ, ПОЛЯРИЗУЮЩИХ ВАКУУМ

§ 3.0. Введение

Мы теперь откажемся от ограничения на взаимодействие $V\Omega=0$. Мы докажем, что, вообще говоря, спектр гамильтониана возмущенной динамики $H_0+\varepsilon V$ сдвигается, точнее, для малых ε существует действительное число λ_ε, что $H_0+\varepsilon V$ унитарно эквивалентен оператору $H_0+\lambda_\varepsilon E$. На формальном уровне этот факт хорошо известен, например, из знаменитой «linked cluster theorem», являющейся основным инструментом в вычислениях по теории возмущений в квантовой теории многих частиц. Основной результат этой главы состоит в доказательстве сходимости рядов в этой теореме. Это позволит нам строго доказать также все формальные следствия из нее, имеющиеся в классических книгах Фридрихса [47] и Хеппа [54].

Мы будем рассматривать следующие две ситуации:

1) $\mathcal{F}_a=\mathcal{F}_{\mathrm{as}}(L_2(\mathbf{R}^\nu))$ — антисимметрическое фоковское пространство над $L_2(\mathbf{R}^\nu)$, $\nu\geq 3$, $H=H_0+\varepsilon V$, где $H_0=d\Gamma(h)$, или в k-представлении

$$H_0 = \int_{\mathbf{R}^\nu} h(k)\, a^*(k)\, a(k)\, dk, \tag{3.0.1}$$

где $V \in \mathcal{A}_e$ и

$$h(k) = \sqrt{m^2+k^2}, \quad m>0 \text{ (релятивистский случай)},$$

или

$$h(k) = Kk^2 \text{ — (безмассовый случай)}.$$

Так как $V=V^*\in\mathfrak{A}(\mathscr{H})$, то $H=H_0+\varepsilon V$ является самосопряженным оператором в $\mathscr{F}_a$, с той же плотной областью определения, что и H_0.

2) $\mathscr{F}_a=\mathscr{F}_{as}(l_2(Z^\nu))$, $H_0=d\Gamma(h)$, $h=-\Delta+\mu$ — решетчатый лапласиан плюс константа μ. Выпишем оператор H_0 в k-представлении. После преобразования Фурье $l_2(\mathbf{Z}^\nu)$ перейдет в $L_2(\mathbf{T}^\nu)$, $\mathbf{T}^\nu=[0, 2\pi]^\nu$ — ν-мерный тор, $\mathscr{F}_a=\mathscr{F}_{as}(L_2(\mathbf{T}^\nu))$ и

$$H_0=\int_{\mathbf{T}^\nu} h(k)\,a^*(k)a(k)dk, \tag{3.0.2}$$

где $V=V^*\in\mathscr{A}_e$ и

$$h(k)=\sum_{i=1}^{\nu} 2(1-\cos(k_i))+\mu. \tag{3.0.3}$$

В этом случае мы будем предполагать, что $\mu\geq 0$. Таким образом, спектр оператора H_0 неотрицателен. Причем в этом случае мы ограничимся взаимодействием V вида

$$V=\sum_{i=1}^{d} a^*(f_{i,1})\ldots a^*(f_{i,m_i})a(f_{i,m_i+1})\ldots a(f_{i,m_i+l_i}), \tag{3.0.4}$$

где m_i+l_i — четно, $f_{i,j}\in C^\infty(\mathbf{T}^\nu)$ для всех i, j.

Все результаты, доказываемые ниже, верны в обоих случаях, однако для удобства изложения мы будем проводить его для случая 2).

В дальнейшем (§ 3.6) мы снимем требование неотрицательности одночастичного гамильтониана ($\mu\geq 0$).

§ 3.1. Диаграммы Фридрихса. Алгебра виковских экспонент. Операции $\Gamma_\pm$ и Γ

Рассмотрим вакуумное (основное) состояние на C^*-алгебре КАС $\mathfrak{U}(L_2(\mathbf{R}^\nu))$

$$\langle A\rangle=(A\Omega, \Omega), \tag{3.1.1}$$

которое является квазисвободным калибровочно-инвариантным состоянием с $B=0$.

Скобки Вика относительно этого состояния (см. главу 1) означают просто, что операторы уничтожения надо переставить вправо от операторов рождения с учетом правила знаков. Иначе говоря, на мономах вида

$$w=a^*(f_1)\ldots a^*(f_m)a(f_{m+1})\ldots a(f_{m+p})$$

виковские скобки действуют тождественно.

Произведение нескольких мономов Вика может быть разложено в сумму мономов Вика. Соответствующее правило легко формулируется на языке диаграмм.

С мономом

$$W_i=\int w_i\,(k_{i1},\ldots,k_{im_i},k_{i,m_i+1},\ldots,k_{i,m_i+l_i})\,a^*(k_{i1})\ldots a^*(k_{i,m_i})$$
$$a(k_{i,m_i+1})\ldots a(k_{i,m_i+l_i})\,dk_{i1}\ldots dk_{i,m_i+l_i} \qquad (3.1.2)$$

связывается диаграмма G_i с $m_i(l_i)$ занумерованными левыми (правыми) отростками, причем j-му левому отростку соответствует $a^*(k_{ij})$, а j-му правому отростку соответствует $a(k_{i,m_i+j})$.

Тогда

$$W_1\ldots W_n=\sum_G W_G, \qquad (3.1.3)$$

где сумма берется по всевозможным спариваниям, дающим диаграмму G, в несвязном объединении диаграмм G_i и

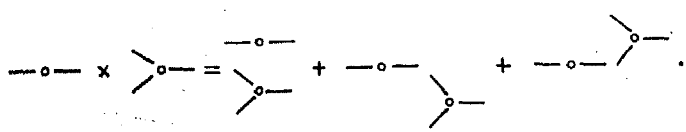
$$W_G=\int\prod_i w_i\prod_{ij}dk_{ij}\,\Pi'\delta(k_{ij}-k_{i'j'})\!:\!\Pi''a^{\#}(k_{ij})\!:\!(-1)^{\pi(G)}, \qquad (3.1.4)$$

где произведение Π' берется по всем линиям (парам связанных отростков i,j и i',j') диаграммы G, а Π'' — по всем неспаренным отросткам. Формулы (3.1.3) и (3.1.4) легко доказать, если пользуясь антикоммутационными соотношениями, переносить каждый оператор уничтожения вправо от операторов рождения. При этом $\pi(G)$ будет общим числом таких транспозиций.

Следующий пример поясняет обозначения

$$W_1=a^*(f_1)\,a(f_2),\quad W_2=a^*(f_3)\,a^*(f_4)\,a(f_5),$$
$$W_1W_2=\ :W_1W_2:\ +W_1\!-\!\circ\!-\!W_2=a^*(f_1)\,a^*(f_3)\,a^*(f_4)\,a(f_2)\,a(f_5)+$$
$$+(f_3,f_2)\,a^*(f_1)\,a^*(f_4)\,a(f_5)-(f_4,f_2)\,a^*(f_1)\,a^*(f_3)\,a(f_5)$$

Или



Заметим, что $:W_1W_2:$ — тот член в разложении W_1W_2, в котором при переносах операторов уничтожения не возникло ни одного спаривания.

Введем следующие обозначения (см. [54]):

$(W_1\ldots W_n)_C$ — сумма по всем связным диаграммам G в (3.1.3);

$(\ldots)_{00}$ — сумма по всем связным диаграммам без внешних линий в (3.1.3);

$(\ldots)_L=(\ldots)_C-(\ldots)_{00}$ — сумма по всем связным диаграммам по крайней мере с одной внешней линией в (3.1.3);

$(\ldots)_{CR}$ — сумма по всем диаграммам из класса $(\ldots)_L$ с внешними линиями, относящимися только к операторам рождения.

В дальнейшем нам понадобятся некоторые алгебраические свойства рядов из мономов Вика.

Для формального степенного ряда

$$A = \sum_{m,l=0}^{\infty} x^m y^l A_{ml},$$

где A_{ml} — мономы Вика, положим по определению

$$:A: = \sum_{m,l=0}^{\infty} x^m y^l :A_{ml}:$$

Утверждение 3.1 (см. [54]). Пусть

$$A = \sum_{\substack{m,l=0\\ m+l>0}}^{\infty} x^m y^l A_{ml}, \quad B = \sum_{\substack{m,l=0\\ m+l>0}}^{\infty} x^m y^l B_{ml},$$

— формальные степенные ряды по четным мономам Вика, где $m(l)$ есть степень по операторам рождения (уничтожения). Тогда верны тождества

$$A :\exp B: = :(A: \exp \mathbf{B}:)_C \exp B: ; \tag{3.1.5}$$

$$:\exp B: A = :(:\exp B: A)_C \exp B:, \tag{3.1.6}$$

где $(\ )_C$, как и раньше, выделяет связные диаграммы.

Доказательство сводится к простым комбинаторным рассуждениям при одних и тех же степенях $x^m y^l$ (см. [47], [54]). ∎

Определение 3.1 ([47], [54]). Левое связное $W_1 \angle W_2 \ldots$ $\ldots W_n$: (правое связное: $W_2 \ldots W_n \angle :W_1$) произведение есть сумма всех виковских мономов из $W_1 : W_2 \ldots W_n :$ (соответственно, из $: W_2 \ldots W_n : W_1$), графы которых связны, где каждому W_i соответствует своя вершина.

Замечание. Обычно тождества (3.1.5), (3.1.6) записывают в виде (см. [47], [54])

$$A : \exp B : = :(A \angle : \exp B:) \exp B:$$

$$:\exp B: A = :(:\exp B: \angle A) \exp B:$$

Определение 3.2 (см. [54]). Определим операции Фридрихса $\Gamma_{\pm\varkappa}$ на мономах

$$U_{mp} = \int u_{mp}(k_1, \ldots, k_{m+p}) a^*(k_1) \ldots a^*(k_m) a(k_{m+1}) \ldots$$
$$\ldots a(k_{m+p}) dk_1 \ldots dk_{m+p}$$

при $\varkappa > 0$ как

$$\Gamma_{\pm\varkappa}(U_{mp}) \overset{\text{def}}{=} i \int\limits_{\pm\infty}^{0} e^{-\varkappa|t|}\tau_t^0(U_{mp})\,dt =$$

$$= \int u_{mp}(k_1, \ldots, k_{m+p})(E_C - E_A \pm i\varkappa)^{-1} a^*(k_1)\ldots a^*(k_m) \quad (3.1.7)$$
$$a(k_{m+1})\ldots a(k_{m+p})\,dk_1\ldots dk_{m+p}$$

и $\Gamma_\pm(U_{mp})$ как сильный предел $\Gamma_{\pm\varkappa}(U_{mp})$ при $\varkappa \to 0$, где

$$E_C = \sum_{j=1}^{m} h(k_j), \quad E_A = \sum_{j=m+1}^{m+p} h(k_j),$$

а операцию Глимма Γ как

$$\Gamma(U_{mp}) = \int u_{mp}(k_1, \ldots, k_{m+p})\, E_C^{-1} a_1^*(k_1)\ldots a_m^*(k_m) \times$$
$$\times a(k_{m+1})\ldots a(k_{m+p})\,dk_1\ldots dk_{m+p}. \quad (3.1.8)$$

Определим также операцию

$$[H_0^{(\pm\varkappa)}, U_{mp}] \overset{\text{def}}{=} \frac{d}{dt}[e^{-\varkappa|t|}\tau_t^0(U_{mp})]\,|_{t=\pm 0}. \quad (3.1.9)$$

Она сводится к замене ядра U_{mp} на ядро

$$u_{mp}(k_1, \ldots, k_{m+p})(E_A - E_C \pm i\varkappa).$$

Утверждение 3.2. При $\varkappa > 0$ имеют место следующие формулы

$$[H_0^{(\pm\varkappa)}, \Gamma_{\pm\varkappa}(U_{mp})] = U_{mp}, \quad (3.1.10)$$

$$[H_0^{(\pm\varkappa)}, :\exp(\Gamma_{\pm\varkappa}(U_{mp})):] = :U_{mp} \exp \Gamma_{\pm\varkappa}(U_{mp}): \quad (3.1.11)$$

Доказательство. Первое равенство следует из определения операции $\Gamma_{\pm\varkappa}$. Из первого равенства утверждения 3.2 имеем

$$[H_0^{(\pm\varkappa)}, :\exp(\Gamma_{\pm\varkappa}(U_{mp}))] =$$

$$= [H_0^{(\pm\varkappa)} - \overset{\circ}{\underset{1}{}} - \Gamma_{\pm\varkappa}(U_{mp}) - \Gamma_{\pm\varkappa}(U_{mp}) - \overset{\circ}{\underset{1}{}} - H_0^{(\pm\varkappa)}] \exp(\Gamma_{\pm\varkappa}(U_{mp})):$$

где $-\overset{\circ}{\underset{1}{}}-$ указывает на то, что берутся мономы Вика с одним спариванием. Но выражение в квадратных скобках равно (3.1.11).

§ 3.2. Адиабатические волновые операторы. «Linked cluster theorem»

Введем дополнительно следующие обозначения (см. [54]). Определим для $-\infty < t,\ s < \infty,\ \varkappa > 0$, оператор эволюции без адиабатического урезания

$$U(t, s) = e^{itH_0} e^{-i(t-s)H} e^{isH_0} \quad (3.2.1$$

и с адиабатическим урезанием

$$U^{(\varkappa)}(t, s)=1-\int_{s}^{t} dr V^{(\varkappa)}(r) U^{(\varkappa)}(r, s), \tag{3.2.2}$$

где $V^{(\varkappa)}(r)\stackrel{\text{def}}{=}e^{-i\varkappa|r|}e^{irH_0}Ve^{-irH_0}$.

Хорошо известно, что для конечных t и s и $\varkappa\geqslant 0$ (см. [54])

$$U^{(\varkappa)}(t,s)=1+\sum_{i=1}^{\infty}(-i\varepsilon)^n \int_{\Delta_n^{s,t}} dt_1\ldots dt_n V^{(\varkappa)}(t_1)\ldots V^{(\varkappa)}(t_n), \tag{3.2.3}$$

где $\Delta_n^{s,t}=\{(t_1, \ldots, t_n), s<t_1<\ldots<t_n<t\}$ и ряд (3.2.3) сходится по норме.

Выражение под интегралом является произведением виковских мономов и может быть представлено в виде суммы

$$V^{(\varkappa)}(t_1)\ldots V^{(\varkappa)}(t_n)=\sum_{G} W_G(t_1, \ldots, t_n) \tag{3.2.4}$$

виковских мономов, индексируемых диаграммами Фридрихса G (см. [54)].

Если воспользоваться равенством при $\varkappa>0$

$$(\Gamma_{\pm\varkappa}(U))(t)=i\int_{\pm\infty}^{t} U^{(\varkappa)}(s)ds,$$

то после интегрирования по $\Delta_n^{0,\pm\infty}$ в каждом члене ряда (3.2.3) имеем

$$U^{(\varkappa)}(0, \pm\infty)=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-i\varepsilon)^n \Gamma_{\pm n\varkappa}(V\ldots$$

$$\ldots\Gamma_{\pm 2\varkappa}(V\Gamma_{\pm\varkappa}(V))\ldots), \tag{3.2.5}$$

а после интегрирования по $\Delta_n^{\pm\infty,0}$

$$U^{(\varkappa)}(\pm\infty, 0)=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-i\varepsilon)^n \Gamma_{\pm n\varkappa}(\ldots\Gamma_{\pm 2\varkappa}(\Gamma_{\pm\varkappa}(V)V)\ldots V). \tag{3.2.6}$$

Теорема 3.3. Существует $\varepsilon_0>0$ такое, что для $|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_0$ и любого из двух случаев:

i) $-\infty<t, s<\infty$ и $\varkappa\geq 0$;

ii) $-\infty\leqslant t, s\leqslant\infty$ и $\varkappa>0$;

ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty}(-i\varepsilon)^n\int\limits_{\Delta_n^{t,s}} dt_1 \ldots dt_n (V^{(\varkappa)}(t_1)\ldots V^{(\varkappa)}(t_n))_C \stackrel{\text{def}}{=} U^{(\varkappa)}(t, s)_C \qquad (3.2.7)$$

сходится по норме, и ε_0 не зависит от t, s, $\varkappa$. То же верно, если вместо $(\ldots)_C$ поставить $(\ldots)_{00}$, $(\ldots)_L$, $(\ldots)_{CR}$.

Из этой теоремы неформально можно вывести следующую теорему.

Теорема 3.4 («linked sluster theorem») (см. теорему 2.7 в [54]). В условиях теоремы 3.3 имеют место равенства

$$U^{(\varkappa)}(t, s) = :\exp(U^{(\varkappa)}(t, s)_C):; \qquad (3.2.8)$$

$$\frac{U^{(\varkappa)}(t, s)}{(\Omega, U^{(\varkappa)}(t, s)\Omega)} = :\exp(U^{(\varkappa)}(t, s)_L):, \qquad (3.2.9)$$

где ряды в правых частях (3.2.8) и (3.2.9) сходятся по норме.

Пусть

$$T_{t,s}^{(\varkappa)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{U^{(\varkappa)}(t, s)}{(\Omega, U^{(\varkappa)}(t, s)\Omega)}. \qquad (3.2.10)$$

Теорема 3.5. Если $\nu \geq 3$, то существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ существуют следующие пределы

$$s-\lim_{\varkappa\to 0} T_{0,\pm\infty}^{(\varkappa)} \stackrel{\text{def}}{=} T^{\pm} \quad \text{(прямые адиабатические волновые операторы)} \qquad (3.2.11)$$

$$s-\lim_{\varkappa\to 0} T_{\pm\infty,0}^{(\varkappa)} \stackrel{\text{def}}{=} \hat{T}^{\pm} \quad \text{(обратные адиабатические волновые операторы)} \qquad (3.2.12)$$

Теорема 3.6. В условиях теоремы 3.5 константа перенормировки

$$Z^{-1} = \left\| \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-\varepsilon)^n(\Gamma(V\ldots\Gamma(V)))_{CR}\Omega\right)\right\|^2, \qquad (3.2.13)$$

где n — число операций Фридрихса (см. [54]), конечна. Оператор $\sqrt{Z}T^{\pm}$ унитарен и осуществляет унитарную эквивалентность

$$HT^{\pm} = T^{\pm}(H_0 + \lambda_\varepsilon), \qquad (3.2.14)$$

где λ_ε задается сходящимся рядом Голдстоуна (см. [54])

$$\lambda_\varepsilon = (\Omega, \varepsilon V \,\underline{/}\, T^{\pm}\Omega), \qquad (3.2.15)$$

где $V \,\underline{/}\, T^{\pm}$ — левое связное произведение.

Формальные аналоги теорем 3.3—3.6 имеются в работе [54], где тождество (3.2.10) доказывается формально, т. е. без доказательства сходимости соответствующих рядов. Неформальное доказательство этих теорем впервые было дано в [68].

Перед тем, как доказывать теоремы 3.3—3.6, мы приведем формальное доказательство теоремы 3.6 (см. [54]).

Доказательство (формальное) теоремы 3.6.

В силу (3.2.5) и (3.2.9)

$$T^{(\varkappa)}(0, \pm\infty) = :\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-i\varepsilon)^n \Gamma_{\pm n\varkappa}(V \ldots \Gamma_{\pm 2\varkappa}(V\Gamma_{\pm\varkappa}(V))\ldots)_L\right):,$$

поэтому при $\varkappa \to 0$ получим

$$T^{\pm} = :\exp(\Gamma_{\pm}(Q_{\pm})):, \tag{3.2.16}$$

где

$$Q_{\pm} = \sum_{n=1}^{\infty}(-i\varepsilon)^n (V\Gamma_{\pm}(V \ldots \Gamma_{\pm}(V\Gamma_{\pm}(V))\ldots))_L.$$

Используя утверждения 3.1 и 3.2, имеем

$$H_0 T = T^{\pm}H_0 + :Q_{\pm}T^{\pm}: \tag{3.2.17}$$

и

$$\begin{aligned} \varepsilon V T^{\pm} &= \varepsilon:(V \,\underline{\angle}\, T^{\pm}) \quad T^{\pm}: = \varepsilon:(VT^{\pm})_C T^{\pm}: = \\ &= \varepsilon:(VT^{\pm})_L T^{\pm}: + \varepsilon:(VT^{\pm})_{00} T^{\pm}: = \\ &= :\sum_{n=1}^{\infty}(-\varepsilon)^n (V\Gamma_{\pm}(V \ldots \Gamma_{\pm}(V\Gamma_{\pm}(V))\ldots))_L T^{\pm}: + \\ &+ (\Omega, \varepsilon(VT^{\pm})_{00}\,\Omega)T^{\pm}, \end{aligned} \tag{3.2.18}$$

где последнее равенство следует из соотношения (см. [47])

$$Q_{\pm} = \varepsilon V \,\underline{\angle}\, :\exp(-\Gamma_{\pm}(Q_{\pm})): - \varepsilon(\Omega, V \,\underline{\angle}\, :\exp(-\Gamma_{\pm}(Q_{\pm})):\Omega).$$

Из (3.2.17) и (3.2.18) получаем теорему 3.6 с

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\lambda} &= (\Omega, \lambda(VT^{\pm})_{00}\Omega) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(-\varepsilon)^n (\Omega, (V\Gamma(V \ldots \Gamma(V\Gamma(V))\ldots))_{00}\Omega), \end{aligned} \tag{3.2.19}$$

где n — число Γ, и мы заменили $\Gamma_{\pm}$ на Γ, так как в (3.2.19) лишь при отсутствии операторов уничтожения возможен ненулевой вклад в силу того, что $a(f)\Omega = 0$ для всех $f \in \mathscr{H}$. ■

Замечание. Все эти утверждения можно доказать и не переходя к операциям $\Gamma_{\pm}$, если использовать тождество

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} U^{(\varkappa)}(t, s)_C &= -i\varepsilon(V^{(\varkappa)}(t):\exp U^{(\varkappa)}(t, s)_C:), \\ U^{(\varkappa)}(t, t)_C &= 1. \end{aligned} \tag{3.2.20}$$

Определение 3.3. Определим S-матрицу (или матрицу рассеяния)

$$S \overset{\text{def}}{=} Z(T^{+})^{*}T^{-} =$$

$$=:\exp\left(2\pi i\sum_{n=1}^{\infty}(-\varepsilon)^{n}\Delta(V\Gamma_{-}(V\ldots\Gamma_{-}(V\Gamma_{-}(V))\ldots)\right)_{L}, \quad (3.2.21)$$

где операция Δ, примененная к моному Вика U_{mp}, означает замену его ядра u_{mp} на ядро

$$u_{mp}(k_1, \ldots, k_{m+p})\,\delta(\mathrm{E}_C-\mathrm{E}_A).$$

Из теоремы 3.6 следует, что S-матрица унитарна.

§ 3.3. Доказательство теоремы 3.3. Разбиение на кластеры и разложение по модам

Рассмотрим сначала случай $\varkappa=0$, $-\infty<s$, $t<\infty$, $\nu\geq 3$.

Далее мы будем заниматься оценкой выражения

$$\int\limits_{\Delta_n^{s,t}}(V(t_1)\ldots V(t_n))_{\mathcal{E}}dt_1\ldots dt_n \quad (3.3.1)$$

и покажем, что оно ограничено по модулю величиной $|t-s|C^n$, где C константа, не зависящая от s, t, n. Из этой оценки мы выведем теорему 3.3.

Основная трудность в доказательстве этой оценки заключается в большом количестве диаграмм. Необходимые сокращения диаграмм мы будем производить во «временных кластерах, или секторах».

Разбиения. Индексы $1,\ldots,n$ являются вершинами диаграмм. Любое подмножество $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)$, $\alpha_1<\alpha_2<\ldots<\alpha_k$ множества $(1,\ldots,n)$ определяет разбиение $(1,\ldots,n)$ на интервалы

$$I_1=[1,\alpha_1)=\{i:\ 1\leqslant i<\alpha_1\},\ldots$$
$$I_k=[\alpha_{k-1},\alpha_k),\ I_{k+1}=[\alpha_k,n].$$

Сектора. Любое разбиение α определяет подмножество Δ_α области $\Delta_n^{s,t}$, которое мы назовем сектором. Оно единственным образом определяется следующими условиями:

а) если i, j принадлежат одному интервалу I_l разбиения α, то существует целое M такое, что

$$t_i,\ t_j\in[M, M+1)\overset{\text{def}}{=}\hat{I}_l;$$

б) если i, j принадлежат разбиениям I_m и I_l соответственно, то t_i и t_j принадлежат различным $[M, M+1)=\hat{I}_m$, $[L, L+1)=\hat{I}_l$, т. е. $M\neq L$.

Ясно, что $\bigcup_\alpha \Delta_\alpha = \Delta_n^{s,t}$. В дальнейшем мы будем называть I_l l-ой группой сектора Δ_α.

Подсектора. Подсектор $(M_1, \ldots, M_{k+1})$ сектора Δ_α определяется разбиением α и целыми числами $M_1 < M_2 < \ldots < M_{k+1}$. Это множество всех $(t_1, \ldots, t_n)$, $s < t_1 < \ldots < t_n < t$ таких, что, если $i \in I_l$, то $t_i \in [M_l, M_l + 1)$.

Моды. Выберем в пространстве $L_2(\mathrm{T}^\nu)$ ортонормированный базис $\{e_N\}_{N \in \mathrm{Z}^\nu}$, где $e_N = C \exp[i(N, k)]$, $k \in \mathrm{T}^\nu$. Элементы этого базиса мы и назовем модами.

Пусть

$$S \stackrel{\mathrm{def}}{=} \bigcup_{l=1}^{d} \{f_{l,1}, \ldots, f_{l,m_l+l_l}\}.$$

Зафиксируем некоторый подсектор $\Delta_\alpha(M_1, \ldots, M_{k+1})$. Если $t \in [M_l, M_l + 1]$, то $t = M_l + \delta t$, $0 \leqslant \delta t \leqslant 1$. Поэтому

$$V(t) = \sum_{l=1}^{d} a^*(e^{iM_l h} e^{i\delta t h} f_{l,1}) \ldots a(e^{iM_l h} e^{i\delta t h} f_{l,m_l+l_l}). \qquad (3.3.2)$$

Разложение по модам. Разложим векторы вида $e^{i\delta t h} f$, $f \in S$ по базису $\{e_N\}$.

$$e^{i\delta t h} f = \sum_{N \in \mathrm{Z}^\nu} C_{N,f}(\delta t)\, e_N. \qquad (3.3.3)$$

Отметим, что для любого $\gamma > 0$ существует константа $C(\gamma)$, такая, что равномерно по $f \in S$, $|\delta t| \leqslant 1$ коэффициенты $C_{N,f}(\delta t)$ ряда (3.3.3) удовлетворяют неравенству

$$|C_{N,f}(\delta t)| \leqslant \frac{C(\gamma)}{|N|^\gamma}, \quad |N| = \sum_{i=1}^{\nu} |N^i|. \qquad (3.3.4)$$

Это неравенство доказывается интегрированием по частям. Мы выберем $\gamma > \nu + 1$, так, чтобы было выполнено неравенство

$$\sum_{N \in \mathrm{Z}^\nu} |C_{N,f}(\delta t)| < C < \infty, \qquad (3.3.5)$$

где константа C не зависит от $f \in S$ и $|\delta t| \leqslant 1$.

Для некоторого разбиения $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$, обозначим через $\mathfrak{B}_\alpha$ следующее подмножество $[0, 1)^\nu$

$$\mathfrak{B}_\alpha = \{(\delta t_1, \ldots, \delta t_n) : 0 \leqslant \delta t_1 < \ldots < \delta t_{\alpha_1 - 1},$$
$$0 \leqslant \delta t_{\alpha_1} < \ldots < \delta t_{\alpha_2 - 1}, \ldots, 0 < \delta t_{\alpha_k} < \ldots < \delta t_n < 1\}.$$

Используя введенные обозначения, мы можем записать выражение (3.3.1) в виде

$$\sum_{\alpha}\sum_{M_1,\ldots,M_{k+1}}\int_{\mathfrak{B}_\alpha}\prod_{i=1}^{n}d(\delta t_i)\sum_{\{N_{i},f_j\}}\sum_{G}W_G, \tag{3.3.6}$$

где, если рассматривать выражение (3.3.6) слева направо, мы имеем

1) суммы по всем разбиениям;
2) суммы по всем подсекторам;
3) интегрирование внутри всех подсекторов;
4) суммы по всем модам;
5) суммы по всем допустимым диаграммам.

Диаграммы. Диаграмма — это граф с вершинами $1, 2, \ldots, n$. Каждой вершине инцидентны m_i правых отростков (им соответствуют операторы уничтожения) и l_i левых отростков (им соответствуют операторы рождения). Выбор мод соответствует тому, что каждому отростку ставится в соответствие элемент e_N базиса $\{e_N\}_{N\in Z^\nu}$. Каждый отросток занумерован индексом (v, p), где v — номер вершины, p — номер отростка в вершине v. Допустимой диаграммой является связный граф, образующийся спариванием некоторых из отростков (v_1, p_1) и (v_2, p_2), $v_1<v_2$, если первый отросток правый, а второй отросток левый. Спаренные отростки являются ребрами допустимой диаграммы. Мы будем называть их внутренними (int). Неспаренные отростки назовем внешними ребрами (out).

Каждая диаграмма входит в выражение (3.3.6) со своим весом.

Вес диаграммы. Пусть зафиксировано разбиение $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ подсектор $(M_1, \ldots, M_{k+1})$, вектор $(\delta t_1, \ldots, \delta t_n)$, моды N_{vp}. Введем функцию $M(v)$, $v=1, \ldots, n$, $M(v)=M_i$, если $v\in\delta_i$, $i=1,\ldots,k+1$. Вес диаграммы G это следующее выражение

$$W_G=(-1)^{\pi(G)}\prod_{\text{int}}(e^{ih(M(v)-M(v'))}e_{N_{vp}}, e_{N_{v'q}})\times$$
$$\times C_{N_{vp}}(\delta t_v)C_{N_{v'q}}(\delta t_{v'})\prod_{\text{ext}}a^{\#}(e^{iM(v)h}e_{N_{vp}}), \tag{3.3.7}$$

где $a^{\#}=a^*$, если отросток vp — правый и $a^{\#}=a$, если отросток vp — левый.

Замечание. Рассмотрим диаграмму G, у которой внутреннее ребро $(vp, v'q)$ лежит целиком в интервале I_l для некоторого l. Выражение (3.3.7) показывает, что если $N_{vp}\neq N_{v'q}$, то $W_G=0$, поскольку $M(v)=M(v')$ и $(e_{N_{vp}}, e_{N_{v'q}})=0$. Этот факт позволит нам сократить большое число диаграмм.

Назовем подмножество вершин I_l диаграммы G, l-ой группой вершин. Пусть $A_l(B_l)$ — множество ребер диаграммы (внешних и внутренних), выходящих из l-ой группы вершин вправо (влево) и не спаривающих две вершины этой группы.

Зафиксируем сектор $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)$, $\Delta_\alpha(M_1,\ldots,M_{k+1})$, моды $\{N_{vp}\}$. Для каждого $l=1,\ldots,k+1$ обозначим через N_l некоторое заданное множество мод $N_l=\{e_1,\ldots,e_{i_l}\}$. Пусть $G(N_1, \ldots, N_{k+1})$ — множество диаграмм, у которых моды отростков A_l есть в точности N_l.

Лемма 3.7. а) Существует не более одной диаграммы G из $G(N_1,\ldots,N_{k+1})$ с ненулевым весом W_G.

б) Для каждой такой диаграммы множества N_l содержат различные моды.

Доказательство леммы 3.7. Утверждения данной леммы являются очевидными следствиями того, что

$$\{a^\#(e^{iMh}e_{N_1}),\ a^\#(e^{iMh}e_{N_2})\}=0, \tag{3.3.8}$$

если $N_1\neq N_2$ ($\{,\}$—антикоммутатор) и

$$(a^\#(e^{iMh}e_N))^2=0. \tag{3.3.9}$$

Если $I_l=\{i_1,\ldots,i_q\}$, то обозначим $V_{I_l}=V(t_{i_1})\ldots V(t_{i_q})$. Зафиксируем некоторое l, $1\leqslant l\leqslant k+1$.

Представим V_{I_l} в виде суммы по виковским мономам (диаграммам Фридрихса). Из соотношений (3.3.8) и (3.3.9) следует, что существует только одна ненулевая диаграмма, для которой моды правых свободных отростков совпадают с N_l, причем эти моды различны. Из этих замечаний и вытекают утверждения а) и б) леммы 3.7. ■

Вернемся к оценке выражения (3.3.6). Поскольку все суммы в нем кроме сумм по модам конечны, мы можем перенести суммирование по модам интегрирование по $\mathfrak{B}_\alpha$ налево. Из неравенства (3.3.4) и того, что $\mathfrak{B}_\alpha\subseteq[0,1]^n$, нам для доказательства теоремы 3.3 достаточно доказать равномерно по модам следующее неравенство

$$\left|\sum_\alpha\ \sum_{M_1,\ldots,M_{k+1}}\ \sum_G W_G\right|\leqslant C^n|t-s|, \tag{3.3.10}$$

где C не зависит от n, s, t, мод, а W_G задается выражением вида (3.3.7), в котором убраны все $C_{N_{vp}}(\delta t_v)$.

Пусть далее зафиксирован набор мод. Множества $N_1,\ldots$ $\ldots,N_{k+1}$ мы можем выбрать не более чем $[2^{m_{\max}}]^n$ способами, где $m_{\max}$ максимальное число операторов рождения в мономах Вика, входящих в v. Поэтому можно считать, что $N_1,\ldots,N_{k+1}$ тоже фиксированы. В силу леммы 3.7 мы можем каждой допустимой диаграмме G поставить в соответствие связную диаграмму $\tilde G$ с $k+1$ вершиной $M_1,\ldots,M_{k+1}$ и суммарным числом ребер, не превосходящим $m_{\max}n$.

При этом вес $\tilde W_{\tilde G}$ диаграммы $\tilde G$ находится по формуле

$$\tilde W_{\tilde G}=\prod_{\mathrm{Int}}|[e^{ih(M(v)-M(v'))}e_{N_{vp}},\ e_{N_{v'q}}]|. \tag{3.3.11}$$

Причем

$$\| W_G \| \leqslant C_1^n \widetilde{W}_{\widetilde{G}}, \tag{3.3.12}$$

где C_1 — некоторая константа.

Для любых M, $N \in \mathbf{Z}^\nu$ имеет место оценка

$$\left| \int\limits_{\mathbf{R}^\nu} dk e_N(k) e_M(k) e^{ith(k)} \right| \leqslant \frac{C}{(1+|t|)^{\nu/2}}, \tag{3.3.13}$$

где C не зависит от N, M, t.

Откуда, учитывая (3.3.11) и (3.3.13), следует

$$\| W_G \| \leqslant (\mathrm{const})^n \prod_{\mathrm{int}} \frac{1}{|M_{l(v,p)} - M_{l(v',q)}|^{\nu/2}}, \tag{3.3.14}$$

где $l(v,p)$ — это группа δ, к которой принадлежит вершина l.

Учитывая все вышесказанное, имеем

$$\left| \sum_{\alpha} \sum_{M_1,\ldots,M_{k+1}} \sum_{G} W_G \right| \leqslant (\mathrm{const})^n \sum_{M_1,\ldots,M_{k+1}} \prod_{\mathrm{int}} \frac{1}{|M_{l(v,p)} - M_{l(v',q)}|^{\nu/2}} \tag{3.3.15}$$

Зафиксируем M_1 — целое, принадлежащее отрезку $[s, t]$.

Лемма 3.8. Имеет место оценка

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{M_2,\ldots,M_{k+1}} \prod_{\mathrm{int}} \frac{1}{|M_{l(v,p)} - M_{l(v',q)}|^{\nu/2}} \right| \leqslant \left[\sum_{M=-\infty}^{\infty} \frac{C}{(1+|M|)^{\nu/2}} \right]^{nm_{\max}}. \tag{3.3.16}$$

Данный результат получается после применения к левой части (3.3.16) стандартной техники кластерных разложений (см. [6]).

Суммирование по M_1 дает в оценке (3.3.10) множитель $|t-s|$. Доказательство теоремы 3.3 закончено.

§ 3.4. Асимптотическая полнота

Теперь мы можем неформально доказать теоремы 3.5 и 3.6, из которых следует асимптотическая полнота гамильтониана $H_0 + \varepsilon V$ при малых ε в случае, когда взаимодействие V поляризует вакуум, но является четным.

Доказательство теоремы 3.5. Докажем, что для $\psi=a^*(f_1)\ldots a^*(f_m)\Omega,\ f_i\in C^\infty(\mathrm{T}^\nu)$

$$\lim_{\varkappa\to 0}\sum_n(-i\varepsilon)^n\int\limits_{\pm\infty}^{0}dt_1\ldots\int\limits_{\pm\infty}^{0}dt_n(V^{(\varkappa)}(t_1)\ldots V^{(\varkappa)}(t_n))_L\psi \quad (3.4.1)$$

существует.

Рассмотрим n-ый член ряда (3.4.1). Докажем сначала это утверждение для диаграмм из L', т. е. таких, что они имеют хотя бы одно внешнее ребро уничтожения. Для таких диаграмм, повторяя доказательство теоремы 3.3, получим оценку сверху $C^n\varepsilon^n$, равномерно по $\varkappa$.

Далее рассмотрим сумму по диаграммам без внешних ребер уничтожения. Они имеют внешние ребра рождения, которые дают вклад

$$\begin{aligned}&\prod_{v,p}a^*(e^{it_vh-\varkappa|t_v|}e_{N_{vp}})=\\&=\int\prod_{v,p}a^*(k_{vp}]\,e^{it_vh(k_{vp})-\varkappa|t_v|}e_{N_{vp}}(k_{vp})\,dk_{vp}.\end{aligned}\quad (3.4.2)$$

Сделаем замену

$$\begin{aligned}t_1'&=t_1,\\t_2'&=t_2-t_1,\\&\ldots\ldots\\t_n'&=t_n-t_{n-1}\end{aligned}$$

и проинтегрируем по t_1'.

Заметим, что

$$\lim_{\varkappa\to 0}i\int\limits_{\pm\infty}^{0}dt_1'\exp\left(it_1'\sum_{v,p}h(k_{vp})-\varkappa|t_1'|\right)=\frac{1}{\sum\limits_{v,p}h(k_{vp})} \quad (3.4.3)$$

принадлежит локально L_2, если $\mu\geqslant 0$.

Поэтому можно разложить $\left(\sum\limits_{v,p}h(k_{vp})\right)^{-1}$ по модам. Интегрирование по t_1' эквивалентно тому, что вся диаграмма сдвигается в точку $t_1=0$. Далее применим технику, развитую при доказательстве теоремы 3.3. ■

Замечание (Об адиабатическом урезании). Выше мы рассматривали волновые операторы, зависящие от двух параметров: параметра адиабатического урезания $\varkappa$ и времени t. При этом исследовались повторные пределы $\lim\limits_{\varkappa\to 0}\lim\limits_{t\to\infty}$. Как вытекает из теорем 3.3—3.6, эти пределы существуют по норме или в сильном смысле. Возникает вопрос: какую роль играет адиабатическое урезание и нельзя ли обойтись без него? Отметим, что использование адиабатического урезания характерно для стационарной теории рассеяния.

Заметим также, что если существует предел без урезания

$$s-\lim_{t\to\infty} U(0,t),$$

то существует и предел с адиабатическим урезанием

$$s-\lim_{\varkappa\to 0} U^{(\varkappa)}(0,\infty)$$

и они равны. Эта ситуация возникает, например, когда $V \in \mathscr{A}$, $V\Omega=0$.

Анализ доказательств теорем 3.3—3.6 показывает, что этим теоремам соответствуют аналогичные утверждения для соответствующих волновых операторов без адиабатического урезания. Только в этом случае нужно все пределы по норме (сильные пределы) заменить на слабые пределы, однако сейчас неясно, как это можно использовать для доказательства асимптотической полноты.

§ 3.5. Существование возмущенного вакуумного вектора

В этом и последующем параграфе мы покажем, что динамика рассматриваемой ферми-системы не зависит существенно от химического потенциала μ. Результаты § 3.2—3.4 показывают, что возмущенная система унитарно эквивалентна «смещенной» свободной системе, если $\mu\geq 0$. Это условие существенно используется в доказательстве теорем 3.3—3.6.

Заметим, что если $\mu\geq 0$, то точка $\lambda_0=0$ дискретного спектра оператора $H_0=d\Gamma h$ лежит вне или на границе непрерывной части спектра этого оператора. При «включении» взаимодействия εV она сдвигается в точку λ_ε.

Если $\mu<0$, то дискретный спектр H_0 содержится во внутренности его непрерывного спектра. Оказывается, что и в этом случае дискретный спектр не исчезает, как это можно было ожидать. Например, подобная ситуация возникает для модели взаимодействующего ферми-газа со спином, когда собственное значение, лежащее внутри непрерывного спектра, при включении взаимодействия ($\varepsilon\neq 0$) исчезает.

В данном параграфе мы докажем это утверждение. Мы воспользуемся техникой получения оценок диаграмм, развитой в § 3.2—3.4. Все обозначения этого параграфа при этом сохраняются.

Теорема 3.9. Пусть одночастичный гамильтониан h имеет вид (3.0.3), $\mu\in\mathbf{R}$, а оператор V вид (3.0.4). Тогда для достаточно малых ε оператор $H_\varepsilon = H_0 + \varepsilon V$ имеет собственный вектор Ω_ε.

Доказательство. По теореме 3.6 для достаточно малых ε величина

$$Z^{-1} = \left\| \exp \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (-\varepsilon)^n (\Gamma(V \dots \Gamma(V)))_{CR} \right\} \Omega \right\|^2$$

конечна. С другой стороны, из результатов § 3.3 следует, что

$$Z^{-1} = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{|(\Omega, U(0, t)\Omega)|^2} = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{|(e^{itH_\varepsilon}\Omega, \Omega)|^2}. \tag{3.5.1}$$

Поэтому, величина

$$\frac{e^{itH_\varepsilon}}{(e^{itH_\varepsilon}\Omega, \Omega)}$$

равномерно ограничена по t. Тем же методом, что и теорема 3.3 может быть доказана следующая лемма.

Лемма 3.10. Для плотного в $\mathcal{F}_a$ множества $\mathcal{D}$ существует конечный предел

$$\langle F \rangle = \lim_{t \to \infty} \frac{(e^{itH_\varepsilon}\Omega, F)}{(e^{itH_\varepsilon}\Omega, \Omega)}, \quad F \in \mathcal{D}. \tag{3.5.2}$$

Как показывает следующая общая лемма, этот предел существует и конечен для любого $F \in \mathcal{F}$.

Лемма 3.11. Пусть $\mathcal{H}$ — сепарабельное гильбертово пространство, α_t — равномерно ограниченная функция, α: $\mathbf{R} \to \mathcal{H}$, т. е.

$$\|\alpha_t\| < M < \infty. \tag{3.5.3}$$

Пусть для плотного в $\mathcal{H}$ множества векторов $\{F\}$ существует конечный предел

$$\lim_{t \to \infty} (\alpha_t, F). \tag{3.5.4}$$

Тогда этот предел существует и конечен для всех $F \in \mathcal{F}$.

Гильбертово пространство слабо полно. Поэтому существует некоторый вектор Ω_ε, такой, что для всех $F \in \mathcal{F}_a$

$$\lim_{t \to \infty} \frac{(e^{itH_\varepsilon}\Omega, F)}{(e^{itH_\varepsilon}\Omega, \Omega)} = (\Omega_\varepsilon, F) \cdot \tag{3.5.5}$$

Мы покажем, что Ω_ε — собственный вектор возмущенного оператора H_ε.

Во-первых, полагая в (3.5.5) $F = \Omega$,

$$(\Omega_\varepsilon, \Omega) = 1,$$

т. е. $\Omega_\varepsilon \neq 0$.

Далее, для любого $s \in \mathbf{R}$

$$(\Omega_\varepsilon, F) = \lim_{t\to\infty} \frac{(e^{i(t+s)H_\varepsilon}\Omega, F)}{(e^{i(t+s)H_\varepsilon}\Omega, \Omega)} = \lim_{t\to\infty} \frac{(e^{itH_\varepsilon}\Omega, e^{-isH_\varepsilon}F)}{(e^{itH_\varepsilon}\Omega, e^{-isH_\varepsilon}\Omega)} =$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{(e^{itH_\varepsilon}\Omega, e^{-isH_\varepsilon}F)}{(e^{itH_\varepsilon}\Omega, e^{-isH_\varepsilon}\Omega)} \frac{(e^{itH_\varepsilon}\Omega, \Omega)}{(e^{itH_\varepsilon}\Omega, \Omega)} =$$

$$= \frac{(\Omega_\varepsilon, e^{-isH_\varepsilon}F)}{(\Omega_\varepsilon, e^{-isH_\varepsilon}\Omega)} = \frac{(e^{isH_\varepsilon}\Omega_\varepsilon, F)}{(e^{isH_\varepsilon}\Omega_\varepsilon, \Omega)}.$$

То есть для любых $s \in \mathbf{R}$, $F \in \mathcal{F}$ выполняется тождество

$$(\Omega_\varepsilon, F) = \frac{(e^{isH_\varepsilon}\Omega_\varepsilon, F)}{(e^{isH_\varepsilon}\Omega, \Omega)}. \tag{3.5.6}$$

Или

$$(\Omega_\varepsilon, F)(e^{isH_\varepsilon}\Omega_\varepsilon, \Omega) = (e^{isH_\varepsilon}\Omega_\varepsilon, F). \tag{3.5.7}$$

Дифференцируя обе части (3.5.7) по s и полагая $s=0$, получим

$$(\Omega_\varepsilon, F)(H_\varepsilon\Omega_\varepsilon, \Omega) = (H_\varepsilon\Omega_\varepsilon, F). \tag{3.5.8}$$

Поскольку (3.5.8) выполняется для любых $F \in \mathcal{F}_a$, то

$$H_\varepsilon\Omega_\varepsilon = (H_\varepsilon\Omega_\varepsilon, \Omega)\Omega_\varepsilon, \tag{3.5.9}$$

то есть Ω_ε — собственный вектор H_ε. Теорема 3.8 полностью доказана.

§ 3.6. Унитарная эквивалентность. Общий случай

Здесь мы рассмотрим дальнейшее обобщение результатов § 3.1, заключающееся в снятии ограничения на химический потенциал.

Докажем следующую теорему.

Теорема 3.12. Пусть одночастичный гамильтониан h имеет вид (3.0.3), $\mu \in \mathbf{R}$, а оператор V вид (3.0.4). Тогда существует $\varepsilon_0 >$, такое, что для $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$ и $\lambda_\varepsilon \in \mathbf{R}$, операторы H_ε и $H_0 + \lambda_\varepsilon E$ унитарно эквивалентны.

Замечание. Основой доказательства теоремы 3.12 будут результаты предыдущего параграфа о существовании возмущенного вакуумного вектора Ω_ε.

Доказательство. Рассмотрим следующие две динамики в C^*-алгебре $\mathfrak{U}(\mathcal{H})$:

$$\tau_t^0(A) = e^{itH_0}Ae^{-itH_0},$$

$$\tau_t^{\varepsilon V}(A) = e^{it(H_0+\varepsilon V)}Ae^{-it(H_0+\varepsilon V)}.$$

По теореме 2.5 для достаточно малых ε существуют и обратимы морфизмы Меллера в C^*-алгебре $\mathfrak{A}(\mathcal{H})$

$$\gamma_\pm(A)=\lim_{t\to\pm\infty}\tau_{-t}^{\varepsilon V}\tau_t^0(A),\quad A\in\mathfrak{A}(\mathcal{H}).$$

Пусть Ω_ε — возмущенный вакуумный вектор оператора $H_0+\varepsilon V$, существующий в силу теоремы 3.9. Мы можем считать его нормированным, т. е. $\|\Omega_\varepsilon\|=1$. Положим $\gamma=\gamma_+$.

Лемма 3.13. Для любого $f\in\mathcal{H}$ имеет место равенство

$$(\gamma a(f))\Omega_\varepsilon=0. \tag{3.6.1}$$

Доказательство. Обозначим $\tilde{a}(f)=\gamma a(f)$. С одной стороны имеем

$$\lim_{t\to+\infty}\tau_{-t}^{\varepsilon V}\tau_t^0(a(f))\Omega_\varepsilon=\tilde{a}(f)\Omega_\varepsilon. \tag{3.6.2}$$

С другой стороны, пользуясь тем, что Ω_ε — собственный вектор оператора $H_\varepsilon=H_0+\varepsilon V$, имеем

$$\begin{aligned}\|\tau_{-t}^{\varepsilon V}\tau_t^0(a(f))\Omega_\varepsilon\|&=\|e^{-itH_\varepsilon}a(e^{ith}f)e^{itH_\varepsilon}\Omega_\varepsilon\|=\\&=\|a(e^{ith}f)\Omega_\varepsilon\|\to 0\end{aligned} \tag{3.6.3}$$

при $t\to+\infty$.

Действительно, пусть по норме $\Omega_\varepsilon^{(n)}\to\Omega_\varepsilon$ при $n\to\infty$, где $\Omega_\varepsilon^{(n)}$ — конечная линейная комбинация векторов вида

$$a^*(f_1)\ldots a^*(f_m)\Omega,\quad f_i\in C_0^\infty(\mathbb{R}^\nu).$$

Пусть $\|\Omega_\varepsilon^{(n)}-\Omega_\varepsilon\|<\delta$ при $n>N_\delta$. Тогда

$$\|a(e^{-ith}f)\Omega_\varepsilon\|\leqslant\|a(e^{-ith}f)\Omega_\varepsilon^{(n)}\|+\delta\|f\|. \tag{3.6.4}$$

Пользуясь антикоммутационными соотношениями, мы можем перенести оператор $a(e^{ith}f)$ через операторы $a^*(f_1)\ldots a^*(f_m)$ слева направо. После этого, $a(e^{ith}f)$ будет содержать конечное число слагаемых, каждое из которых будет содержать множитель вида

$$(e^{ith}f,f_i). \tag{3.6.5}$$

Из спектральной теории и теоремы Лебега (используя абсолютную непрерывность спектра h) следует, что выражение вида (3.6.5) стремится к нулю при $t\to\infty$. Отсюда в силу произвольности выбора $\delta>0$ следует утверждение леммы 3.13.

Из леммы 3.12 легко следует лемма 3.14.

Лемма 3.14. Для любого $A\in\mathfrak{A}(\mathcal{H})$ имеет место равенство

$$(A\Omega,\Omega)=(\gamma(A)\Omega_\varepsilon,\Omega_\varepsilon). \tag{3.6.6}$$

Определим оператор U: $\mathcal{F}_a\to\mathcal{F}_a$ следующим образом

$$U(A\Omega)=\gamma(A)\Omega_\varepsilon. \tag{3.6.7}$$

Оператор U сохраняет норму, так как

$$\|A\Omega\|^2=(A^*A\Omega,\Omega)=(\gamma(A^*A)\Omega_\varepsilon,\Omega_\varepsilon)=\|\gamma(A)\Omega_\varepsilon\|^2.$$

Поэтому он корректно определен и изометричен. Так как $\mathfrak{A}(\mathcal{H})$ неприводима в $\mathcal{F}_a$, то $\mathfrak{A}\Omega_\varepsilon = \mathcal{F}_a$ и, следовательно, образ оператора U совпадает со всем $\mathcal{F}_a$. Значит, оператор U унитарен.

Для любого $A \in \mathfrak{A}(\mathcal{H})$ имеем

$$e^{it(H_0+\varepsilon V)} U A\Omega = e^{it(H_0+\varepsilon V)} \gamma(A)\Omega_\varepsilon = \tau_t^{\varepsilon V}(\gamma(A))\, e^{it(H_0+\varepsilon V)}\Omega_\varepsilon =$$

$$= e^{it\lambda_\varepsilon}\gamma(\tau_t^0(A))\Omega_\varepsilon = e^{it\lambda_\varepsilon} U \tau_t^0(A)\Omega = e^{it\lambda_\varepsilon} U e^{ith} A\Omega. \quad (3.6.8)$$

Здесь мы воспользовались сплетающим свойством морфизмов Меллера:

$$\tau_t^{\varepsilon V} \circ \gamma = \gamma \circ \tau_t^0$$

и тем, что Ω_ε — собственный вектор оператора $H_0 + \varepsilon V$ с собственным значением λ_ε.

Из выражения (3.6.8) следует, что

$$e^{it(H_0+\varepsilon V)} = e^{it\lambda_\varepsilon} U e^{itH_0} U^* \quad (3.6.9)$$

или

$$H_0 + \varepsilon V = U(H_0 + \lambda_\varepsilon) U^*. \quad (3.6.10)$$

Теорема 3.12 полностью доказана. ■

Имеет место следующая теорема.

Теорема 3.15. Морфизмы Меллера $\gamma_\pm$, определяемые (3.6.2), унитарно представимы.

Доказательство. Для любого $B \in \mathfrak{A}$ и оператора U из выражения (3.6.7)

$$\gamma(A) B\Omega_\varepsilon = \gamma(A\gamma^{-1}(B))\Omega_\varepsilon = UA\gamma^{-1}B\Omega = UAU^*B\Omega_\varepsilon.$$

И поскольку B произволен, то

$$\gamma(A) = UAU^*. \ ■ \quad (3.6.11)$$

Глава 4

СПИНОВАЯ ЧАСТИЦА, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩАЯ СО СВОБОДНЫМ ФЕРМИ-ГАЗОМ

§ 4.0. Введение

Здесь мы рассмотрим свободный ферми-газ на решетке и спин, локализованный, например, в точке $0 \in \mathbf{Z}^\nu$.

Наш первый результат (теорема 4.4) описывает случай, когда система эквивалентна идеальному ферми-газу. Здесь спин «исчезает» в «море» ферми-частиц. Эта ситуация во многом аналогична рассмотренной в [1]. Мы получим спектральное объяснение этого явления: собственный вектор становится резонансом.

Второй результат § 4.3 (только для квадратических возмущений) относится к случаю, когда система эквивалентна идеальному ферми-газу плюс свободная спиновая квазичастица.

В § 4.4 мы исследуем случай частицы, взаимодействующей с ферми-газом в основном состоянии. Для ограниченных возмущений мы получим полное спектральное представление возмущенной динамики. Она оказывается унитарно эквивалентной динамике, состоящей из свободного ферми-газа и не взаимодействующей с ним частицы с измененными параметрами.

§ 4.1. Система «ферми-газ»+«спиновая частица». Квадратическое взаимодействие

Пусть $\mathscr{H}=l_2(\mathbf{Z}^\nu)$, $\nu\geq 3$, $\mathfrak{A}_F=\mathfrak{A}(\mathscr{H})$ — C^*-алгебра КАС, описывающая решетчатый ферми-газ и $\mathfrak{A}(\mathbf{C})$ конечномерная C^*-алгебра КАС, порожденная $\{1, b, b^*\}$. Эта C^*-алгебра описывает спин и b, b^* удовлетворяют каноническим антикоммутационным соотношениям

$$bb=b^*b^*=0_b,$$
$$b^*b+bb^*=1_b. \tag{4.1.1}$$

Тензорное произведение этих С*-алгебр (в смысле произведения супералгебр) есть опять С*-алгебра КАС

$$\mathfrak{B}=\mathfrak{A}(\mathbf{C})=\mathfrak{M}_2,$$
$$\mathfrak{A}=\mathfrak{B}\otimes\mathfrak{A}_F(\mathscr{H})=\mathfrak{A}(\mathbf{C}\oplus\mathscr{H}), \tag{4.1.2}$$

где $\mathfrak{A}$ порождена 1, $b\otimes 1_F$, $b^*\otimes 1_F$, $1_b\otimes a(f)$, $1_b\otimes a^*(f)$, $f\in\mathscr{H}$. Положим

$$b=a(\Phi_0),\quad \Phi_0=(1,0)\in\mathbf{C}\oplus\mathscr{H}. \tag{4.1.3}$$

Для краткости обозначений, когда это не вызывает путаницы, мы будем отождествлять $b^{\#}\otimes 1_F$ с $b^{\#}$, $1_b\otimes a^{\#}(f)$ с $a^{\#}(f)$.

Из определения $\mathfrak{A}$ следует, что выполняются соотношения

$$ba^{\#}(f)=-a^{\#}(f)b,$$
$$b^*a^{\#}(f)=-a^{\#}(f)b^*,$$

для всех $f\in\mathscr{H}$.

Свободная динамика в $\mathfrak{A}$ задается следующим образом

$$\tau_t^0(1_b\otimes a^{\#}(f))=1_b\otimes a^{\#}(e^{ith}f),$$
$$\tau_t^0(b\otimes 1_F)=e^{-it\lambda}b\otimes 1_F,\quad \tau_t^0(b^*\otimes 1_F)=e^{it\lambda}b^*\otimes 1_F, \tag{4.1.4}$$

где $h=-\Delta+\mu$ — решетчатый лапласиан плюс константа, $\lambda\in\mathbf{R}$.

Мы рассмотрим сначала случай квадратического взаимодействия ферми-газа со спином

$$V_{\text{КВ}}=V_2=\varepsilon(b^*a(f)+a^*(f)b) \tag{4.1.5}$$

для некоторого $f\in\mathscr{H}$ с конечным носителем.

Откуда следует, что

$$\tau_t^{V_1}(a^{\#}(G))=a^{\#}(e^{it(h_0(\lambda)+\varepsilon P)}G), \quad G\in\mathbf{C}\oplus\mathscr{H},$$

где $h_0(\lambda)=\lambda\otimes 1+1\otimes h$. И для $F=(0,f)$ имеем

$$PG=\varepsilon(P((0,f)+\varphi_0)-P((0,f)-P(\varphi_0))G=$$
$$\varepsilon((G\varphi_0)F+(G,F)\varphi_0).$$

Следовательно возмущенная динамика является свободной и порождается оператором h_ε, который соответствует оператору в хорошо известной модели Фридрихса. Нам понадобится ряд фактов о спектральных свойствах этой модели.

§ 4.2. Модель Фридрихса

Мы сформулируем теоремы, которые относятся к модели Фридрихса и которые мы будем существенно использовать.

Пусть $\hat{\mathscr{H}}=L_2(\mathbf{T}^\nu)$, $\nu\geqslant 3$. Рассмотрим в $\mathscr{H}=\mathbf{C}\oplus\hat{\mathscr{H}}$ оператор

$$h_0(\lambda)\begin{pmatrix} c \\ g \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda c \\ hg \end{pmatrix}, \tag{4.2.1}$$

где $\lambda\in\mathbf{R}$, $c\in\mathbf{C}$, $g\in\hat{\mathscr{H}}$,

$$h(k)=\sum_{i=1}^{\nu}2(1-\cos(k_i))+\mu. \tag{4.2.2}$$

Рассмотрим оператор $h_\varepsilon(\lambda)=h_0(\lambda)+\varepsilon V$, где возмущение εV имеет вид

$$V\begin{pmatrix} c \\ g \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \int g(k)\bar{\Phi}(k)\,dk \\ c\Phi \end{pmatrix}, \tag{4.2.3}$$

где $\varphi\in L_2(\mathbf{T}^\nu)$.

Очевидно, возмущение V имеет ранг 2. Оператор h_0 имеет абсолютно непрерывный спектр на $[\mu, \mu+4\nu]$ и собственное значение λ.

Теорема 4.1. Пусть $\lambda\notin(\mu, \mu+4\nu)$, $\varphi\in C^\infty(\mathbf{T}^\nu)$. Тогда существует такое действительное $\lambda_\varepsilon\in(\mu, \mu+4\nu)$, $|\lambda-\lambda_\varepsilon|=O(|\varepsilon|^2)$, что операторы $h_0(\lambda)+\varepsilon V$ и $h_0(\lambda')$ унитарно эквивалентны, то есть при достаточно малых ε, абсолютно непрерывная часть спектра не меняется, сингулярной не появляется, а собственное значение λ_ε лежит вне $(\mu, \mu+4\nu)$.

Теорема 4.2. Пусть $\varphi\in C^\infty(\mathbf{T}^\nu)$ и φ не равно тождественно нулю ни на какой поверхности уровня функции

$$h(k)=\sum_{i=1}^{\nu}2(1-\cos(k_i))+\mu. \tag{4.2.4}$$

Если $\lambda\in(\mu, \mu+4\nu)$, то тогда существует $\varepsilon_0(V)>0$ такое, что для любого $|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_0$, $\varepsilon\neq0$, оператор $h_0(\lambda)+\varepsilon V$ и h унитарно эквивалентны, то есть при достаточно малых ε, дискретный спектр исчезает, абсолютно непрерывная часть спектра не меняется.

Теорема 4.3. Пусть выполнены все условия теоремы 4.1 и $F=(c_1, f)$, $G=(c_2, g)\in\mathbf{C}\oplus\mathscr{H}$, где $\hat f, \hat g\in C^\infty(\mathbf{T}^\nu)$. Тогда для достаточно малых ε

$$(e^{it(h_0(\lambda)+\varepsilon V)}F, G)\in L_1(-\infty, \infty). \tag{4.2.5}$$

Доказательства этих теорем основаны на анализе хорошо известной модели Фридрихса, и мы приведем в § 4.5 доказательство только теоремы 4.1 и 4.2. Доказательство теоремы 4.3 смотрите в [18].

§ 4.3. Локальные возмущения в модели «ферми-газ+спин»

Сформулированные ниже теоремы 4.4 и 4.5 относятся к случаю квадратического взаимодействия, а теорема 4.6 — для неквадратического.

Теорема 4.4. Пусть квадратическое возмущение $\mathbf{V}_2$ имеет вид (4.1.5), причем $\hat f\in C^\infty(\mathbf{T}^\nu)$ и $\hat f$ не равно тождественно нулю ни на какой поверхности уровня функции

$$h(k)=\sum_{i=1}^{\nu}2(1-\cos(k_i))+\mu. \tag{4.2.4}$$

Если $\lambda\in(\mu, \mu+4\nu)$, то тогда существует $\varepsilon_0>0$ такое, что для любого $|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_0$, $\varepsilon=0$, существует изоморфизм α: $\mathfrak{A}(C\oplus\mathscr{H})\to\mathfrak{A}_F(\mathscr{H})$ такой, что

$$\tau_t^{\mathbf{V}_2}=\alpha^{-1}\circ\tau_t\circ\alpha, \tag{4.3.1}$$

где τ_t — свободная динамика идеального ферми-газа.

Доказательство. Пусть U — унитарный оператор такой, что

$$U\colon \mathbf{C}\oplus\mathscr{H}\to\mathscr{H},\quad U(h_0(\lambda)+\varepsilon V)U^{-1}=h.$$

Он существует в силу теоремы 4.2. Положим

$$\alpha a^\#(G)=a^\#(UG),\quad G\in\mathbf{C}\oplus\mathscr{H}.$$

Тогда

$$\tau_t^{\mathbf{V}_2}(a(G))=\alpha a^\#\left(e^{it(h_0(\lambda)+\varepsilon V_2)}G\right)=a^\#\left(e^{it(h_0(\lambda)+\varepsilon V_2)}G\right),$$
$$a(e^{ith}UG)=\tau_t(\alpha(a(G))). \blacksquare \tag{4.3.2}$$

Теорема 4.5. Пусть квадратическое возмущение $\mathbf{V}_2$ имеет вид (4.1.5), причем $\hat f\in C^\infty(\mathbf{T}^\nu)$, $\lambda\notin(\mu, \mu+4\nu)$. Тогда существует такое $\varepsilon_0>0$, что при $|\varepsilon|<\varepsilon_0$ существует действительное $\lambda_\varepsilon\in(\mu, \mu+4\nu)$, $|\lambda-\lambda_\varepsilon|=O(|\varepsilon|^2)$, и $*$-автоморфизм θ C^*-алгебры

$\mathfrak{A}(C\oplus\mathscr{H})$ в себя, такой, что

$$\theta\tau_t^{V_2}\theta^{-1}=\tau_t', \qquad (4.3.3)$$

где $\tau_t'(a^{\#}(G))=a^{\#}(e^{ith_0(\lambda_\varepsilon)}G)$.

Доказательство. Теорема 4.6 доказывается аналогично теореме 4.4 и следует из теоремы 4.2.

Теперь рассмотрим неквадратическое возмущение вида

$$V=\varepsilon V_2+\varepsilon'\overline{V}, \qquad (4.3.4)$$

где $\overline{V}=\overline{V}^*$ есть конечная сумма мономов вида

$$a^*(F_1)\ldots a^*(F_m)a(G_1)\ldots a(G_n), \qquad (4.3.5)$$

где $m+n$ — четно и F_i, $G_j\in C\oplus\mathscr{H}$.

Теорема 4.6. Пусть квадратическое возмущение V_2 имеет вид (4.1.5), причем $\hat{f}\in C^\infty(T^\nu)$ и $\hat{f}$ не равно тождественно нулю ни на какой поверхности уровня функции

$$h(k)=\sum_{l=1}^{\nu}2(1-\cos(k_l))+\mu.$$

Пусть $\overline{V}$ имеет вид (4.3.5), причем все F_l, G_l имеют вид $F_l=(c_l, f_l)$, $G_l=(d_l, g_l)\in C\oplus\mathscr{H}$, где $\hat{f}_l$, $\hat{g}_l\in C^\infty(T^\nu)$.

Если $\lambda\in(\mu, \mu+4\nu)$, то тогда существуют $\varepsilon_0>0$, такие, что для любого $|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_0$, $\varepsilon\neq0$, существует $\varepsilon'(\varepsilon)>0$ такое, что при $|\varepsilon_0'|\leqslant\varepsilon'$, существует $*$-изоморфизм $\alpha:\mathfrak{A}(C\oplus\mathscr{H})\to\mathfrak{A}_F(\mathscr{H})$ такой, что

$$\alpha\tau_t^V\alpha^{-1}=\tau_t^0, \qquad (4.3.6)$$

то есть, динамика τ_t^V изоморфна свободной динамике τ_t^0 идеального ферми-газа.

Доказательство. По теореме 4.1. достаточно доказать изоморфизм τ_t^V и $\tau_t^{V_2}$. Данный факт будет следовать из существования прямых и обратных морфизмов Меллера

$$\gamma=s-\lim_{t\to\infty}\tau_{-t}^V\tau_t^{V_2}, \qquad (4.3.7)$$

$$\hat{\gamma}=s-\lim_{t\to\infty}\tau_{-t}^{V_2}\tau_t^V. \qquad (4.3.8)$$

Воспользуемся критерием Кука. Рассмотрим плотное множество

$$\mathfrak{A}_0=\{a^*(F_1)\ldots a^*(F_m)a(G_1)\ldots a(G_n), m, n\geqslant0, \hat{f}_l, \hat{g}_l\in C^\infty(T^\nu)\}$$

в C^*-алгебре $\mathfrak{A}$.

Повторяя доказательство теоремы 2.4, видим, что нам достаточно доказать, что

$$(e^{it(h_0(\lambda)+V_2)}F, G)\in L_1(-\infty, \infty)$$

для любых $F=(c, f)$, $G=(d, g)\in \mathbf{C}\oplus\mathscr{H}$, где $\hat{f}, \hat{g}\in \mathbf{C}^\infty(\mathbf{T}^\nu)$, что и утверждается теоремой 4.3. Заметим, что как и в теореме 2.4, здесь не требуется малость параметра $\varepsilon'\in\mathbf{R}$.

Аналогично, повторяя доказательство теоремы 2.6 для малых ε', мы докажем существование обратных морфизмов Меллера $\hat{\gamma}_\pm$. ■

§ 4.4. Ферми-газ и частица в основном состоянии

Результаты данного параграфа относятся к динамике системы, состоящей из ферми-газа и взаимодействующего с ним спина, в основном состоянии.

Пусть $\langle\ \rangle^{\mathrm{F}}$ — основное состояние ферми-газа, т. е. квазисвободное состояние с $B=0$, $\beta=+\infty$, $\langle\ \rangle^{\mathrm{sp}}$ — основное состояние на $\mathfrak{B}$. Тогда

$$\langle\ \rangle=\langle\ \rangle^{\mathrm{sp}}\otimes\langle\ \rangle^{\mathrm{F}} \tag{4.4.1}$$

есть состояние на $\mathfrak{A}$.

Оператор $\mathscr{H}_{\mathrm{GNS}}$ имеет следующую структуру, похожую на структуру фоковского пространства:

$$\mathscr{H}_{\mathrm{GNS}}=\mathscr{F}_{\mathrm{as}}(\mathbf{C})\otimes\mathscr{F}_{\mathrm{as}}(\mathscr{H})\equiv\mathscr{F}_{\mathrm{as}}(\mathbf{C}\oplus\mathscr{H}).$$

1) В $\mathscr{H}_{\mathrm{GNS}}$ выделен вектор Ω, $\|\Omega\|=1$, называемый вакуумным, причем

$$(1_b\otimes a(f))\Omega=0,\ \forall f\in\mathscr{H} \tag{4.4.2}$$
$$(b\otimes 1_{\mathrm{F}})\Omega=0;$$

2) линейная оболочка векторов

$$1_b\otimes a^*(f_1)\ \dots\ a^*(f_n)\,\Omega,$$
$$b^*\otimes a^*(f_1)\ \dots\ a^*(f_n)\,\Omega,$$

где $f_i, g_j\in\mathscr{H}$, $n, m\geq 0$, плотна в $\mathscr{H}_{\mathrm{GNS}}$.

Свободная динамика τ_t^0 в $\mathfrak{A}$, определенная (4.1.4), индуцирует в $\mathscr{H}_{\mathrm{GNS}}$ динамику, задаваемую оператором

$$H=H_0(\lambda)=d\Gamma(h_0(\lambda)):$$

$$e^{itH_0(\lambda)}1_b\otimes a^*(f_1)\dots a^*(f_n)\Omega=$$
$$=1_b\otimes a^*(e^{ith}f_1)\dots a^*(e^{ith}f_n)\Omega, \tag{4.4.3}$$

$$e^{itH_0(\lambda)}b^*\otimes a^*(f_1)\dots a^*(f_n)\Omega=$$
$$=e^{it\lambda}b^*\otimes a^*(e^{ith}f_1)\dots a^*(e^{ith}f_n)\Omega. \tag{4.4.4}$$

Заметим, что $H_0(\lambda)$ имеет единственную точку (кроме нуля) дискретного спектра λ, которая соответствует собственному вектору $(b^*\otimes 1_{\mathrm{F}})\Omega$.

Пусть

$$H_\varepsilon(\lambda)=H_0(\lambda)+\varepsilon\mathbf{V}, \tag{4.4.5}$$

причем возмущенный оператор $\mathbf{V}$ имеет вид

$$\mathbf{V}=b^*\otimes C+b\otimes C^*, \tag{4.4.6}$$

где

$$C=\sum_{j=1}^{M} a^{\#}(f_1^{(j)})\dots a^{\#}(f_{k_j}^{(j)}),\quad k_j>0,\quad M<\infty. \tag{4.4.7}$$

Далее, мы будем иметь две существенно разные ситуации, которые зависят от того, изменяется или нет дискретный спектр оператора $H_0(\lambda)$ при возмущении оператором $\mathbf{V}=\mathbf{V}^*$, то есть выполнено или нет условие

$$\mathbf{V}b^*\Omega=0. \tag{4.4.8}$$

Условие (4.4.8) имеет место, если оператор $a^{\#}(f_{k_j}^{(j)})$ является оператором умножения, а оператор $a^{\#}(f_1^{(j)})$ — оператором рождения. В этом случае вектор $b^*\otimes 1_F\Omega$ является собственным для $H_\varepsilon(\lambda)$ с собственным значением λ.

Таким образом, в этом случае дискретный спектр $H_\varepsilon(\lambda)$ совпадает с дискретным спектром $H_0(\lambda)$. Более того, в этом случае верна теорема:

Теорема 4.7. Пусть взаимодействие $\mathbf{V}$ имеет вид (4.4.6), причем для всех $j=1,\dots,M$ оператор $a^{\#}(f_{k_j}^{(j)})$ есть оператор уничтожения, а оператор $a^{\#}(f_1^{(j)})$ — рождения. Тогда существует $\varepsilon_0(\mathbf{V})>0$, такое, что для $|\varepsilon|<\varepsilon_0$ операторы $H_0(\lambda)$ и $H_\varepsilon(\lambda)$ унитарно эквивалентны при любом $\lambda\in\mathbf{R}$.

Доказательство. Мы докажем существование прямых $W_\pm$ и обратных $W_\pm$ волновых операторов при малых ε.

Например, докажем, что $W_\pm$ существует на плотном множестве $\mathscr{D}\subseteq\mathscr{H}_{\mathrm{GNS}}$, где $\mathscr{D}$ состоит из конечных линейных комбинаций векторов вида

$$1_b\otimes a^*(f_1)\dots a^*(f_n)\Omega,$$
$$b^*\otimes a^*(f_1)\dots a^*(f_n)\Omega,$$

а $f_i, g_j\in\mathscr{H}$ имеют конечные носители в $\mathbf{Z}^\nu$.

Воспользуемся выражением $\widehat{W}_\pm$ в виде ряда (2.4.6). Для $\Phi\in\mathscr{D}$ имеем

$$\widehat{W}_\pm(t)\Phi=\Phi+\sum_{i=1}^{\infty}(-i\varepsilon)^n\int\limits_{\Delta_n^{0,t}}dt_1\dots dt_n\,\mathbf{V}(t_n)\dots\mathbf{V}(t_1)\Phi, \tag{4.4.9}$$

$$\widehat{W}_\pm\Phi=\lim_{t\to\pm\infty}\widehat{W}_\pm(t)\Phi,$$

где $\Delta_n^{0,t}=\{(t_1,\dots,t_n),\ 0<t_1<\dots<t_n<t\}$ и

$$\mathbf{V}(t)=e^{itH_0(\lambda)}\mathbf{V}e^{-itH_\varepsilon(\lambda)}=$$

$$=\sum_{j=1}^{M}\{e^{it\lambda}b^*\otimes a^\#(e^{ith}f_1^{(j)})\dots a^\#(e^{ith}f_{k_j}^{(j)})+$$

$$+e^{-it\lambda}b\otimes(a^\#(e^{ith}f_{k_1}^{(j)})\dots a^\#(e^{ith}f_{k_j}^{(j)}))^*\}. \qquad (4.4.10)$$

Так как в каждом члене оператора $V(t_i)$ крайний справа есть оператор уничтожения, мы перенесем его к вакуумному вектору Ω, пользуясь каноническими антикоммутационными соотношениями. Далее, дословно повторяя доказательство теоремы 2.8, получаем требуемое.

Если же

$$C=a(f_1)\dots a(f_k), \qquad (4.4.11)$$

то $Vb\otimes 1_F\Omega=1_b\otimes C^*\Omega\neq 0$, и мы оказываемся в гораздо более сложной ситуации, когда точечный спектр сдвигается при возмущении. В этом случае имеет место следующая теорема.

Теорема 4.8. Пусть

$$V=(b^*\otimes a(f_1)\dots a(f_k)+b\otimes a^*(f_1)\dots a^*(f_k)), \qquad (4.4.12)$$

где $f_i\in\mathscr{H}$ и имеют конечный носитель, $k\geq 1$, нечетно.

Пусть $\lambda\notin(k\mu,\ k(\mu+4\nu))$. Тогда существует $\varepsilon_0(V)>0$, такое, что для $|\varepsilon|<\varepsilon_0$ оператор $H_0(\lambda)+\varepsilon V$ унитарно эквивалентен $H_0(\lambda_\varepsilon)$, где

$$|\lambda_\varepsilon-\lambda|=O(|\varepsilon|^2). \qquad (4.4.13)$$

Доказательство. Рассмотрим подпространства $\mathscr{K}_n\subseteq\subseteq\mathscr{H}_{GNS}$, порожденное векторами вида

$$b^*\otimes a^*(g_1)\dots a^*(g_{n-k})\Omega,\quad 1_b\otimes a^*(g_1)\dots a^*(g_n)\Omega,$$

при $n>k$,

$$b^*\otimes 1_F\Omega,\quad 1_b\otimes a^*(g_1)\dots a^*(g_n)\Omega,$$

при $n=k$, и

$$1_b\otimes a^*(g_1)\dots a^*(g_n)\Omega,$$

при $n<k$.

Подпространство $\mathscr{K}_n$ инвариантно относительно $H_0(\lambda)$ и $H_\varepsilon(\lambda)$. Докажем это, например, при $n=k$. Действительно, имеем

$$Vb^*\otimes 1_F=C^*\Omega\in\mathscr{K}_n$$

$$V1_b\otimes a^*(g_1)\dots a^*(g_k)\Omega=b^*\otimes Ca^*(g_1)\dots a^*(g_k)\Omega=$$

$$=\mathrm{const}(b^*\otimes 1_F)\Omega\in\mathscr{K}_n.$$

Инвариантность $\mathscr{K}_n$ относительно $H_0(\lambda)$ очевидна.

Таким образом, мы представили наше $\mathscr{H}_{GNS}$ в виде

$$\mathscr{H}_{GNS}=\bigoplus_{n=1}^{\infty}\mathscr{K}_n.$$

Собственный вектор оператора $H_0(\lambda)$ будем искать в подпространстве $\mathscr{K}_k$.

Подпространство $\mathscr{H}_k$ изоморфно пространству

$$L = \mathbf{C}\oplus L_{2,\mathrm{as}}((\mathbf{T}^{\nu})^k), \qquad (4.4.14)$$

где $L_{2,\mathrm{as}}((\mathbf{T}^{\nu})^k)$ есть пространство антисимметрических функций $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$, $x_i \in \mathbf{T}^{\nu}$ с интегрируемым квадратом.

При этом изоморфизме вектор $b^*\otimes 1_F\Omega\in\mathscr{H}_k$ переходит в вектор

$$\psi_0 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\in L.$$

Вектор вида $1_b\otimes a^*(g_1)\ldots a^*(g_k)$ переходит в

$$\frac{1}{\sqrt{k!}}P_-(\hat{g}_1(x_1)\ldots\hat{g}_k(x_k))\in L_{2,\mathrm{as}}((\mathbf{T}^{\nu})^k), \qquad (4.4.15)$$

где $q_i\in L_2(\mathbf{T}^{\nu})$ есть преобразование Фурье функции $g_i\in l_2(\mathbf{Z}^{\nu})$, а P_- есть оператор антисимметризации. Обозначим образ вектора $\varepsilon(1_b\otimes C^*)\Omega$ через $\varphi_\varepsilon\in L$. Так как все f_i имеют конечный носитель в $\mathbf{Z}^{\nu}$, то f_i — бесконечно дифференцируемая функция на $\mathbf{T}^{\nu}$, а φ_ε — бесконечно дифференцируемая функция на $(\mathbf{T}^{\nu})^k$. Легко видеть, что оператор $H_\varepsilon(\lambda)$ в этом представлении на L выглядит следующим образом

$$(H_\varepsilon(\lambda))\begin{pmatrix}d\\g\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda d + (g, \varphi_\varepsilon)\\ \varphi_\varepsilon + ug\end{pmatrix}, \qquad (4.4.16)$$

для всех $\begin{pmatrix}d\\g\end{pmatrix}\in L$, где

$$u(x_1, \ldots, x_k) = \sum_{l=1}^{k}\sum_{j=1}^{\nu} 2\,(1-\cos(x_l^{(j)})), \quad x_l\in\mathbf{T}^{\nu}. \qquad (4.4.17)$$

Так как λ не принадлежит непрерывному спектру оператора умножения на u, который, очевидно, есть $[k\mu, k(\mu+4\nu)]$, то при достаточно малых ε у оператора $H_\varepsilon(\lambda)$ существует собственное значение $\lambda_\varepsilon\notin[k\mu, k(\mu+4\nu)]$, причем собственный вектор f_ε с точностью до нормирующего множителя есть

$$f_\varepsilon = \frac{\varphi_\varepsilon}{u-\lambda_\varepsilon}\in L_{2,\mathrm{as}}((\mathbf{T}^{\nu})^k). \qquad (4.4.18)$$

Из (4.4.18) видно, что f_ε есть бесконечно дифференцируемая функция, поэтому собственный вектор b_ε^* оператора $H_\varepsilon(\lambda)$ в пространстве $\mathscr{H}_k$ имеет вид

$$b_\varepsilon^* = (b^*\otimes 1_F)\,\Omega + 1_b\otimes F_\varepsilon\Omega, \qquad (4.4.19)$$

где F_ε принадлежит подпространству, порожденному векторами вида

$$a^*(g_1)\ldots a^*(g_k)\Omega_F. \qquad (4.4.20)$$

Рассмотрим предел

$$\gamma(A)=\lim_{t\to\infty}\tau_{-t}^{\varepsilon V}\tau_t^0(A) \tag{4.4.21}$$

для всех $A\in 1_b\otimes\mathfrak{A}_F(\mathscr{H})$.

Предел (4.4.21) существует при всех ε. Действительно, нетрудно заметить, что мы можем повторить доказательство теоремы 2.4, так как в нашем случае взаимодействие $\mathbf{V}$ четно и

$$(i^{ith}f_j, f_j)\in L_1(-\infty, +\infty). \tag{4.4.22}$$

Лемма 4.9. Положим

$$\bar{a}^{\#}(f)\overset{\text{def}}{=}\gamma(a^{\#}(f)), \tag{4.4.23}$$

тогда

$$\bar{a}(f)\,b_\varepsilon^*=0, \tag{4.4.24}$$

$$\bar{a}(f)\,\Omega=0, \tag{4.4.25}$$

где Ω есть собственный вектор оператора $H_\varepsilon(\lambda)$ в $\mathscr{H}_k$.

Доказательство. Заметим, что если $X\in\mathscr{H}_k$, то $\bar{a}(f)X\in\mathscr{H}_{k-1}$, потому, что в силу инвариантности всех $\mathscr{H}_k$ относительно операторов $H_0(\lambda)$, $H_\varepsilon(\lambda)$, и того, что $a(f):\mathscr{H}_k\to\mathscr{H}_{k-1}$, имеем

$$\tau_{-t}^{\varepsilon V}\tau_t^0(a(f))X=e^{-itH_\varepsilon(\lambda)}e^{itH_0(\lambda)}a(f)\,e^{-itH_0(\lambda)}e^{itH_\varepsilon(\lambda)}X\in\mathscr{H}_{k-1}$$

при любом $t\in\mathbf{R}$.

Следовательно $\bar{a}(f)\,b_\varepsilon^*\in\mathscr{H}_{k-1}$. Пусть $1_b\otimes a^*(g_1)\dots a^*(g_{k-1})\Omega$, где $g_i\in\mathscr{H}$ выбраны произвольно. Докажем, что

$$(\bar{a}(f)\,b_\varepsilon^*,\ 1_b\otimes a^*(g_1)\dots a^*(g_{k-1})\Omega)=0.$$

Действительно

$$\tau_{-t}^{\varepsilon V}\tau_t^0(1_b\otimes a^*(g_1)\dots a^*(g_{k-1}))\Omega=1_b\otimes a^*(g_1)\dots a^*(g_{k-1})\Omega,$$

так как $\mathbf{V}\mathscr{H}_{k-1}\equiv 0$, поэтому

$$\bar{a}^*(g_1)\dots\bar{a}^*(g_{k-1}))\,\Omega=a^*(g_1)\dots a^*(g_{k-1})\Omega. \tag{4.4.26}$$

Далее имеем

$$(\bar{a}(f)\,b_\varepsilon^*,\ a^*(g_1)\dots a^*(g_{k-1})\Omega)=(\bar{a}(f)\,b_\varepsilon^*,\ \bar{a}^*(g_1)\dots\bar{a}^*(g_{k-1})(\Omega)=$$
$$=(b_\varepsilon^*,\ a^*(f)\,a^*(g_1)\dots a^*(g_{k-1})\Omega)=0,$$

где во втором равенстве мы воспользовались тождеством (4.4.26).

Таким образом, мы получаем, что вектор $\bar{a}(b_\varepsilon^*)$, с одной стороны, принадлежит $\mathscr{H}_{k-1}$, а с другой стороны, ортогонален любому элементу из $\mathscr{H}_{k-1}$. Это означает, что $\bar{a}(f)(b_\varepsilon^*)$ равен нулю. Равенство (4.4.24) доказано. Равенство (4.4.25) очевидно в силу отсутствия поляризации вакуума.

Определим подпространства $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{H}_{\mathrm{GNS}}$, как замыкание линейной оболочки векторов вида

$$\bar{a}^*(g_1)\ldots\bar{a}^*(g_n)\Omega, \quad \bar{a}^*(g_1)\ldots\bar{a}^*(g_m)b_\varepsilon^*, \quad m, n \geqslant 0.$$

Пусть $\{e_n, n \geq 1\}$ есть некоторый ортонормированный базис в $\mathcal{H}$.

Положим

$$\varphi_{i_1,\ldots,i_n} = 1_b \otimes a^*(e_{i_1})\ldots a^*(e_{i_n})\Omega,$$

$$\psi_{i_1,\ldots,i_n} = b^* \otimes a^*(e_{i_1})\ldots a^*(e_{i_n})\Omega.$$

Тогда

$$S = \{\Omega, b^* \otimes 1_F\Omega, \varphi_{i_1,\ldots,i_n}, \psi_{i_1,\ldots,i_n}, 1 \leqslant i_1 < \ldots < i_n, n \geqslant 1\}$$

есть ортонормированный базис в $\mathcal{H}_{\mathrm{GNS}}$. Это легко проверить, если использовать канонические антикоммутационные соотношения.

Аналогично, пусть

$$\hat{\varphi}_{i_1,\ldots,i_n} = \bar{a}^*(e_{i_1})\ldots\bar{a}^*(e_{i_n})\Omega,$$

$$\hat{\psi}_{i_1,\ldots,i_n} = \bar{a}^*(e_{i_1})\ldots\bar{a}^*(e_{i_n})b_\varepsilon^*/\|b_\varepsilon\|.$$

Тогда

$$S = \{\Omega, b_\varepsilon^*, \hat{\varphi}_{i_1,\ldots,i_n}, \hat{\psi}_{i_1,\ldots,i_n}, 1 \leqslant i_1 < \ldots < i_n, n \geqslant 1\}$$

есть ортонормированный базис в $\mathcal{F}'$. В этом также нетрудно убедиться.

Определим изометрический оператор $U: \mathcal{H}_{\mathrm{NGS}} \to \mathcal{F}'$ следующим образом

$$U\Omega = \Omega,$$

$$U(b^* \otimes 1_F)\Omega = b_\varepsilon^*,$$

$$U\varphi_{i_1,\ldots,i_n} = \hat{\varphi}_{i_1,\ldots,i_n},$$

$$U\psi_{i_1,\ldots,i_n} = \hat{\psi}_{i_1,\ldots,i_n}.$$

Кроме того, имеет место соотношение

$$(H_0(\lambda) + {}_\varepsilon V)U = UH_0(\lambda_\varepsilon), \tag{4.4.27}$$

которое является следствием сплетающего свойства волнового оператора.

Чтобы доказать унитарную эквивалентность $H_\varepsilon(\lambda)$ и $H_0(\lambda_\varepsilon)$. нам достаточно доказать, что $\mathcal{F}'$ совпадает с $\mathcal{H}_{\mathrm{GNS}}$, потому что из этого факта уже будет следовать унитарность U.

Включение $\mathcal{F}' \subset \mathcal{H}_{\mathrm{GNS}}$ очевидно. Обратное же включение доказать значительно труднее, и мы сформулируем его в качестве леммы.

Лемма 4.9′. Пространства $\mathcal{H}_{\mathrm{GNS}}$ и $\mathcal{F}'$ совпадают.

§ 4.5. Доказательство теорем 4.1—4.3

В данном параграфе мы докажем теорему 4.1.

Оператор возмущения V имеет ранг 2. Оператор h_0 имеет абсолютно непрерывный спектр на $[\mu, \mu+4\nu]$ и собственное значение λ.

Потребуем от функции φ, чтобы она была гладкой на $\mathbf{T}^\nu$ и не равнялась тождественно нулю ни на какой линии уровня функции h, т. е. на множестве вида

$$\{k : h(k) = \text{const}\}.$$

Теорема 4.10. Пусть операторы h_0 и h_ε имеют вид (4.2.2) и (4.2.3), соответственно. Тогда:

1) если λ лежит вне или на границе абсолютно непрерывной части спектра $[\mu, \mu+4\nu]$, то при достаточно малых ε, абсолютно непрерывная часть спектра не меняется, сингулярной не появляется, а собственное значение λ_ε лежит вне $(\mu, \mu+4\nu)$;

2) если λ лежит внутри абсолютно непрерывной части спектра $(\mu, \mu+4\nu)$, то при достаточно малых ε, дискретный спектр исчезает, абсолютно непрерывная часть спектра не меняется.

Доказательство. В силу конечности ранга возмущенного оператора абсолютно непрерывная часть спектра h_ε совпадает с абсолютно непрерывной частью спектра h_0 при любом $\varepsilon \in \mathbf{R}$.

Собственный вектор оператора h_ε, если он существует, может быть представлен в виде $\begin{pmatrix} 0 \\ \psi \end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix} 1 \\ \psi \end{pmatrix}$. Рассмотрим сначала случай $\begin{pmatrix} 0 \\ \psi \end{pmatrix}$ с собственным значением λ'. Тогда из (4.2.2) и (4.2.3) следует, что

$$h(k)\psi(k) = \lambda'\psi(k). \tag{4.5.1}$$

Следовательно $\psi(k) \equiv 0$, и этот случай невозможен.

В случае $h_\varepsilon \begin{pmatrix} 1 \\ \psi \end{pmatrix} = \lambda' \begin{pmatrix} 1 \\ \psi \end{pmatrix}$ имеем

$$\lambda + \varepsilon \int\limits_{\mathbf{T}^\nu} \psi(k)\bar{\varphi}(k)\,dk = \lambda'$$

$$\varepsilon\varphi(k) + h(k)\psi(k) = \lambda'\psi(k).$$

Следовательно,

$$\psi(k) = -\varepsilon \frac{\varphi(k)}{h(k) - \lambda'}. \tag{4.5.2}$$

Если $\lambda' \notin [\mu, \mu+4\nu]$, то тогда $\psi \in L_2(\mathbf{T}^\nu)$ и подстановкой (4.5.2) в (4.5.1) получаем уравнение на λ'

$$\lambda - \varepsilon^2 \int\limits_{\mathbf{T}^\nu} \frac{|\varphi(k)|^2}{h(k) - \lambda'} = \lambda'. \tag{4.5.3}$$

Если $\lambda'\notin(\mu, \mu+4\nu)$, то тогда для достаточно малых ε уравнение (4.5.3) имеет единственное решение λ', причем

$$\lambda'\notin[\mu, \mu+4\nu], \ |\lambda-\lambda'|=O(|\varepsilon|^2). \tag{4.5.4}$$

Пусть $\lambda\in(\mu, \mu+4\nu)$. Так как функция Φ является гладкой на $\mathbf{T}^\nu$ и не равняется тождественно нулю ни на какой линии уровня функции h, то тогда для $\lambda'\notin(\mu, \mu+4\nu)$ функция

$$\psi(k)=-\varepsilon\frac{\varphi(k)}{h(k)-\lambda'}$$

не принадлежит $L_2(\mathbf{T}^\nu)$. Поэтому для достаточно малых ε уравнение (4.5.3) не имеет решения.

В действительности, функция

$$F(\lambda')=\int_{\mathbf{T}^\nu}\frac{|\varphi(k)|^2}{h(k)-\lambda'} \tag{4.5.5}$$

является гладкой на множестве $S=\mathbf{R}\diagdown[\mu, \mu+4\nu]$, и $F(\lambda')\to0$ при $\lambda'\to\pm\infty$, причем имеет конечные пределы при $\lambda'\to\mu$ слева и при $\lambda'\to\mu+4\nu$ слева. Таким образом $F(\lambda')$ ограничена на S, и выбором ε мы можем сделать $|\varepsilon^2F(\lambda')|$ сколь угодно малым. Но

$$|\lambda-\lambda'|\geq\min\{|\lambda-\mu|, |\lambda-\mu-4\nu|\}>0.$$

Поэтому уравнение (4.5.3) не имеет решения.

Лемма 4.12. Пусть выполнены следующие условия

1) $\lambda\in\mathbf{R}\diagdown[\mu, \mu+4\nu]$, $\varphi\in C^\infty(\mathbf{T}^\nu)$

2) $\lambda\in(\mu, \mu+4\nu)$, $\varphi\in C^\infty(\mathbf{T}^\nu)$

и φ не равно тождественно нулю ни на какой линии уровня функции $h(k)=\sum_{l=1}^{\nu}2(1-\cos(k_l))+\mu$.

Тогда h не имеет сингулярного спектра для достаточно малых ε.

Доказательство. Чтобы доказать лемму 4.11, мы воспользуемся следующим хорошо известным фактом.

Утверждение 4.13 ([53]). Пусть $d\mu$ — конечная положительная мера на $\mathbf{R}$ с носителем в (a, b) и

$$v_y(x)\equiv v(x, y)=\int P_y(t-x)\,d\mu(t)$$

$$P_y(t-x)=\frac{1}{\pi}\frac{y}{(t-x)^2+y^2}.$$

а) Если $v_y(x)$ сходится к $\rho(x)\in L_1(a, b)$ при $y\to\pm0$ в L_1-норме, то $\mu(t)$ абсолютно непрерывна и $d\mu(t)\equiv\rho(t)\,dt$.

б) Если $\mu(t)$ абсолютно непрерывна и $d\mu(t)\equiv\rho(t)\,dt$, $\rho(t)\in C(\mathbf{R})$, $\rho(t)\equiv0$ для $t\notin(a, b)$, то $v_y(x)$ сходится к $\rho(x)\in L_1(a, b)$ при $y\to\pm0$ равномерно по $[a, b]$.

Существенный спектр h_0 и h_ε один и тот же. Поэтому сингулярный спектр оператора h_ε должен быть сосредоточен в $[\mu, \mu+4\nu]$. Пусть E_x есть спектральное семейство оператора h_ε. Докажем, что на плотном подмножестве векторов F, ограничение меры (E_xF, F) на $[\mu, \mu+4\nu]$ абсолютно непрерывно по отношению к мере Лебега.

Положим для $z=x+iy$, $y>0$

$$R(z)=R_F(z)=((h-z)^{-1}F, F),$$

где F будет определен позднее, и определим меру $\mu(t)$ следующим образом

$$v(x, y)\overset{\mathrm{def}}{=}\pi^{-1}\operatorname{Im} R(z)=\pi^{-1}\int \operatorname{Im}(t-z)^{-1}\, d(E_xF, F)=$$
$$=\frac{1}{\pi}\int \frac{y}{(t-x)^2+y^2}\, d(E_xF, F). \tag{4.5.6}$$

Вычисление резольвенты дает

$$(h-z)^{-1}\begin{pmatrix} c \\ \psi \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \tilde{c} \\ \tilde{\psi} \end{pmatrix},$$

где

$$\tilde{c}=\left[c-\varepsilon\int \frac{\psi\overline{\varphi}}{h-z}\, dk\right]\cdot\left[\lambda-z-\varepsilon^2\int_{T^\nu} \frac{|\varphi(k)|^2}{h(k)-z}\, dk\right]. \tag{4.5.7}$$

Пусть $S=\left\{F=\begin{pmatrix} c \\ \psi \end{pmatrix}: \psi\in C^\infty(\mathrm{T}^\nu)\right\}$. Очевидно, S всюду плотно в $C\oplus L_2(\mathrm{T}^\nu)$. Положим для краткости

$$\varphi_z(\psi)=\int \frac{\psi\overline{\varphi}}{h-z}\, dk$$

для любого $\psi\in C^\infty(\mathrm{T}^\nu)$, $\operatorname{Im} z>0$.

Зафиксируем произвольные $F=\begin{pmatrix} c \\ \psi \end{pmatrix}\in S$, $z=x+iy$, $y>0$.

Тогда

$$R(z)=\left((h-z)^{-1}\begin{pmatrix} c \\ \psi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ \psi \end{pmatrix}\right)=$$
$$=\varphi_z(|\psi|^2)+\frac{[c-\varepsilon\varphi_z(\psi\overline{\varphi})]\,[\overline{c}-\varepsilon\varphi_z(\overline{\psi}\varphi)]}{\lambda-z-\varepsilon^2\varphi_z(|\varphi|^2)}. \tag{4,5.8}$$

Лемма 4.13. Для любого $\psi\in C^\infty(\mathrm{T}^\nu)$, $\nu\geqslant 3$, $z=x+iy$, $y>0$ и любого $x\in[\mu, \mu+4\nu]$ существуют следующие пределы

$$\lim_{y\to+0} \varphi_{x+iy}(\psi)=\varphi_{x+0i}(\psi). \tag{4.5.9}$$

Более того, (4.5.) сходится равномерно на $[\mu, \mu+4\nu]$ и $F_{x+0i}(\psi)\in C([\mu, \mu+4\nu])$.

Доказательство леммы 4. Имеем

$$\varphi_z(\psi)=\int\frac{\psi(k)}{h(k)-z}\,dk=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{J(t)}{t-z}\,dt, \tag{4.5.10}$$

где $J(t)\equiv J_{\psi,h}(t)$ есть форма Гельфанда—Лере. Функция $J(t)$ имеет следующие свойства:

1. $J(t)\in C^{\infty}(\mu,\mu+4\nu)$.
2. $J(t)\equiv 0,\quad t\in\mathbb{R}\setminus(\mu,\mu+4\nu)$.
3. $|J(t)|\sim A_n(t-\mu)^{(\nu/2-1)-n},\quad t\to\mu+0$.

$|J(t)|\sim B_n(\mu+4\nu-t)^{(\nu/2-1)-n},\quad t\to\mu+4\nu-0,$

где $n=0,1,\ldots$ и A_n, B_n — некоторые константы.

Имеем

$$\varphi_z(\psi)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{(t-x)\,J(t)}{(t-x)^2+y^2}\,dt+i\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{yJ(t)}{(t-x)^2+y^2}\,dt, \tag{4.5.11}$$

Для $\nu\geqslant 3$, $J(t)$ непрерывна и, как следует из леммы 4, второе слагаемое в (4.5.11) равномерно на $[\mu,\mu+4\nu]$ стремится к $i\pi J(x)$ при $y\to+0$.

Докажем, что и первое слагаемое в (4.5.11) равномерно на всем $\mathbb{R}$ стремится к преобразованию Гильберта функции $J(t)$, т. е. к

$$GJ(x)=\int\limits_0^{\infty}\frac{J(x+t)-J(x-t)}{t}\,dt. \tag{4.5.12}$$

Легко видеть, что $J(t)$ удовлетворяет условию Гельдера

$$|J(t+\delta)-J(t)|\leqslant C|\delta|^{1/2}. \tag{4.5.13}$$

Следовательно, (4.5.12) корректно определен. Следовательно,

$$v_J(x,y)\overset{\text{def}}{=}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{(t-x)\,J(t)}{(t-x)^2+y^2}\,dt=\int\limits_0^{\infty}\frac{t\,[J(x+t)-J(x-t)]}{t^2+y^2}\,dt.$$

Из неравенства (4.5.13) следует, что

$$|v_J(x,y)-GJ(x)|=\left|\int\limits_0^{\infty}\frac{y^2}{t^2+y^2}\,\frac{t\,[J(x+t)-J(x-t)]}{t}\,dt\right|=$$

$$=O\left(\int\limits_0^{\infty}\frac{y^2t^{-1/2}}{t^2+y^2}\,dt\right)=o(1) \tag{4.5.14}$$

Таким образом, мы доказали, что $\Phi_{x+iy}(\psi)$ равномерно по $[\mu, \mu+4\nu]$ стремится к

$$\Phi_{x+i0}(\psi)=GJ_{\psi}(x)+i\pi J_{\psi}(x). \tag{4.5.15}$$

Следовательно, $J_{\psi}(x)$ удовлетворяет условию Гельдера (4.5.13), тогда $GJ_{\psi}(x)$ тоже удовлетворяет условию Гельдера с показателем $1/2-\delta'$, где $\delta'>0$ можно выбрать сколь угодно малой ([8]). Таким образом, мы получили, что функция $\Phi_{x+i0}(\psi)$ непрерывна. Лемма 4.13 доказана.

Мы получили, что для любой $\psi\in C^{\infty}(T^{\nu})$, $\nu\geqslant 3$

$$\lim_{y\to+0} R(x+iy)=\varphi_{x+i0}(|\psi|^2)+\frac{[c-\varepsilon\varphi_{x+i0}(\psi\bar{\varphi})][\bar{c}_{x+i0}-\varepsilon\varphi(\bar{\psi}\varphi)]}{\lambda-x-\varepsilon^2\varphi_{x+i0}(|\varphi|^2)}\overset{\text{def}}{=}R(x+i0) \tag{4.5.16}$$

существует. Докажем, что в (4.5.16) имеет место равномерная сходимость на любом интервале $(a, b)\subseteq(\mu, \mu+4\nu)$.

Действительно, если условие 2 леммы 4.11 удовлетворено, то тогда мнимая часть $-\varepsilon^2\pi J_{|\varphi|^2}(x)$ знаменателя в (4.2.16) не равна нулю. Если же удовлетворено условие 1 этой леммы, то тогда действительная часть $\lambda-x-\varepsilon^2 GJ_{|\varphi|^2}(x)$ знаменателя в (4.2.16) не равна нулю.

Таким образом из равномерной сходимости $\varphi_{x+i0}(\psi)$ при $y\to+0$ следует нужная нам равномерная сходимость. Утверждение 4.12 показывает, что (E_xF, F) абсолютно непрерывна на любом $(a, b)\subseteq(\mu, \mu+4\nu)$, причем

$$\rho(x)=\pi^{-1}\operatorname{Im} R(x+i0) \tag{4.5.17}$$

Лемма 4.11 полностью доказана, так как μ и $\mu+4\nu$ не являются собственными значениями оператора h_{ε}.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Айзенштадт В. В.* Унитарная эквивалентность гамильтонианов в фоковском пространстве // Успехи мат. наук.— 1988.— *39*, № 2.— С. 220—221.
2. *Ботвич Д. Д., Малышев В. А.* Доказательство асимптотической полноты равномерно по числу частиц // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1990.— *24*, № 1.— С. 132—145.
3. *Домненков А. Ш.* Асимптотическая полнота для системы частица—ферми-газ // Теор. и мат. физ.— 1987.— *71*, № 3.— С. 120—127.
4. — Марковский предел для частицы, взаимодействующей с газом // Теор. и мат. физ.— 1989.— *79*, № 2.— С. 263—271.
5. *Малышев В. А.* Кластерные разложения в решетчатых моделях статистической механики // Успехи мат. наук.— 1980.— *35*, № 2.— С. 3—53.
6. —, *Минлос Р. А.* Кластерные операторы // Тр. семинара им. И. Г. Петровского.— 1983.— Вып. 9.— С. 63—80.
7. —, — Гиббсовские случайные поля.— М.: Наука, 1985.
8. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике. 3-е изд.— М.: Наука, 1968.

9. *Сухов Ю. М.* Сходимость к равновесному состоянию для одномерной квантовой системы твердых стержней // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1982. — *46*.— С. 1274—1315.
10. — Сходимость к равновесному состоянию для свободного ферми-газа // Теор. и мат. физ.— 1983.— *55*, № 2.— С. 282—290.
11. —, *Шухов А. Г.* Сходимость к стационарному состоянию для одномерных решетчатых квантовых моделей твердых стержней // Теор. и мат. физ.— 1987.— *73*, № 1.— С. 125—140.
12. —, — Гидродинамические приближения для групп преобразований Боголюбова в квантовой статистической механике // Тр. Моск. матем. об-ва.— 1987.— *50*.— С. 156—208.
13. *Терлецкий Ю. А.* Метрический изоморфизм классического идеального газа его локальному возмущению // Теор. и мат. физ.— 1989.— *81*, № 3.— С. 323—335.
14. *Фаддеев Л. Д.* Математические вопросы квантовой теории рассеяния для системы трех частиц // Тр. мат. ин-та АН СССР.— 1963.— Вып. 69.— С. 1—122.
15. — О разделении эффектов самодействия и рассеяния по теории возмущений // Докл. АН СССР.— *152*, № 3.— С. 573—576.
16. — О модели Фридрихса в теории возмущений непрерывного спектра // Тр. мат. ин-та АН СССР.— 1964.— Вып. 73.
17. *Чистяков А. Л.* Об операторе рассеяния в пространстве вторичного квантования // Докл. АН СССР.— 1964.— *158*.— С. 66—70.
18. *Aizenstadt V. V., Malyshev V. A.* Spin interaction with an ideal fermi gas // J. Stat. Phys.— 1987.— *48*, № 1/2.— С. 51—68.
19. *Araki H.* On the dynamics and ergodic properties of the XY-model // J. Stat. Phys.— 1983.— *31*, № 2.— С. 327—346.
20. — On the *XY*-model on two-sided infinite chain // Publ. RIMS Kyoto Univ. — 1984.— *20*.— С. 255—296.
21. —, *Wyss W.* Representations of the canonical anticommutation relations // Helv. Phys. Acta.— 1964.— *37*, № 2.— С. 136—159.
22. —, *Barouch E.* On the dynamics and ergodic properties of the XY-model // J. Stat. Phys.— 1983.— *31*, № 2.— С. 327—346.
23. *Boldrighini C., Dobrushin R. L., Suhov Yu. M.* One-dimensional caricature of hydrodynamics // J. Stat. Phys.— 1983.— *31*, № 3.— P. 577—615.
24. —, *Pellegrinotti A., Triolo L.* Convergence to stationary states for infinite harmonic systems // J. Stat. Phys.— 1983.— *30*, № 1/2.— С. 123—155.
25. *Botvich D. D.* Spectral properties of GNS-Hamiltonoan in quasi-free state // Lect. Notes Math.— 1983.— *1021*.— С. 65—71.
26. —, *Malyshev V. A.* Unitary equivalence of temperature dynamics of ideal and locally pertubed fermi-gas // Commun. Math. Phys.— 1983.— *91*, № 4. — С. 301—312.
27. *Bratteli O., Robinson D. W.* Operator algebras and quantum statistical mechanics, I.— Berlin, Springer—Verlag, 1979. (Пер. на рус. яз.: *Браттели О., Робинсон Д.* Операторные алгебры и квантовая статистическая механика. 1.— М.: Мир, 1982.)
28. —, — Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics, II.— Berlin, Springer—Verlag, 1981.
29. *Buchholz D., Fredenhagen K.* Clustering, charge-screening and mass-spectrum in local quantum field theory. In: Mathematical problems in theoretical physics, K. Ososterwalder, ed.— Berlin: Springer—Verlag, 1980.
30. *Cook J. M.* The mathematics of second quantization // Trans. Amer. Math. Soc.— 1953.— *74*.— С. 222—245.
31. *Davies E. B.* Diffusion for weakly coupled quantum Oscillators // Commun. Math. Phys.— 1972.— *27*, № 4.— С. 309—325.
32. — The harmonic oscillator in a heat bath // Commun. Math. Phys.— 1973. — *33*, № 2.— С. 171—182.
33. — Markovian master equation // Commun. Math. Phys.— 1974.— *39*, № 2. — С. 91—110.

34. — Dynamics of a multilevel Wigner—Weisskopf atoms // J. Math. Phys.— 1974.— *15*, № 11.— C. 2036—2039.
35. — Particle-boson interactions and the weak coupled limit // J. Math. Phys. — 1979.— *20*, № 3.— C. 345—351.
36. — Markovian master equation III // Ann. Inst. Henri Poincaré B.— 1976. — *11*.— C. 265—273.
37. — Markovian master equation II // Math. Ann.— 1976.— *219*.— C. 147—158.
38. — Resonances, spectral consentration and exponential decay // Let. Phys. — 1975.— *1*, № 1.— C. 31—35.
39. —. Quantum Theory of Open Systems // London, Academic Press, 1976.
40. — One-Parameter Semigroups // London, Academic Press, 1982.
41. *Dobrushin R. L., Fritz J.* Nonequilibrium dynamics of two-dimensional infinite particles systems with a singular interaction // Commun. Math. Phys.— 1977.— *57*, № 1.— C. 67—75.
42. *Dümcke R.* Convergence of multi-time correlation functions in the weak and singular coupling limit // J. Math. Phys.— 1983, *24*.— C. 311—315.
43. — The low density limit for an *N*-level system interacting with free Bose or Fermi gas // Commun. Math. Phys.— 1985.— *97*, № 4.— C. 331—344.
44. *Evans D. E.* Scattering in CAR-algebra // Commun. Math. Phys.— 1976.— *48*, № 1.— C. 23—30.
45. — Positive linear maps on operator algebra // Commun. Math. Phys.— 1976.— *48*, № 1.— C. 15—22.
46. — Complete positive quasi-free maps on the CAR algebra // Commun. Math. Phys.— 1979.— *70*, № 1.— C. 53—68.
47. *Friedrichs K. O.* Perturbations of spectra in hilbert space.— Rhode Island: Amer. Math. Soc. Providence, 1965. (Пер. на рус. яз. *Фридрихс К.* Возмущение спектра операторов в гильбертовом пространстве.— М.: Мир, 1969. — 231 с.)
48. *Frigerio A., Gorini V.* N-level systems in contact with singular reservoir // J. Math. Phys.— 1976.— *17*, № 12.— C. 2123—2127.
49. —, — On stationary Markov dilations of quantum dynamical semigroups // Lect. Notes Math.— 1984.— *1055*.— P. 119—125.
50. *Glimm J., Jaffe A.*: Quantum Physics. A Functional integral Point of View. Second Edition.— N. Y., Springer—Verlag, 1988.— 535 c.
51. *Gorini V., Kossakowski A.* N-level system in contact with a singular reservoir // J. Math. Phys.— 1976.— *17*, № 7.— C. 1298—1305.
52. —, — *Sudarshan E. C. G.* Completely positive dynamical semigroups on N-level systems // J. Math. Phys.— 1976.— *17*, № 5.— C. 821—825.
53. *Gustafson K., Jonson G.* On the absolutely continuous subspace of a self-adjoint operator // Helv. Phys. Acta.— 1974.— *47*.— C. 163—166.
54. *Hepp K.* Theorie de la renormalisation.— Berlin, Springer—Verlag, 1969. (Пер. на рус. яз.: *Хепп К.* Теория перенормировок.— М., Наука, 1974.— 255 с.).
55. —, *Lieb E.* Phase transition in reservoir-driven open systems with applications to laser and superconductors // Helv. Phys. Acta.— 1973.— *46*.— C. 573—603.
56. *Hoegh-Krohn J. R.* Partly gentle perturbations with application to perturbations by annihilation-creation operators // Commun. Pure Appl. Math.— 1968.— *21*.— C. 313—342.
57. — Gentle perturbations by annihilation-creation operators // Commun. Pure Appl. Math. 1968.— *21*.— C. 343—357.
58. — Boson fields under a general class of cut-off interactions // Commun. Maeh. Phys.— 1969.— *12*, № 3.— C. 216—223.
59. — Boson fields with bounded interaction densities // Commun. Math. Phys. — 1970.— *17*, № 3.— C. 179—187.
60. — On the scattering operator for quantum fields // Commun. Math. Phys. — 1970.— *18*, № 2.— C. 109—126.
61. — A general class of quantum fields without cut-offs in two spase-time dimensions // Commun. Math. Phys.— 1971.— *21*, № 3.— C. 244—255.

62. *Iorio R., O'Carroll M.* Asymptotic completeness for multi-particle Schrödinger Hamiltonians with weak potentials // Commun. Math. Phys.— 1972.— 27, № 2.— С. 137—145.
63. *Lanford O. E., Robinson D. W.* Statistical mechanics of quantum spin systems III // Commun. Math. Phys.— 1968.— *9*, № 4.— С. 327—338.
64. —, — Approach to equilibrium of free quantum systems // Commun. Math. Phys.— 1972.— *24*, № 3.— С. 193—210.
65. *Lindblad G.* On the generators of quantum dynamical semigroups // Commun. Math. Phys.— 1976.— *48*, № 2.— С. 119—130.
66. *Maassen H.* On the invertibility of Möller morphisms // J. Math. Phys.— 1982.— *23*, № 10.— С. 1848—1851.
67. *Malyshev V. A.* Uniform cluster expansion for the lattice models // Commun. Math. Phys.— 1979.— *64*, № 2.— С. 131—157.
68. — Convergence in the linked cluster theorem for many body fermion systems // Commun. Math. Phys.— 1988.— *119*, № 4.— С. 501—508.
69. —, *Minlos R. A.* Invariant subspaces of clustering operators. I // J. Stat. Phys.— 1979.— *21*, № 3.— С. 231—242.
70. —, *Minlos R. A.* Invariant subspaces of clustering operators. II // Commun. Math. Phys.— 1981.— *82*, № 3.— С. 211—226.
71. —, *Nicolaev I., Terlecky Yu. A.* Temperature dynamics of the locally perturbed classical ideal gas // J. Stat. Phys.— 1985.— *40*, № 1/2.— С. 133—146.
72. *Palmer P. F.* The singular coupling and weal coupling limits // J. Math. Phys.— 1977.— *18*.— С. 527—529.
73. *Powers R., Störmer E.* Free states of the canonocal anti-commutation relations // Commun. Math. Phys.— 1970.— *16*, № 1.— С. 1—33.
74. *Presutti E., Sinai Ya. G., Soloveichik M. R.* Hyperbolisity and Möller—Morphism for a model of classical statistical mechanics // Progr. Phys.— 1985.— *10*.— С. 253—284.
75. *Pule G. V.* The Bloch equations // Commun. Math. Phys.— 1974.— *38*, № 3.— С. 241—256.
76. *Read M., Simon B.* Methods of modern mathematical physics. II.— N. Y.: Academic Press, 1975. (Пер. на рус. яз.: *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т. 2.— М., Мир, 1978)
77. —, — Methods of modern mathematical physics. III.— N. Y.: Academic Press, 1979. (Пер. на рус. яз.: *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т. 3.— М.: Мир, 1982)
78. —, — Methods of modern mathematical physics. IV.— N. Y.: Academic Press, 1978. (Пер. на рус. яз.: *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т. 4.— М.: Мир, 1982)
79. *Rejto P. A.* On gentle perturbations. I // Pure Appl. Math.— 1963.— *16*.— С. 279—303.
80. — On gentle perturbations. II // Pure Appl. Math.— 1964.— *17*.— С. 253—292.
81. *Robinson D. W.* Statistical mechanics of quantum spin systems // Commun. Math. Phys.— 1967.— *6*, № 2.— С. 151—160.
82. — Statistical mechanics of quantum spin systems II // Commun. Math. Phys.— 1968.— *7*, № 4.— С. 337—348.
83. — Return to equilibrium // Commun. Math. Phys.— 1973.— *31*, № 2.— С. 171—189.
84. *Rocca F., Sirague M., Testard D.* On a class of equilibrium states under Kubo—Martin—Schwinger boundary condition. I. Fermions // Commun. Math. Phys.— 1969.— *13*, № 4.— С. 317—334.
85. —, —, — On a class of eqilibrium states under Kubo—Martin—Schwinger boundary condition. II. Bosons // Commun. Math. Phys.— 1970.— *19*, № 2.— С. 119—141.
86. *Ruelle D.* Statistical mechanics, rigorous results.— N. Y., Benjamin, 1969. (Пер. на рус. яз.: *Рюэль Д.* Статистическая механика. Строгие результаты.— М.: Мир, 1971.)

87. *Shale D., Stinespring W. F.* States on the Clifford algebra // Ann. Math.— 1964.— *80.*— C. 365—381.
88. *Spohn H.* Kinetic equations from Hamiltonian dynamics: Markovian limits // Rev. Mod. Phys.— 1980.— *52.*— C. 569—615.
89. *Störmer E.* Positive linear maps of operator algebra // Acta Math.— 1963. — *110.*— C. 233—278.
90. — Spectra of states, and asymptotically abellian C^*-algebras // Commun. Math. Phys.— 1972.— *28,* № 3.— C. 279—294.
91. *Takesaki M.* Tomita's theory of modular Hilbert-algebras and its applications // Lect. Notes Math.— 1970.— *128.*