



# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Куликов, Д. А. Куликов, Бифуркация автоволин обобщенного кубического уравнения Шредингера в случае трех независимых переменных,  
*Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, 2008, выпуск 3, 23–34

<https://www.mathnet.ru/vuu123>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.91

13 мая 2025 г., 03:08:56



УДК 517.9

© А. Н. Куликов, Д. А. Куликов

**БИФУРКАЦИЯ АВТОВОЛН ОБОБЩЕННОГО КУБИЧЕСКОГО  
УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА В СЛУЧАЕ ТРЕХ НЕЗАВИСИМЫХ  
ПЕРЕМЕННЫХ<sup>1</sup>**

Для уравнения, название которого приведено в заглавии статьи, рассмотрена периодическая краевая задача. У нее существует счетное число периодических по временной переменной плоских волн. Исследован вопрос об их устойчивости и бифуркациях. Оказалось, что от каждой из них могут бифурцировать инвариантные торы размерности 2, 3, 4, в том числе и асимптотически устойчивые. Указаны отличия от аналогичной задачи, когда число пространственных переменных равно 1 или 2. В частности, найдены диапазоны параметров, когда возможна докритическая бифуркация седловых торов, а также выявлены случаи реализации устойчивых режимов с обострением. Последнее проиллюстрировано рисунками. Все результаты получены аналитически и основаны на асимптотических методах нелинейной динамики.

*Ключевые слова:* аттрактор, устойчивость, бифуркация, краевые задачи.

**Введение**

Кубическим уравнением Шредингера принято называть следующее уравнение:

$$iu_t = d\Delta u + cu|u|^2, \quad (0.1)$$

где  $u = u(t, x, y, z)$  — комплекснозначная функция,  $\Delta$  — оператор Лапласа по пространственным переменным  $x, y, z$ . Здесь  $d, c$  — действительные постоянные, причем  $d > 0$ , а знак  $c$  произволен. Уравнение (0.1) возникает во многих задачах нелинейной оптики и гидродинамики [1–5], в частности, в теории волн конечной амплитуды на поверхности глубокой жидкости. Так, в монографии [2] отмечается, что это уравнение используется в нелинейной оптике при изучении узких пучков, а также изучении неустойчивости волновых пакетов. Как известно, в результате малых модуляций неустойчивый волновой пакет переходит в режимы более сложной структуры. Эти и иные сложные нелинейные эффекты позволили объяснить один из наиболее эффектных экспериментов нелинейной оптики — генерации второй гармоники.

В случаях когда необходимо учитывать диссипативные процессы, это уравнение нуждается в обобщении. Простейшим таким обобщением служит уравнение

$$iu_t = d\Delta u + (c - i)u|u|^2 + iu, \quad (0.2)$$

которое получается из уравнения (0.1) при добавлении слагаемого  $iu$ , отвечающего за «подкачку» энергии, и слагаемого  $-iu|u|^2$ , характеризующего его диссипацию.

Уравнение (0.2) удобно переписать в следующем виде:

$$u_t = u - (1 + ic)u|u|^2 - id\Delta u. \quad (0.3)$$

Его можно интерпретировать как частный случай известного уравнения Гинзбурга–Ландау (Курамото–Цузуки)

$$u_t = u - (1 + ic)u|u|^2 + (d_1 + id)\Delta u,$$

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 07-01-00473).

если учтена дифракция, но отсутствует диффузионный член ( $d_1 = 0$ ). Такая ситуация типична для лазерных резонаторов и других нелинейных оптических сред. Уравнение (0.2) описывает в этом случае пространственную эволюцию электромагнитного пакета в указанных средах.

Само уравнение Гинзбурга–Ландау, благодаря идеям А. Тьюринга, И. Пригожина, стало модельным для многих разделов физики, где приходится учитывать нелинейные эффекты. Кроме упомянутых приложений, оно использовалось при описании ветровых волн на воде, морфогенеза, ряда неустойчивостей в плазме. Такое широкое его применение основано на простом физическом соображении. Уравнение Гинзбурга–Ландау описывает ситуацию «взаимодействия осцилляторов», каждый из которых сам по себе обладает автоколебательной динамикой [5–6].

Возвратимся к обсуждению частного случая уравнения Гинзбурга–Ландау, то есть (0.3). Кроме упомянутых приложений, оно встречается в гидродинамике [7], где служит одним из обобщений классического уравнения Ландау и используется при изучении слабонелинейных эффектов.

Одним из возможных сценариев перехода к хаосу (развитой турбулентности) согласно Ландау является докритическая неустойчивость, то есть когда линейный анализ показывает формальную устойчивость стационарного режима, но более существенные возмущения приводят к нарастанию колебаний. Тогда согласно этому сценарию при уменьшении числа Рейнольдса может произойти «быстрое» («внезапное», «дикое») развитие турбулентности. В близких ситуациях иногда речь идет о жесткой турбулентности [5, 8]. Как было показано ранее [9–11], в случае одной и двух пространственных переменных вариант жесткого возбуждения колебаний не может быть реализован. Иная ситуация, как будет показано далее, имеет место для случая трех пространственных переменных, что подтверждает некоторые предположения из [5, 8].

Обоснование этих физических представлений основано на использовании метода Крылова–Боголюбова, адаптированного к нелинейным краевым задачам с частными производными [12].

Будем считать, что функция  $u(t, x, y, z)$  периодична по пространственным переменным:

$$u(t, x + 2\pi, y, z) = u(t, x, y + 2\pi, z) = u(t, x, y, z + 2\pi) = u(t, x, y, z). \quad (0.4)$$

Такой выбор краевых условий предложен, например, в работе [8]. Пусть  $D = \{(x, y, z), -\pi \leq x \leq \pi, -\pi \leq y \leq \pi, -\pi \leq z \leq \pi\}$ . В качестве фазового пространства решений краевой задачи следует выбрать [13] пространство Соболева  $W_2^2(D)$ . Полезно для дальнейшего отметить, что справедливо утверждение.

**Лемма 1.** *Краевая задача (0.3), (0.4) диссипативна в норме пространства  $L_2(D)$ .*

Доказательство леммы достаточно стандартно и может быть получено из конструкций работы [8]. Лемма 1 лишь подкрепляет тот факт, что в уравнении (0.3) было введено диссипативное слагаемое.

Краевая задача (0.3), (0.4) имеет счетное семейство решений вида

$$u_{k,m,n}(t, x, y, z) = \exp(i(\sigma_{k,m,n}t + kx + my + nz)), \quad (0.5)$$

где  $\sigma_{k,m,n} = -c + d(k^2 + m^2 + n^2)$ ,  $k, m, n \in \mathbb{Z}$ .

Изучение устойчивости и бифуркаций плоских бегущих волн (0.5) облегчает принцип самоподобия [14], суть которого заключается в следующем. В уравнении (0.3) выполним замену

$$\begin{aligned} u(t, x, y, z) &= v(t, x + 2dkt, y + 2dmt, z + 2dnt) \times \\ &\times \exp(i(d(k^2 + m^2 + n^2)t + kx + my + nz)), \end{aligned} \quad (0.6)$$

которая переводит уравнение (0.3) снова в это же уравнение, но уже для функции  $v(t, x, y, z)$  и с теми же краевыми условиями (0.4). Поэтому для краевой задачи

$$v_t = v - (1 + ic)v|v|^2 - id\Delta v, \quad (0.7)$$

$$v(t, x + 2\pi, y, z) = v(t, x, y + 2\pi, z) = v(t, x, y, z + 2\pi) = v(t, x, y, z) \quad (0.8)$$

достаточно рассмотреть вопрос о структуре окрестности однородного периодического решения

$$v(t, x, y, z) = v_0(t) = \exp(-ict), \quad (0.9)$$

которое часто называют термодинамической ветвью.

### § 1. Условия устойчивости бегущих волн

Для изучения этого вопроса, как только что было отмечено, достаточно исследовать устойчивость решения (0.9). Для этого в (0.7) положим

$$v(t, x, y, z) = \exp(-ict)(1 + w(t, x, y, z)). \quad (1.1)$$

После линеаризации для комплекснозначной функции  $w(t, x, y, z)$  получаем следующее уравнение:

$$w_t = Aw, \quad (1.2)$$

где функция  $w(t, x, y, z)$  удовлетворяет краевым условиям (0.4), а оператор  $Aw = -(1+ic)(w + \bar{w}) - id\Delta w$ . Для исследования устойчивости решения (0.9) исследуем спектр линейного дифференциального оператора  $A$ , то есть найдем те  $\lambda$ , при которых существуют нетривиальные решения у краевой задачи  $Af = \lambda f$ , где  $f = f(x, y, z)$  – комплекснозначная функция. Пусть  $f = f_1 + if_2$ . В итоге для определения собственных значений приходим к краевой задаче в  $\mathbb{R}^2$  :

$$AF = \lambda F,$$

где в последнем равенстве

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} f_1(x, y, z) \\ f_2(x, y, z) \end{pmatrix}, \quad AF = \begin{pmatrix} -2f_1 & d\Delta f_2 \\ -2cf_1 - d\Delta f_1 & 0 \end{pmatrix},$$

а компоненты вектор-функции  $F(x, y, z)$  периодичны по  $x, y, z$  с периодом  $2\pi$ . Так как система функций

$$e_{k,m,n}(x, y, z) = \exp(i(kx + my + nz)), \quad k, m, n \in \mathbb{Z},$$

образует полную ортогональную систему функций в классе периодических по  $x, y, z$  с периодом  $2\pi$  функций, то собственные функции линейного оператора  $A$  можно и следует искать в следующем виде:

$$F = a \exp(i(kx + my + nz)),$$

где  $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ ,  $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ . После элементарных преобразований задача сводится к исследованию счетного семейства характеристических уравнений

$$\det \begin{pmatrix} -2 - \lambda & -d(k^2 + m^2 + n^2) \\ d(k^2 + m^2 + n^2) - 2c & -\lambda \end{pmatrix} = 0$$

или

$$\lambda^2 + 2p\lambda + q = 0.$$

Здесь  $k, m, n \in \mathbb{Z}$ ,  $p = 1$ , а  $q = q_{k,m,n} = d(k^2 + m^2 + n^2)[d(k^2 + m^2 + n^2) - 2c]$ . Если при всех  $k, m, n$  справедливо неравенство  $q_{k,m,n} > 0$ , то исследуемое решение будет асимптотически устойчиво. Если же при некоторых целых  $k_0, m_0, n_0$  справедливо неравенство  $q_{k_0, m_0, n_0} < 0$ , то периодическое решение (0.9) неустойчиво. Критический случай в задаче об устойчивости выделяется посредством двух следующих условий:  $q_{k_0, m_0, n_0} = 0$  для некоторых  $k_0, m_0, n_0 \in \mathbb{Z}$ , а для остальных  $k, m, n$  уже справедливо неравенство  $q_{k,m,n} > 0$ .

**Лемма 2.** *Критический случай в задаче об устойчивости реализуется, если  $d = 2c$ .*

Доказательство леммы элементарно следует из анализа знака  $q_{k,m,n}$ .

Возвратимся к рассмотрению дифференциального оператора  $A$  в комплексной форме записи, то есть рассмотрим  $Af = -(1 + ic)(f + \bar{f}) - id\Delta f$ . Легко проверить справедливость следующего утверждения.

**Лемма 3.** При  $d = 2c$  оператор  $A$  имеет нулевое собственное значение кратности 7, которому отвечают собственные функции

$$e_0 = i, e_1 = (-c + i) \cos x, e_2 = (-c + i) \cos y, e_3 = (-c + i) \cos z,$$

$$e_4 = (-c + i) \sin x, e_5 = (-c + i) \sin y, e_6 = (-c + i) \sin z.$$

Сразу отметим, что если рассмотреть тот же дифференциальный оператор  $A$ , но определенный на достаточно гладких функциях, удовлетворяющих условию Неймана

$$\frac{\partial f}{\partial x}|_{x=0} = \frac{\partial f}{\partial x}|_{x=\pi} = \frac{\partial f}{\partial y}|_{y=0} = \frac{\partial f}{\partial y}|_{y=\pi} = \frac{\partial f}{\partial z}|_{z=0} = \frac{\partial f}{\partial z}|_{z=\pi} = 0, \quad (1.3)$$

то при  $d = 2c$  он будет иметь четырехкратное нулевое собственное значение. Этому собственному значению отвечают первые четыре собственных элемента из указанных выше, а остальные точки его спектра лежат в полуплоскости комплексной плоскости, выделяемой неравенством  $\operatorname{Re} \lambda \leq -\gamma_0 < 0$ . В рассматриваемом случае постоянную  $\gamma_0 > 0$  можно указать конструктивно. При  $c \in (0; \sqrt{2}/4)$  нетрудно вычислить, что  $\gamma_0 = 1 - \sqrt{1 - 8c^2}$ , а при  $c \geq 1/(\sqrt{2}/4)$  постоянная  $\gamma_0 = 1$ .

Для дальнейших построений целесообразно отметить следующий факт. Рассмотрим неоднородное уравнение

$$Af = g(x, y, z), \quad (1.4)$$

где  $g(x, y, z) = g_{k,m,n} \cos kx \cos ky \cos kz$ , а  $k, m, n = 0; 1; 2, \dots, g_{k,m,n} \in \mathbb{C}$ . Анализируя краевую задачу (1.4), (1.3), следует различать три случая:

$$1) k = m = n = 0; \quad 2) k = 1, m = n = 0; \quad m = 1, k = n = 0; \quad n = 1, k = m = 0;$$

$$3) k^2 + m^2 + n^2 > 1.$$

**Лемма 4.** В первом случае краевая задача (1.4), (1.3) разрешима, если

$$\operatorname{Im} g_{0,0,0} = c \operatorname{Re} g_{0,0,0},$$

во втором — при выполнении равенств

$$\operatorname{Im} g_{1,0,0} = \operatorname{Im} g_{0,1,0} = \operatorname{Im} g_{0,0,1} = 0.$$

Наконец, в третьем случае неоднородная краевая задача (1.4), (1.3) разрешима при любом выборе комплексной постоянной  $g_{k,m,n}$ .

## § 2. Нормальная форма вспомогательной задачи

Прежде чем изучать структуру окрестности однородного цикла (0.9) краевой задачи (0.7), (0.8) целесообразно рассмотреть следующую вспомогательную бифуркационную задачу:

$$v_t = v - (1 + ic)v|v|^2 - i(2c - \varepsilon)\Delta v, \quad (2.1)$$

$$v_x|_{x=0} = v_x|_{x=\pi} = v_y|_{y=0} = v_y|_{y=\pi} = v_z|_{z=0} = v_z|_{z=\pi} = 0. \quad (2.2)$$

Здесь  $(x, y, z) \in D_1 = \{0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi, 0 \leq z \leq \pi\}$ , условия периодичности временно заменены на условия непроницаемости (однородные условия Неймана),  $\varepsilon$  — малый параметр. Равенство (0.9) по-прежнему задает периодическое решение и краевой задачи (2.1), (2.2). При  $\varepsilon > 0$  этот цикл теряет устойчивость. Поэтому становится осмысленной задача о локальных

бифуркациях данного решения. Эту задачу будем исследовать на основе применения метода нормальных форм, адаптированного к специфике краевой задачи (2.1), (2.2).

Из результатов п. 1 и теоремы о центральном инвариантном многообразии [15–17] вытекает, что динамику решений краевой задачи (2.1), (2.2) определяет система из четырех обыкновенных дифференциальных уравнений — нормальная форма. Для ее построения положим

$$v(t, x, y, z) = \exp(i(-ct + \varphi))(1 + w(t, x, y, z, \varepsilon, \eta_1, \eta_2, \eta_3)). \quad (2.3)$$

Здесь  $\varphi = \varphi(t)$ ,  $\eta_j = \eta_j(t)$  ( $j = 1, 2, 3$ ) — действительные функции  $t$ , определяемые следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\dot{\varphi} = G_0(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \varphi), \quad \dot{\eta}_j = G_j(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \varphi), \quad (2.4)$$

где  $j = 1, 2, 3$ , а  $G_0, G_j$  достаточно гладкие функции своих переменных, а по  $\varphi$  имеют период  $2\pi$ . Ниже опишем способ построения правых частей системы (2.4).

Функцию  $w(t, x, y, z; \varepsilon, \eta_1, \eta_2, \eta_3)$  следует искать в виде

$$\begin{aligned} w(t, x, y, z; \varepsilon, \eta_1, \eta_2, \eta_3) = & w_1(x, y, z; \eta_1, \eta_2, \eta_3) + \\ & + w_2(x, y, z; \eta_1, \eta_2, \eta_3) + w_3(x, y, z; \eta_1, \eta_2, \eta_3) + \\ & + \varepsilon w_0(x, y, z; \eta_1, \eta_2, \eta_3) + \dots \end{aligned} \quad (2.5)$$

В формуле (2.5)  $w_1, w_0$  — линейные формы относительно переменных  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  с коэффициентами, зависящими от  $x, y, z$ ;  $w_2, w_3$  — соответственно квадратичная и кубическая формы переменных  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$ , а точками обозначены слагаемые, имеющие более высокий порядок малости по совокупности переменных  $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \varepsilon$ . Естественно, что эти функции как функции переменных  $x, y, z$  удовлетворяют краевым условиям (2.2). Наконец, можно и целесообразно положить

$$G_0 = \beta_1 \eta_1^2 + \beta_2 \eta_2^2 + \beta_3 \eta_3^2 + \dots,$$

$$G_j = \alpha_j \varepsilon + \eta_j [g_{j1} \eta_1^2 + g_{j2} \eta_2^2 + g_{j3} \eta_3^2] + \dots,$$

где точками как обычно обозначены слагаемые, имеющие более высокий порядок малости. Понятно, что в силу симметрии задачи можно отметить справедливость следующих равенств:

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta, \quad g_{11} = g_{22} = g_{33} = -b,$$

$$g_{12} = g_{13} = g_{21} = g_{23} = g_{31} = g_{32} = -a.$$

Для определения коэффициентов нормальной формы (2.4) выпишем сначала уравнение для функции  $w(x, y, z; \varepsilon, \eta_1, \eta_2, \eta_3) = w(t, x, y, z; \varepsilon)$ :

$$w_t + i\dot{\varphi}(1 + w) = Aw - i\varepsilon \Delta w - (1 + ic)(2w\bar{w} + w^2 + w^2\bar{w}), \quad (2.6)$$

которое следует рассматривать вместе с краевыми условиями (2.2).

Подставляя (2.5) в уравнение (2.6) для определения функций  $w_1, w_2, w_3, w_0$ , получаем последовательность следующих краевых задач.

Так, для  $w_1$  получаем следующую краевую задачу:

$$Aw_1 = 0, \quad (2.7)$$

$$w_{1x}|_{x=0} = w_{1x}|_{x=\pi} = w_{1y}|_{y=0} = w_{1y}|_{y=\pi} = w_{1z}|_{z=0} = w_{1z}|_{z=\pi} = 0. \quad (2.8)$$

Из результатов п. 1 вытекает, что задача (2.7), (2.8) имеет решение

$$w_1(x, y, z, \eta_1, \eta_2, \eta_3) = (-c + i)(\eta_1 \cos x + \eta_2 \cos y + \eta_3 \cos z).$$

Для функции  $w_2$  получаем уже неоднородную краевую задачу

$$Aw_2 = i\beta(\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2) + (1 + ic)(2w_1\bar{w}_1 + w_1^2), \quad (2.9)$$

$$w_{2x}|_{x=0} = w_{2x}|_{x=\pi} = w_{2y}|_{y=0} = w_{2y}|_{y=\pi} = w_{2z}|_{z=0} = w_{2z}|_{z=\pi} = 0. \quad (2.10)$$

Приравнивая уже кубические слагаемые относительно  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$ , формируем неоднородную краевую задачу для  $w_3$ :

$$Aw_3 = i\beta(\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2)w_1 + (1 + ic)(2w_1\bar{w}_2 + 2\bar{w}_1w_2 + 2w_1w_2 + w_1^2\bar{w}_1) + \frac{\partial w_1}{\partial \eta_1}G_1 + \frac{\partial w_2}{\partial \eta_2}G_2 + \frac{\partial w_3}{\partial \eta_3}G_3, \quad (2.11)$$

$$w_{3x}|_{x=0} = w_{3x}|_{x=\pi} = w_{3y}|_{y=0} = w_{3y}|_{y=\pi} = w_{3z}|_{z=0} = w_{3z}|_{z=\pi} = 0. \quad (2.12)$$

Наконец, для  $w_0$  получаем уже следующую краевую задачу:

$$Aw_0 = -i\Delta w_1 + \alpha w_1,$$

$$w_{0x}|_{x=0} = w_{0x}|_{x=\pi} = w_{0y}|_{y=0} = w_{0y}|_{y=\pi} = w_{0z}|_{z=0} = w_{0z}|_{z=\pi} = 0.$$

Из условий ее разрешимости получаем, что  $\alpha = c$ . Используя условия разрешимости краевых задач (2.9), (2.10), (2.11), (2.12), получаем, что

$$\beta = c(c^2 + 1), \quad a = 4c^2(1 - c^2), \quad b = \frac{30c^4 - 9c^2 + 1}{6}.$$

Из краевой задачи (2.9), (2.10) находим, что

$$w_2 = -\frac{(1 + ic)(5c^2 + 1)}{4}(\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2) + \left(\frac{3c^2 - 1}{12} - i\frac{9c^2 + 1}{24c}\right)(\eta_1^2 \cos 2x + \eta_2^2 \cos 2y + \eta_3^2 \cos 2z) + (3c^2 - 1 - 4ci)[\eta_1\eta_2 \cos x \cos y + \eta_1\eta_3 \cos x \cos z + \eta_2\eta_3 \cos y \cos z].$$

В рамках принятой асимптотики нет необходимости выписывать явное выражение для  $w_3$ . Итак, нормальная форма приобретает вид

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \beta(\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2), \quad \dot{\eta}_1 = \eta_1[\varepsilon c - (b\eta_1^2 + a\eta_2^2 + a\eta_3^2)], \\ \dot{\eta}_2 &= \eta_2[\varepsilon c - (a\eta_1^2 + b\eta_2^2 + a\eta_3^2)], \quad \dot{\eta}_3 = \eta_3[\varepsilon c - (a\eta_1^2 + a\eta_2^2 + b\eta_3^2)], \end{aligned} \quad (2.13)$$

а явные формулы для  $a, b, \beta, \alpha$  были указаны выше. Правые части уравнений системы (2.13) выписаны с точностью до слагаемых, имеющих более высокий порядок малости по совокупности переменных  $\varepsilon, \eta_1, \eta_2, \eta_3$ .

### § 3. Анализ нормальной формы

В системе (2.13) положим

$$\eta_1 = \sqrt{\varepsilon}\sqrt{c}\sqrt{\rho_1}, \quad \eta_2 = \sqrt{\varepsilon}\sqrt{c}\sqrt{\rho_2}, \quad \eta_3 = \sqrt{\varepsilon}\sqrt{c}\sqrt{\rho_3},$$

считая, что  $\eta_j \geq 0, \rho_j \geq 0, \varepsilon \in [0; \varepsilon_0], j = 1, 2, 3$ . После замены времени  $\tau = 2\varepsilon ct$  можно получить следующую систему из четырех обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \rho_1' &= \rho_1 - \rho_1(b\rho_1 + a\rho_2 + a\rho_3), \quad \rho_2' = \rho_2 - \rho_2(a\rho_1 + b\rho_2 + a\rho_3), \\ \rho_3' &= \rho_3 - \rho_3(a\rho_1 + a\rho_2 + b\rho_3), \quad \varphi' = \frac{\beta}{2}(\rho_1 + \rho_2 + \rho_3), \end{aligned} \quad (3.1)$$

где штрихом обозначена производная по  $\tau$ , а правые части (3.1) выписаны с точностью  $O(\sqrt{\varepsilon})$ . При этом главную роль для дальнейшего анализа задачи играет анализ замкнутой системы для амплитудных переменных

$$\begin{aligned} \rho_1' &= \rho_1(1 - (b\rho_1 + a\rho_2 + a\rho_3)), \\ \rho_2' &= \rho_2(1 - (a\rho_1 + b\rho_2 + a\rho_3)), \\ \rho_3' &= \rho_3(1 - (a\rho_1 + a\rho_2 + b\rho_3)). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Для дальнейшего анализа полезно отметить, что при всех  $c$  справедливы неравенства

$$b = \frac{30c^4 - 9c^2 + 1}{6} > 0, \quad a + b = \frac{6c^4 + 15c^2 + 1}{6} > 0.$$

Система (3.2) имеет ненулевые состояния равновесия трех типов:

$$\begin{aligned} 1) E_1 : \rho_1 &= \frac{1}{b}, \rho_2 = \rho_3 = 0; & E_2 : \rho_2 &= \frac{1}{b}, \rho_1 = \rho_3 = 0; & E_3 : \rho_3 &= \frac{1}{b}, \rho_1 = \rho_2 = 0; \\ 2) E_4 : \rho_1 = \rho_2 &= \frac{1}{b+a}, \rho_3 = 0; & E_5 : \rho_1 = \rho_3 &= \frac{1}{b+a}, \rho_2 = 0; \\ E_6 : \rho_2 = \rho_3 &= \frac{1}{b+a}, \rho_1 = 0; & 3) E_7 : \rho_1 = \rho_2 = \rho_3 &= \frac{1}{b+2a}. \end{aligned}$$

Состояния равновесия  $E_j$  ( $j = 1, \dots, 6$ ) существуют всегда, а  $E_7$  — при тех значениях параметра  $c$ , когда  $b + 2a > 0$ . Последнее неравенство выполнено при

$$c \in (0; c_1), \quad c_1 \approx 1.480544.$$

Здесь и ниже учитывается, что  $c > 0$ .

**Лемма 5.** *Состояния равновесия  $E_1, E_2, E_3$  асимптотически устойчивы, если*

$$b - a < 0, \tag{3.3}$$

*и неустойчивы при выполнении неравенства*

$$b - a > 0. \tag{3.4}$$

Для доказательства леммы следует линеаризовать систему дифференциальных уравнений на исследуемом на устойчивость состоянии равновесия. Стандартные вычисления показывают, что неравенство (3.3) выполнено при  $c \in (c_2; c_3)$ , где  $c_2 \approx 0.179$ ,  $c_3 \approx 0.761$ .

**Лемма 6.** *Состояния равновесия  $E_4, E_5, E_6$  всегда неустойчивы.*

Справедливость утверждения вытекает из того факта, что после линеаризации системы (3.3) на данных состояниях равновесия получаем матрицы, у которых собственные числа равны

$$\lambda_1 = \frac{b-a}{a+b}, \quad \lambda_2 = \frac{a-b}{a+b}, \quad \lambda_3 = -1 \quad (\lambda_1 \lambda_2 < 0).$$

Аналогично проверяется справедливость утверждения.

**Лемма 7.** *Состояние равновесия  $E_7$  асимптотически устойчиво, если выполнено неравенство (3.4), и неустойчиво, если выполнено неравенство (3.3).*



Итак, при  $c \in (0; c_2) \cup (c_3; c_1)$  состояние равновесия  $E_7$  асимптотически устойчиво, а при  $c \in (c_2; c_3)$  неустойчиво. Интересно отметить, что при  $c = c_2, c = c_3$  ( $a = b$ ) система дифференциальных уравнений (3.2) имеет континуум состояний равновесия, координаты которых удовлетворяют условиям  $\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = 1/b$ ,  $\rho_1, \rho_2, \rho_3 \geq 0$ .

Пусть теперь  $\varepsilon < 0$  ( $\varepsilon \in [-\varepsilon_0; 0)$ ). Аналогичные замены

$$\eta_1 = \sqrt{-\varepsilon} \sqrt{c} \sqrt{\rho_1}, \quad \eta_2 = \sqrt{-\varepsilon} \sqrt{c} \sqrt{\rho_2}, \quad \eta_3 = \sqrt{-\varepsilon} \sqrt{c} \sqrt{\rho_3},$$

где  $\rho_1, \rho_2, \rho_3 \geq 0$  и замена времени  $\tau = -2\varepsilon ct$  приводят к системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \rho_1' &= -\rho_1 - \rho_1(b\rho_1 + a\rho_2 + a\rho_3), \quad \rho_2' = -\rho_2 - \rho_2(a\rho_1 + b\rho_2 + a\rho_3), \\ \rho_3' &= -\rho_3 - \rho_3(a\rho_1 + a\rho_2 + b\rho_3), \quad \varphi' = \frac{\beta}{2}(\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Понятно, что состояния равновесия первого и второго типа отсутствуют. Состояние равновесия  $E_7 : \rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = -1/(b+2a)$  существует, если  $b+2a < 0$  ( $c > c_1$ ), но оно неустойчиво.

Для формулировки основного результата, касающегося вспомогательной задачи (2.1), (2.2), полезно ввести следующие обозначения. Пусть  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$  — координаты одного из состояний равновесия  $E_j$  ( $j = 1, \dots, 7$ ). Введем в рассмотрение следующие наборы троек координат:

$$\Theta = (\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3) = (\pm\sqrt{c\rho_1}, \pm\sqrt{c\rho_2}, \pm\sqrt{c\rho_3}). \quad (3.6)$$

Выбор знака произволен. Пусть  $c \neq c_1, c \neq c_2, c \neq c_3$ .

**Теорема 1.** При  $\varepsilon \in [-\varepsilon; \varepsilon]$ , где  $\varepsilon_0$  — достаточно мало, каждому набору чисел (3.6) соответствует периодическое решение краевой задачи (2.1), (2.2), определяемое асимптотической формулой

$$\begin{aligned} v(t, x, y, z, \Theta, \varepsilon) &= \exp(i(-ct + \varepsilon\beta_\Theta t)) \times \\ &\times \{1 + \sqrt{\varepsilon}(-c + i)[\Theta_1 \cos x + \Theta_2 \cos y + \Theta_3 \cos z] + \\ &+ \varepsilon[-\frac{(1+ic)(5c^2+1)}{4}(\Theta_1^2 + \Theta_2^2 + \Theta_3^2) + \\ &+ (\frac{3c^2-1}{12} - i\frac{9c^2+1}{24c})(\Theta_1^2 \cos 2x + \Theta_2^2 \cos 2y + \Theta_3^2 \cos 2z) + \\ &+ (3c^2 - 1 - 4ci)(\Theta_1\Theta_2 \cos z \cos y + \Theta_1\Theta_3 \cos x \cos z + \Theta_2\Theta_3 \cos y \cos z)]\}, \end{aligned}$$

где  $\beta_\Theta = \beta(\Theta_1^2 + \Theta_2^2 + \Theta_3^2)$ .

Периодическое решение, определяемое тройкой чисел  $\Theta = (\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3)$ , устойчиво, если асимптотически устойчиво состояние равновесия системы дифференциальных уравнений (3.2) (или (3.5)), определяемое координатами  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$  и оно неустойчиво, если порождается неустойчивым состоянием равновесия системы (3.2) (или (3.5)).

Доказательство теоремы вытекает из результатов, изложенных в [12]. Краевая задача (2.1), (2.2) входит в тот класс задач, которые рассматриваются в основной бифуркационной теореме.

Понятно, что каждому из состояний равновесия  $E_1, E_2, E_3$  соответствуют 2 цикла, которые устойчивы при  $c \in (c_1; c_2)$ . Каждому из состояний равновесия  $E_4, E_5, E_6$  соответствуют по 4 неустойчивых цикла краевой задачи (2.1), (2.2). Наконец, при  $c \in (0; c_1) \cup (c_2; c_3)$  состоянию равновесия  $E_7$  соответствует уже 8 устойчивых периодических решений вспомогательной краевой задачи, а при  $c \in (c_1; c_2)$  — 8 неустойчивых периодических решений.

Изучение вспомогательной краевой задачи представляет и самостоятельный интерес, если соответствующее уравнение Гинзбурга–Ландау рассматривать с условиями непроницаемости. Результаты этой части работы были в сокращенном виде доложены на конференции «Третьи Курдюмовские чтения: Синергетика в естественных науках» [18].

**§ 4. Основной результат**

Возвратимся к рассмотрению краевой задачи (0.7), (0.8). Нетрудно показать, что каждое решение  $v(t, x, y, z; \Theta, \varepsilon)$  вспомогательной задачи (2.1), (2.2) может быть достроено и до решения (0.7), (0.8). Для этого необходимо доопределить  $v(t, x, y, z; \Theta, \varepsilon)$  по четности на отрезок  $[-\pi; 0]$  по каждой из пространственных переменных  $x, y, z$ , а затем полученную функцию доопределить на всю числовую ось по каждой пространственной переменной периодическим образом.

Формула (0.6) позволяет нам построить решения основной краевой задачи (0.3), (0.4) при  $d = 2c - \varepsilon$  ( $|\varepsilon| \ll 1$ ):

$$\begin{aligned}
 u(t, x, y, z; \Theta, \varepsilon) = & \exp(i[(-c + \varepsilon\beta_\Theta + d(k^2 + m^2 + n^2))t + kx + my + nz]) \times \\
 & \times \{1 + \sqrt{\varepsilon}(-c + i)[\Theta_1 \cos(x + 2dkt + \psi_1) + \Theta_2 \cos(y + 2dmt + \psi_2) + \\
 & + \Theta_3 \cos(z + 2dnt + \psi_3)] + \varepsilon[-\frac{(1 + 5c^2)(1 + ic)}{4}(\Theta_1^2 + \Theta_2^2 + \Theta_3^2) + \\
 & + (\frac{3c^2 - 1}{12} - i\frac{9c^2 + 1}{24c})(\Theta_1^2 \cos(2x + 8ckt + 2\psi_1) + \\
 & + \Theta_2^2 \cos(2y + 8cmt + 2\psi_2) + \Theta_3^2 \cos(2z + 8cnt + 2\psi_3)) + \\
 & + (3c^2 - 1 - 4ci)[\Theta_1\Theta_2 \cos(x + 4ckt + \psi_1) \cos(y + 4cmt + \psi_2) + \\
 & + \Theta_1\Theta_3 \cos(x + 4ckt + \psi_1) \cos(z + 4cnt + \psi_3) + \\
 & + \Theta_2\Theta_3 \cos(y + 4cmt + \psi_2) \cos(z + 4cnt + \psi_3)]\} + o(\varepsilon).
 \end{aligned}
 \tag{4.1}$$

Здесь  $\psi_1, \psi_2, \psi_3 \in \mathbb{R}$ ,  $k, m, n \in \mathbb{Z}$ . Эти построения дают основание заключить, что справедливо утверждение.

**Теорема 2.** *Каждому циклу вспомогательной краевой задачи (2.1), (2.2) соответствует инвариантный тор краевой задачи (0.3), (0.4) с наследованием свойств устойчивости.*

Отсюда можно заключить, что состояниям равновесия  $E_1, E_2, E_3$  нормальной формы соответствует счетное семейство двумерных торов  $T_2$ . Состояниям равновесия  $E_4, E_5, E_6$  уже соответствует счетное семейство трехмерных инвариантных торов  $T_3$ . Наконец, состоянию равновесия  $E_7$  соответствует счетное семейство инвариантных торов размерности 4. Отметим, что на самом деле  $T_4 = T_1 \times T_3$ , а для тора  $T_3$  характерна резонансная динамика, согласно терминологии монографии [19], но в целом функция (4.1) может быть периодической по  $t$  лишь в исключительном случае, а в ситуации общего положения она будет почти-периодической.

**§ 5. Выводы из полученных результатов**

Во-первых, при  $c \in (c_1; c_3)$  краевая задача (0.3), (0.4) при  $d = 2c - \varepsilon$  имеет счетное число аттракторов. Они однотипны, при  $c \in (0; c_1) \cup (c_2; c_3)$  это четырехмерные торы, при  $c \in (c_2; c_3)$  — двумерные торы. Данный вывод означает, что в изучаемой задаче реализуется феномен буферности [20], то есть уточненный вариант мультистабильности. Схожая ситуация имеет место при рассмотрении краевой задачи (0.3), (0.4) для случая одного и двух пространственных переменных. В случае одного пространственного переменного бифурцируют только двумерные торы, а во втором из них — торы размерности 2 и 3 [9–11].

Во-вторых, для краевой задачи (0.3), (0.4) возможен как вариант «мягкого» возбуждения колебаний (при  $c \in (c_1; c_3)$ ), так и вариант «жесткого» возбуждения колебаний при ( $c > c_3$ ).

Это первый вывод, который характерен лишь для случая трех пространственных координат. При меньшем их числе возможно лишь мягкое возбуждение колебаний.

Последнее означает, что если опираться на рассмотренный вариант уравнения Гинзбурга–Ландау, то может реализоваться один из сценариев перехода к хаосу (турбулентности), когда при уменьшении параметра  $d$  (увеличении числа Рейнольдса в гидродинамике) может реализоваться тот переход, который сейчас принято называть «внезапным», «диким», «быстрым» [7].

Наконец, наличие устойчивых торов размерности 4 позволило обнаружить режимы колебаний с обострением, то есть когда максимумы и минимумы резко отличаются от средней величины, а ширина этих всплесков относительно мала. Этот вывод удалось сделать «почти» аналитически на основе лишь анализа асимптотических формул из теоремы 2. На рис. 1, 2 приведены графики функции  $f(x) = |u(t_p, x, x, x, \Theta, \varepsilon)|$ . Они выполнены при  $k = 3, m = 5, n = 7, \psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = 0, t_1 = 10.1, t_2 = 30.0$ . Индекс у  $t$  соответствует номеру рисунка. На рис. 3, 4 — график той же функции, но при  $k = 113, m = 211, n = 501, t_3 = 10.2, t_4 = 30.2$  и при тех же  $\psi_1, \psi_2, \psi_3$ . На рис. 5, 6 приведены графики функции  $f(x) = |u(t_p, x, x, x, \Theta, \varepsilon)|$  при  $k = 3, m = 5, n = 7, \psi_1 = 0, \psi_2 = 2.5, \psi_3 = 0, t_5 = 0, t_6 = 20.3$ . Наконец, на рис. 7, 8 графики той же функции что и на первых шести рисунках, но при  $k = 31, m = 53, n = 201, \psi_1 = 0, \psi_2 = 2.5, \psi_3 = 0.3, t_7 = 10.1, t_8 = 30.3$ . Здесь и ниже  $\varepsilon = 25 \times 10^{-6}, c = 1.4805, x \in [-\pi; \pi]$ .

На рис. 9, 10 приведены графики  $g(t) = |u(t, 0, 0, 0; \Theta, \varepsilon)|$ . На рис. 9 этот график выполнен для случая, когда  $k = 3, m = 5, n = 7$ , а на рис. 10 для  $k = 113, m = 211, n = 501$ . В обоих случаях рассматривается  $|u(t, x, y, z; \Theta, \varepsilon)|$ , так как именно он несет обычно основной физический смысл. Например, в теории сверхпроводимости, где  $|u(t, x, y, z; \Theta, \varepsilon)|^2$  измеряет величину сверхпроводимости.

Даже при относительно небольших  $k, m, n$  наблюдаем быстроосциллирующие колебания. Из рисунков, а также асимптотических формул видно, что энергия на каждом из торов возрастает со скоростью, определяемой суммой  $k^2 + m^2 + n^2$ . Подобные ситуации иногда квалифицируют как наличие возможности «градиентной катастрофы».

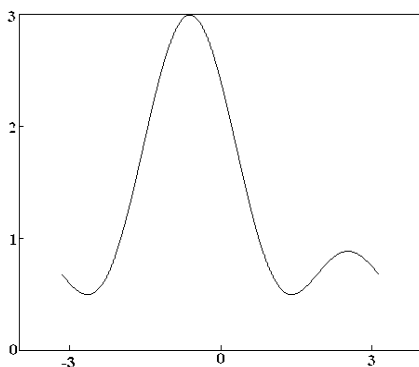


Рис. 1

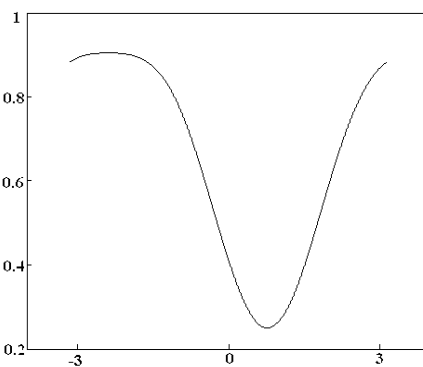


Рис. 2

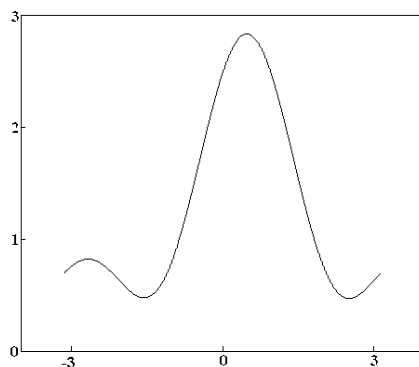


Рис. 3

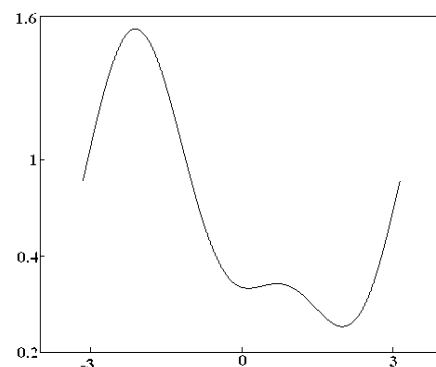


Рис. 4

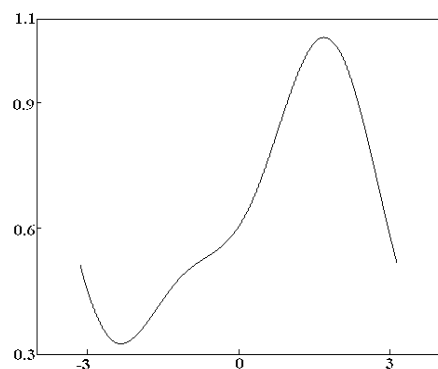


Рис. 5

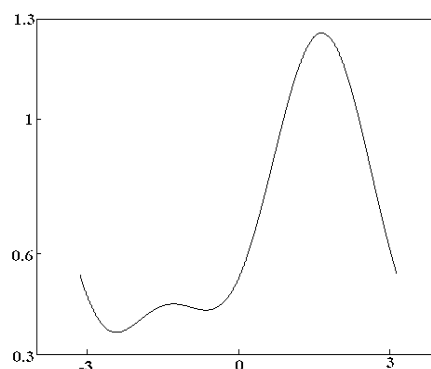


Рис. 6

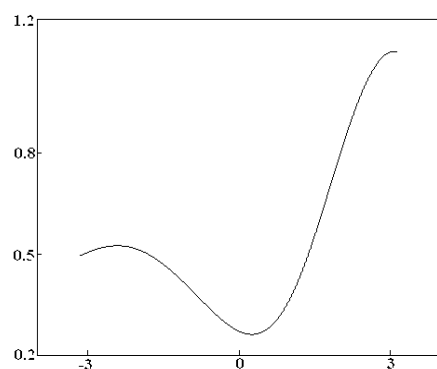


Рис. 7

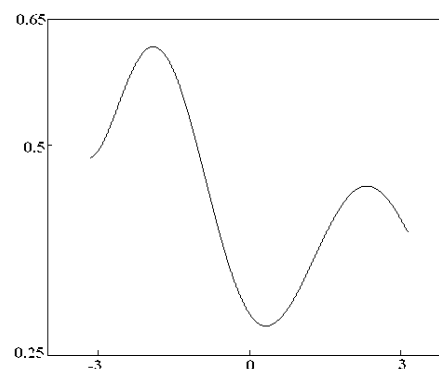


Рис. 8

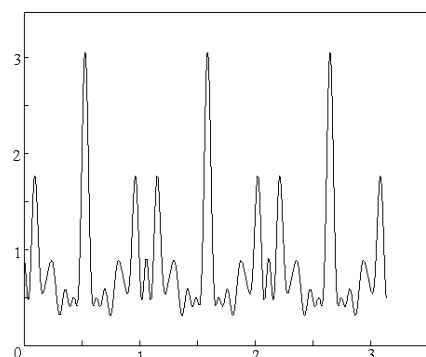


Рис. 9

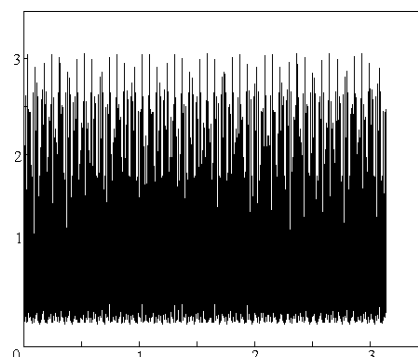


Рис. 10

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Скотт Э. Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией. — М.: Физматлит, 2005. — 431 с.
2. Узем Дж. Линейные и нелинейные волны в приложении к электродинамике. — М.: Мир, 1977. — 622 с.
3. Ланда П. С. Нелинейные волны. — М.: Мир, 1983. — 320 с.
4. Scheuer J., Malomed B. A. Stable and chaotic solutions of the Ginzburg–Landau equation with periodic boundary conditions // *Physica D*. — 2002. — Vol. 161, № 1–2. — P. 102–115.
5. Малинецкий Г. Г., Потапов А. Б., Подлазов А. В. Нелинейная динамика. — М.: Изд-во Комкнига, 2006. — 280 с.
6. Пиковский А., Розенблум М., Куртц Ю. Синхронизация. Фундаментальное явление. — М.: Техносфера, 2003. — 431 с.
7. Дразин Ф. Введение в теорию гидродинамической устойчивости. — М.: Физматлит, 2005. — 287 с.

8. Bartuccelli M., Constantin P., Doering G. R., Gibbon J. D., Gisselält M. On the possibility of soft and hard turbulence in the complex Ginzburg–Landau equation // *Physica D*. — 1990. — Vol. 44, № 3. — P. 421–444.
9. Куликов А. Н. Бифуркация автоколебаний в двух сингулярно возмущенных периодических краевых задачах // Ярославль: Математика в ЯрГУ: Сборник статей к 25-летию мат. фак-та. — С. 183–193.
10. Куликов А. Н. К вопросу о бифуркации автоколебаний для сингулярно возмущенной краевой задачи гиперболического типа // *Известия РАЕН. Диф. уравн.* — 2001. — № 5. С. 74–76.
11. Куликов Д. А. Структура окрестности бегущих волн обобщенного кубического уравнения Шредингера в цилиндрической области // *Известия РАЕН. Диф. уравн.* — 2006. — № 11. — С. 135–137.
12. Колесов А. Ю., Куликов А. Н. Инвариантные торы нелинейных эволюционных уравнений. — Ярославль, ЯрГУ, 2003. — 107 с.
13. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. — Л.: Изд-во Ленинградского гос. ун-та, 1950. — 255 с.
14. Колесов А. Ю., Куликов А. Н., Розов Н. Х. Цилиндрические бегущие волны обобщенного кубического уравнения Шредингера // *Доклады РАН*. — 2006. — Вып. 73. — № 1. — С. 125–129.
15. Гукенхеймер Дж., Холмс П. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. — М.–Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2002. — 559 с.
16. Марсен Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения. — М.: Мир, 1980. — 366 с.
17. Куликов А. Н. Инерциональные многообразия нелинейных дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве. — М.: Препринт Ин-та прикл. матем. им. М. В. Келдыша, 1991. — № 85. — 22 с.
18. Куликов А. Н., Куликов Д. А. Влияние размерности пространства на характер бифуркаций циклов уравнения Гинзбурга–Ландау // *Материалы международной конференции «Синергетика в естественных науках» 2007*. — Тверь, 2007. — С. 87–91.
19. Брур Х. В., Дюмортье Ф., Ван Стрин С., Такенс Ф. Структуры в динамике. — М.–Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2003. — 336 с.
20. Мищенко Е. Ф., Садовничий В. А., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией. — М.: Физматлит, 2005. — 430 с.

Поступила в редакцию 30.09.08

*A. N. Kulikov, D. A. Kulikov*

**Bifurcation of autowaves of generalized cubic Schrödinger equation with three independent variables**

Periodic boundary value problem the name of which is given in the title of this article is considered in this work. There is a countable number of plane waves which are periodic on according to time variable. The question of their stability and bifurcation has been examined. Each of them turned out to bifurcate invariant tors of 2, 3, 4 dimensions, including asymptotically stable ones. Features which make them different from the analogous problem when the number of space variables equals 1 or 2 are also shown. In particular we have shown parameter ranges when precritic bifurcation of saddle tors is possible and revealed the cases of realization of stable regimes with sharpening the latter is illustrated by figures. All these results have been obtained analytically and are based on asymptotic methods of nonlinear dynamic.

*Keywords:* attractor, bifurcation, nonlinear boundary value problems.

Mathematical Subject Classifications: 34A30, 34L40

Куликов Анатолий Николаевич, к. ф.-м. н., доцент кафедры дифференциальных уравнений, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, 150000, Россия, г. Ярославль, ул. Советская, 14, E-mail: kulikov\_d\_a@mail.ru

Куликов Дмитрий Анатольевич, к. ф.-м. н., старший преподаватель кафедры микроэлектроники, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, 150000, Россия, г. Ярославль, ул. Советская, 14, E-mail: kulikov\_d\_a@mail.ru