



# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Пыляк, Р. Смажевский, М. А. Шешко, Сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши по вещественной полуоси,  
*Дифференц. уравнения*, 2005, том 41, номер 12, 1696–1708

<https://www.mathnet.ru/de11414>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.87

17 мая 2025 г., 00:15:52



УДК 519.642.7

## СИНГУЛЯРНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ С ЯДРОМ КОШИ ПО ВЕЩЕСТВЕННОЙ ПОЛУОСИ

© 2005 г. Д. Пыляк, Р. Смажевский, М. А. Шешко

Будем рассматривать уравнение вида

$$a(x)\varphi(x) + \frac{1}{\pi i} \int_0^{+\infty} \frac{m(x, \sigma)}{\sigma - x} \varphi(\sigma) d\sigma = f(x), \quad x > 0, \quad (0.1)$$

где  $a(x)$ ,  $m(x, \sigma)$ ,  $f(x)$  – заданные на  $[0, +\infty)$  комплекснозначные функции, непрерывные по Гёльдеру,  $\varphi(x)$  – искомая функция.

Если линией интегрирования является гладкая замкнутая или разомкнутая кривая конечной длины, то теория уравнения вида (0.1) достаточно хорошо разработана и изложена в работах [1, 2].

Теория уравнения вида (0.1) на бесконечном контуре может отличаться от подобной теории на конечном контуре, о чем свидетельствуют изложенные в [2, с. 190–193] результаты, относящиеся к сингулярному уравнению, линией интегрирования которого является вся вещественная ось  $R$ . Полученные в настоящей работе результаты подтверждают, что теория уравнения (0.1) отличается как от теории рассматриваемого уравнения по кривой конечной длины, так и от теории этого уравнения по  $R$ .

Отметим еще, что частный случай уравнения (0.1), а именно уравнение

$$\frac{1}{\pi i} \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma - x} d\sigma = f(x), \quad x > 0, \quad (0.2)$$

изучалось в [3, 4]. Согласно [3, с. 194], решением этого уравнения является функция

$$\varphi(x) = \frac{\sqrt{x}}{\pi i} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \frac{f(\sigma)}{\sigma - x} d\sigma, \quad x > 0, \quad (0.3)$$

а согласно [4, с. 104], решение определяется формулой

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{1}{\pi i} \int_0^{+\infty} \sqrt{\sigma} \frac{f(\sigma)}{\sigma - x} d\sigma, \quad x > 0. \quad (0.4)$$

Строгого обоснования формул (0.3), (0.4) в указанных работах нет.

В настоящей работе найдены в явном виде формулы, дающие решение более общего уравнения, чем (0.2), а именно уравнения

$$a(x)\varphi(x) + \frac{1}{\pi i} \int_0^{+\infty} \frac{b(\sigma)}{\sigma - x} \varphi(\sigma) d\sigma = f(x), \quad x > 0, \quad (0.5)$$

$$b(x) \stackrel{\text{def}}{=} m(x, x), \quad a^2(x) - b^2(x) \neq 0 \quad \forall x \in [0, +\infty).$$

На основании этих формул сингулярное уравнение (0.1) приведено к уравнению Фредгольма. Кроме того, полученные формулы позволяют указать условия, при выполнении которых справедливы равенства (0.3), (0.4). Найдены также условия единственности решения как уравнения (0.5), так и уравнения (0.1) в случае, когда решение содержит произвольные постоянные. Приведены две вычислительные схемы для уравнения (0.5) с указанием порядковой оценки погрешности приближенного решения, первая из которых основана на алгебраических многочленах, а вторая – на многочленах Чебышева.

1. Выполнив над ядром уравнения (0.1) преобразование

$$\frac{m(x, \sigma)}{\sigma - x} = \frac{x + 1}{\sigma + 1} \frac{b(\sigma)}{\sigma - x} + \frac{b(\sigma)}{\sigma + 1} + k(x, \sigma), \quad k(x, \sigma) = \frac{m(x, \sigma) - b(\sigma)}{\sigma - x}, \quad b(\sigma) = m(\sigma, \sigma),$$

запишем это уравнение в форме

$$a(x)\varphi(x) + \frac{1}{\pi i} \int_0^\infty \frac{x + 1}{\sigma + 1} \frac{b(\sigma)}{\sigma - x} \varphi(\sigma) d\sigma + \frac{1}{\pi i} \int_0^\infty \frac{b(\sigma)}{\sigma + 1} \varphi(\sigma) d\sigma + \frac{1}{\pi i} \int_0^{+\infty} k(x, \sigma)\varphi(\sigma) d\sigma = f(x), \quad x > 0. \tag{1.1}$$

Будем предполагать, что  $a^2(x) - b^2(x) \neq 0 \quad \forall x \in [0, +\infty)$ , а поведение функций  $m(x, \sigma)$ ,  $f(x)$  при  $\sigma \rightarrow +\infty$ ,  $x \rightarrow +\infty$  определяется соответственно соотношениями  $m(x, \sigma) = m_0(x, \sigma)(1 + \sigma)^{-\alpha}$ ,  $\alpha \geq 1$ ,  $f(x) = f_0(x)(1 + x)^{-\beta}$ ,  $\beta \geq 1$ , где  $m_0(x, \sigma)$ ,  $f_0(x)$  – функции из класса Гёльдера.

Будем говорить, что функция  $f_0(x)$ ,  $x \in [0, +\infty)$ , принадлежит классу Гёльдера, если на любом промежутке  $[0, b]$ ,  $b > 0$ , она удовлетворяет неравенству  $|f_0(x') - f_0(x'')| \leq A_1|x' - x''|^\lambda$ ,  $0 < \lambda \leq 1$ ,  $\forall x', x'' \in [0, b]$ ,  $A_1 = \text{const}$ , а при  $x \rightarrow +\infty$  выполняется условие

$$|f_0(x') - f_0(x'')| \leq A_2|1/x' - 1/x''|^\lambda \quad \forall x', x'' \in [b, +\infty), \quad A_2 = \text{const}.$$

Аналогично определяется класс Гёльдера функций двух переменных. Полагая  $x = t/(1-t)$ ,  $\sigma = \tau/(1-\tau)$ , а затем вводя обозначения  $a^*(t) = a(t/(1-t))$ ,  $b^*(t) = b(t/(1-t))$ ,  $k^*(t, \tau) = k(t/(1-t), \tau/(1-\tau))(1-\tau)^{-2}$ ,  $f^*(t) = f(t/(1-t))$ ,  $\varphi^*(t) = \varphi(t/(1-t))$ , уравнение (1.1) приведем к виду

$$a^*(t)\varphi^*(t) + \frac{1}{\pi i} \int_0^1 b^*(\tau) \frac{\varphi^*(\tau)}{\tau - t} d\tau - \frac{1}{\pi i} \int_0^1 b^*(\tau) \frac{\varphi^*(\tau)}{\tau - 1} d\tau + \frac{1}{\pi i} \int_0^1 k^*(t, \tau)\varphi^*(\tau) d\tau = f^*(t), \quad t \in (0, 1). \tag{1.2}$$

Заметим, что ядро  $k^*(t, \tau)$  имеет вид

$$k^*(t, \tau) = [m_0(t/(1-t), \tau/(1-\tau)) - m_0(\tau/(1-\tau), t/(1-t))](1-t)(1-\tau)^{\alpha-1}(\tau-t)^{-1}. \tag{1.3}$$

Пусть  $X(z)$  – каноническая функция класса  $h(1)$  (класс функций, ограниченных в окрестности точки  $z = 1$  и допускающих интегрируемую особенность в точке  $z = 0$ , см. [1]) задачи линейного сопряжения

$$X^+(t) = \frac{a^*(t) - b^*(t)}{a^*(t) + b^*(t)} X^-(t), \quad t \in (0, 1), \tag{1.4}$$

$$Z^*(t) = [a^*(t) + b^*(t)] X^+(t) = [a^*(t) - b^*(t)] X^-(t), \quad t \in (0, 1). \tag{1.5}$$

Переходя в уравнении (1.2) к новой неизвестной функции  $u(t)$  по правилу

$$\varphi^*(t) = Z^*(t)r(t)u(t), \quad r(t) = [(a^*(t))^2 - (b^*(t))^2]^{-1}, \tag{1.6}$$

и вводя обозначения  $A(t) = a^*(t)r(t)$ ,  $B(t) = b^*(t)r(t)$ , уравнение (1.2) приведем к виду

$$A(t)Z^*(t)u(t) + \frac{1}{\pi i} \int_0^1 B(\tau)Z^*(\tau) \frac{u(\tau)}{\tau - t} d\tau - \frac{1}{\pi i} \int_0^1 B(\tau)Z^*(\tau) \frac{u(\tau)}{\tau - 1} d\tau + \\ + \frac{1}{\pi i} \int_0^1 k^*(t, \tau)Z^*(\tau)r(\tau)u(\tau) d\tau = f^*(t), \quad t \in (0, 1). \tag{1.7}$$

Поскольку в рассматриваемом классе функций  $h(1)$

$$Z^*(t) = t^{\alpha_1}(1 - t)^{\beta_1}Z_0(t), \quad Z_0(t) \neq 0, \quad \forall t \in (0, 1), \quad -1 < \text{Re } \alpha_1 \leq 0, \quad 0 \leq \text{Re } \beta_1 < 1, \tag{1.8}$$

то второй и третий интегралы, стоящие в левой части уравнения (1.7), существуют как несобственные. Полагая в (1.7)  $k^*(t, \tau) \equiv 0$ , исследуем сначала уравнение

$$A(t)Z^*(t)u(t) + \frac{1}{\pi i} \int_0^1 B(\tau)Z^*(\tau) \frac{u(\tau)}{\tau - t} d\tau - \frac{1}{\pi i} \int_0^1 B(\tau)Z^*(\tau) \frac{u(\tau)}{\tau - 1} d\tau = f^*(t), \tag{1.9}$$

$$t \in (0, 1), \quad \lim_{t \rightarrow 1} f^*(t) = 0.$$

Пусть решение  $u(t)$  разыскивается в классе ограниченных на  $(0, 1)$  функций и индекс  $\varkappa$  задачи (1.4) неотрицателен ( $\varkappa \geq 0$ ). Непосредственной подстановкой убедимся в том, что решением уравнения (1.9) является функция

$$u(t) = \frac{a^*(t)}{Z^*(t)}f^*(t) - \frac{1}{\pi i} \int_0^1 \frac{b^*(\tau)}{Z^*(\tau)} \frac{f^*(\tau)}{\tau - t} d\tau + P_\varkappa(t - 1), \tag{1.10}$$

где функция  $Z^*(t)$  определяется (1.5), а  $P_\varkappa(t - 1) = \gamma_0 + \gamma_1(t - 1) + \dots + \gamma_\varkappa(t - 1)^\varkappa$ ,  $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_\varkappa$  - произвольные комплексные числа.

В силу предположения  $f(x) = f_0(x)(1 + x)^{-\beta}$ ,  $\beta \geq 1$ , правая часть уравнения (1.10) является функцией, ограниченной на  $(0, 1)$ . Принимая во внимание равенство [5]

$$\frac{1}{\pi i} \int_0^1 B(\tau)Z^*(\tau) \frac{\tau^j}{\tau - t} d\tau = -A(t)Z^*(t)t^j + \Omega_\infty(t), \quad t \in (0, 1), \quad j = 0, 1, \dots, \tag{1.11}$$

где  $\Omega_\infty(z)$  - главная часть разложения функции  $X(z)z^j$  в ряд Лорана в точке  $z = \infty$ , и учитывая формулу Пуанкаре-Бертрана, после подстановки в (1.9) вместо  $u(t)$  функции (1.10) будем иметь

$$A(t)Z^*(t)\{a^*(t)(Z^*(t))^{-1}f^*(t) - F(t) + P_\varkappa(t - 1)\} + \\ + \frac{1}{\pi i} \int_0^1 B(\tau)Z^*(\tau) \left\{ \frac{a^*(\tau)}{Z^*(\tau)}f^*(\tau) - F(\tau) + P_\varkappa(\tau - 1) \right\} \frac{d\tau}{\tau - t} -$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{\pi i} \int_0^1 B(\tau) Z^*(\tau) \left\{ \frac{a^*(\tau)}{Z^*(\tau)} f^*(\tau) - F(\tau) + P_{\kappa-1}(\tau-1) \right\} \frac{d\tau}{\tau-1} = \\
 & = A(t) a^*(t) f^*(t) - A(t) Z^*(t) F(t) + A(t) Z^*(t) P_{\kappa}(t-1) + \frac{1}{\pi i} \int_0^1 B(\tau) a^*(\tau) f^*(\tau) \frac{d\tau}{\tau-t} - \\
 & - B(t) b^*(t) f^*(t) + A(t) Z^*(t) F(t) - \frac{1}{\pi i} \int_0^1 A(\tau_1) b^*(\tau_1) \frac{f^*(\tau_1)}{\tau_1-t} d\tau_1 + \frac{1}{\pi i} \int_0^1 B(\tau) Z^*(\tau) \frac{P_{\kappa}(\tau-1)}{\tau-t} d\tau - \\
 & - \frac{1}{\pi i} \int_0^1 B(\tau) a^*(\tau) \frac{f^*(\tau)}{\tau-1} d\tau + B(1) b^*(1) f^*(1) - A(1) Z^*(1) F(1) + \frac{1}{\pi i} \int_0^1 A(\tau_1) b^*(\tau_1) \frac{f^*(\tau_1)}{\tau_1-1} d\tau_1 - \\
 & - \frac{1}{\pi i} \int_0^1 B(\tau) Z^*(\tau) \frac{P_{\kappa}(\tau-1)}{\tau-1} d\tau \equiv f^*(t), \quad t \in (0, 1),
 \end{aligned}$$

где

$$F(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\pi i} \int_0^1 \frac{b^*(\tau_1)}{Z^*(\tau_1)} \frac{f^*(\tau_1)}{\tau_1-t} d\tau_1.$$

Если решение  $u(t)$  ищется в классе ограниченных на  $(0, 1)$  функций, при этом  $\lim_{t \rightarrow 1} u(t) = 0$ , то при  $\kappa \geq 0$  решение уравнения (1.9) определяется формулой

$$u(t) = a^*(t) (Z^*(t))^{-1} f^*(t) - F(t) + F(1) + \sum_{j=1}^{\kappa} \gamma_j (t-1)^j, \quad t \in (0, 1), \tag{1.12}$$

в чем можно убедиться также непосредственной подстановкой.

Рассмотрим случай отрицательного индекса ( $\kappa < 0$ ). Согласно [1, 2], уравнение (1.9) разрешимо тогда и только тогда, когда выполняются равенства

$$\frac{1}{\pi i} \int_0^1 \frac{b^*(\tau)}{Z^*(\tau)} [f^*(\tau) + A_0^*] \tau^{j-1} d\tau = 0, \quad j = \overline{1, |\kappa|}, \tag{1.13}$$

где

$$A_0^* = \frac{1}{\pi i} \int_0^1 B(\tau) Z^*(\tau) \frac{u(\tau)}{\tau-1} d\tau.$$

Поскольку [5]

$$\frac{1}{\pi i} \int_0^1 \frac{b^*(\tau)}{Z^*(\tau)} \tau^{j-1} d\tau = \text{Res}_{z=\infty} \left[ \frac{z^{j-1}}{X(z)} \right] = \begin{cases} 0, & j = \overline{1, |\kappa| - 1}, \\ -1, & j = |\kappa|, \end{cases} \tag{1.14}$$

то равенства (1.13) равносильны соотношениям

$$\frac{1}{\pi i} \int_0^1 \frac{b^*(\tau)}{Z^*(\tau)} f^*(\tau) \tau^{j-1} d\tau = 0, \quad j = \overline{1, |\kappa| - 1}, \tag{1.15}$$

$$\frac{1}{\pi i} \int_0^1 \frac{b^*(\tau)}{Z^*(\tau)} f^*(\tau) \tau^{|\kappa|-1} d\tau = \frac{1}{\pi i} \int_0^1 B(\tau) Z^*(\tau) \frac{u(\tau)}{\tau-1} d\tau = A_0^*. \quad (1.16)$$

С учетом (1.16) уравнение (1.9) может быть записано в виде

$$A(t)Z^*(t)u(t) + \frac{1}{\pi i} \int_0^1 B(\tau)Z^*(\tau) \frac{u(\tau)}{\tau-t} d\tau = f^*(t) + \frac{1}{\pi i} \int_0^1 \frac{b^*(\tau)}{Z^*(\tau)} f^*(\tau) \tau^{|\kappa|-1} d\tau, \quad t \in (0, 1). \quad (1.17)$$

Согласно [1, 2], при соблюдении необходимых и достаточных условий (1.15) решением такого уравнения является функция

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{a^*(t)}{Z^*(t)} [f^*(t) + A_0^*] - \frac{1}{\pi i} \int_0^1 \frac{b^*(\tau)}{Z^*(\tau)} \frac{f^*(\tau) + A_0^*}{\tau-t} d\tau = \\ &= \frac{a^*(t)}{Z^*(t)} f^*(t) - \frac{1}{\pi i} \int_0^1 \frac{b^*(\tau)}{Z^*(\tau)} \frac{f^*(\tau)}{\tau-t} d\tau, \quad t \in (0, 1). \end{aligned} \quad (1.18)$$

Рассмотрим частный случай уравнения (1.9), полагая  $a^*(t) \equiv 0$ ,  $b^*(t) = 1$ , а именно уравнение

$$(-1) \frac{1}{\pi i} \int_0^1 Z^*(\tau) \frac{u(\tau)}{\tau-t} d\tau + \frac{1}{\pi i} \int_0^1 Z^*(\tau) \frac{u(\tau)}{\tau-1} d\tau = f^*(t), \quad t \in (0, 1), \quad (1.19)$$

которое в первоначальных обозначениях имеет вид (0.2).

Пусть решение  $\varphi(x)$ ,  $x \in (0, +\infty)$ , уравнения (0.2) разыскивается в классе  $h(\infty)$ , т.е. в классе функций, непрерывных по Гёльдеру на  $[\varepsilon, +\infty)$ ,  $\varepsilon > 0$ , исчезающих на бесконечности ( $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$ ), а в окрестности  $x = 0$  допускающих интегрируемую особенность. Тогда каноническая функция  $X(z)$  задачи (1.4) имеет вид  $X(z) = (1 - 1/z)^{1/2}$ ,  $z \notin (0, 1)$ , следовательно,  $Z^*(t) = i(1/t - 1)^{1/2}$ ,  $t \in (0, 1)$ ,  $\kappa = 0$ . Согласно (1.10), решением уравнения (1.19) является функция

$$u(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \left( \frac{\tau}{1-\tau} \right)^{1/2} \frac{f^*(\tau)}{\tau-t} d\tau + \gamma_0 \stackrel{\text{def}}{=} F_1(t) + \gamma_0$$

или, что то же самое,

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{1}{\pi i} \int_0^{+\infty} \sqrt{\sigma} \frac{x+1}{\sigma+1} \frac{f(\sigma)}{\sigma-x} d\sigma + \frac{\gamma_0^*}{\sqrt{x}}, \quad x > 0.$$

Если решение  $\varphi(x)$  уравнения (0.2) ищется в классе  $h(\infty)$ , причем не только  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$ , но и  $\lim_{t \rightarrow 1} u(t) = 0$ , где  $u(t)$  определяется в (1.6), то решение уравнения (1.19), согласно (1.12), представимо формулой

$$u(t) = F_1(t) - F_1(1),$$

которая в первоначальных переменных имеет вид (0.4).

Если же решение  $\varphi(x)$ ,  $x \in (0, +\infty)$ , уравнения (0.2) разыскивается в классе  $h(0, +\infty)$ , т.е. в классе гёльдеровых ограниченных на  $(0, +\infty)$  функций, при этом  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$ , то

каноническая функция  $X(z)$  задачи (1.4) имеет вид  $X(z) = (z(z - 1))^{1/2}$ ,  $z \notin (0, 1)$ , следовательно,  $Z^*(t) = i(t(1 - t))^{1/2}$ ,  $t \in (0, 1)$ ,  $\varkappa = -1$ . Согласно (1.18), в классе функций, для которых

$$\frac{1}{\pi i} \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma + 1} d\sigma = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{f(\sigma)}{\sqrt{\sigma(\sigma + 1)}} d\sigma,$$

решение уравнения (0.2) имеет вид (0.3).

Приведем условия, при выполнении которых произвольные константы  $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_\varkappa$  ( $\varkappa \geq 0$ ), входящие в формулы (1.10), (1.12), определяются единственным образом. Присоединим к уравнению (1.9) равенства

$$\frac{1}{\pi i} \int_0^1 B(\tau) Z^*(\tau) u(\tau) (\tau - 1)^{j-1} d\tau = A_j, \quad j = \overline{0, \varkappa}, \tag{1.20}$$

где  $A_j$  – наперед заданные числа. Подставляя вместо  $u(t)$  в (1.20) функцию (1.10) с учетом (1.11), получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi i} \int_0^1 B(\tau) Z^*(\tau) \left\{ \frac{a^*(\tau)}{Z^*(\tau)} f^*(\tau) - \frac{1}{\pi i} \int_0^1 \frac{b^*(\tau_1)}{Z^*(\tau_1)} \frac{f^*(\tau_1)}{\tau_1 - \tau} d\tau_1 + P_\varkappa(\tau - 1) \right\} (\tau - 1)^{j-1} d\tau = \\ & = \frac{1}{\pi i} \int_0^1 B(\tau) a^*(\tau) f^*(\tau) (\tau - 1)^{j-1} d\tau - \frac{1}{\pi i} \int_0^1 \frac{b^*(\tau_1)}{Z^*(\tau_1)} f^*(\tau_1) d\tau_1 \frac{1}{\pi i} \int_0^1 B(\tau) Z^*(\tau) \frac{(\tau - 1)^{j-1}}{\tau_1 - \tau} d\tau + \\ & + \frac{1}{\pi i} \int_0^1 B(\tau) Z^*(\tau) P_\varkappa(\tau - 1) (\tau - 1)^{j-1} d\tau = \frac{1}{\pi i} \int_0^1 B(\tau) a^*(\tau) f^*(\tau) (\tau - 1)^{j-1} d\tau - \\ & - \frac{1}{\pi i} \int_0^1 A(\tau_1) b^*(\tau_1) f^*(\tau_1) (\tau_1 - 1)^{j-1} d\tau_1 + \frac{1}{\pi i} \int_0^1 B(\tau) Z^*(\tau) P_\varkappa(\tau - 1) (\tau - 1)^{j-1} d\tau = \\ & = \frac{1}{\pi i} \int_0^1 B(\tau) Z^*(\tau) P_\varkappa(\tau - 1) (\tau - 1)^{j-1} d\tau = A_j, \quad j = \overline{0, \varkappa}. \end{aligned} \tag{1.21}$$

Полагая в (1.21)  $j = 0$ , найдем  $\gamma_\varkappa = A_0$ . При  $j = 1$  будем иметь  $\gamma_{\varkappa-1} + (p_1 - \varkappa)\gamma_\varkappa = A_1$ . Наконец, при  $j = \varkappa$  получаем

$$\begin{aligned} & \gamma_0 + (p_1 - \varkappa)\gamma_1 + \dots + \left[ p_\varkappa - (2\varkappa - 1)p_{\varkappa-1} + \frac{(2\varkappa - 1)(2\varkappa - 2)}{2!} p_{\varkappa-2} + \dots \right. \\ & \left. \dots + (-1)^{2\varkappa-1} \frac{(2\varkappa - 1)(2\varkappa - 2) \dots \varkappa}{\varkappa!} p_0 \right] \gamma_\varkappa = A_\varkappa, \quad p_0 = 1. \end{aligned}$$

Здесь  $p_1, p_2, \dots, p_\varkappa$  – коэффициенты, входящие в разложение функции  $X(z)$  в окрестности точки  $z = \infty$ , т.е. в разложение

$$X(z) = z^{-\varkappa} (1 + p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + \dots). \tag{1.22}$$

Чтобы определить константы  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_\varkappa$ , входящие в (1.12), достаточно к уравнению (1.9) присоединить условия (1.18), полагая  $j = \overline{0, \varkappa - 1}$ .

Таким образом, доказана

**Теорема 1.1.** Пусть функции  $a^*(t)$ ,  $b^*(t)$ ,  $f^*(t)$ , входящие в уравнение (1.9), принадлежат классу Гёльдера, причем  $(a^*(t))^2 - (b^*(t))^2 \neq 0 \quad \forall t \in (0, 1)$ , а функция  $f^*(t)$  в окрестности  $t = 1$  представима в виде  $f^*(t) = (t - 1)^\beta f_0^*(t)$ , где  $f_0^*(t)$  - функция из класса Гёльдера,  $\operatorname{Re} \beta \geq 1$ , и индекс  $\kappa$  задачи (1.4) неотрицателен. Тогда общее решение уравнения (1.9), принадлежащее классу ограниченных гёльдеровых функций, представимо формулой (1.10).

Если  $\kappa < 0$ , то решение  $u(t)$ , принадлежащее классу ограниченных гёльдеровых на  $(0, 1)$  функций, для которых имеет место соотношение (1.16), при выполнении необходимых и достаточных условий (1.15) представимо формулой (1.18). Если решение  $u(t)$  подчинить условиям (1.20), где  $A_j$ ,  $j = \overline{0, \kappa}$ , - наперед заданные числа, то задача (1.9), (1.20) имеет единственное решение. Если же разыскиваемое решение  $u(t)$  принадлежит классу ограниченных функций, при этом  $\lim_{t \rightarrow 1} u(t) = 0$ , то при  $\kappa \geq 0$  общее решение имеет вид (1.12).

**Следствие.** Пусть функции  $a(x)$ ,  $b(x)$ ,  $f(x)$ , входящие в уравнение (0.5), непрерывны по Гёльдеру на  $[0, +\infty)$ , при этом  $a^2(x) - b^2(x) \neq 0 \quad \forall x \in [0, +\infty)$ , а поведение функции  $f(x)$  при  $x \rightarrow +\infty$  определяется соотношением  $f(x) = f_0(x)(1+x)^{-\beta}$ ,  $\beta \geq 1$ . Если искомое решение  $\varphi(x)$  принадлежит классу  $h(\infty)$  и индекс  $\kappa$  задачи

$$\chi^+(x) = \frac{a(x) - b(x)}{a(x) + b(x)} \chi^-(x), \quad x \in (0, +\infty), \quad \chi^\pm(x) \stackrel{\text{def}}{=} X^\pm\left(\frac{x}{x+1}\right),$$

где  $X(z)$  - каноническая функция задачи (1.4), неотрицателен, то общее решение уравнения (0.5) имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & \frac{a(x)f(x)}{a^2(x) - b^2(x)} - \frac{Z(x)}{a^2(x) - b^2(x)} \frac{1}{\pi i} \int_0^{+\infty} \frac{x+1}{\sigma+1} \frac{b(\sigma)}{Z(\sigma)} \frac{f(\sigma)}{\sigma-x} d\sigma + \\ & + \frac{Z(x)}{a^2(x) - b^2(x)} P_\kappa\left(\frac{1}{x+1}\right), \quad x \in (0, +\infty), \end{aligned} \quad (1.23)$$

где

$$Z(x) = [a(x) + b(x)]\chi^+(x) = [a(x) - b(x)]\chi^-(x), \quad P_\kappa\left(\frac{1}{x+1}\right) = \sum_{j=0}^{\kappa} \frac{\gamma_j}{(x+1)^j},$$

$\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_\kappa$  - произвольные постоянные.

Если  $\kappa < 0$ , то при выполнении необходимых и достаточных условий

$$\frac{1}{\pi i} \int_0^{+\infty} \frac{b(\sigma)f(\sigma)}{Z(\sigma)} \frac{\sigma^{j-1}}{(\sigma+1)^{j+1}} d\sigma = 0, \quad j = \overline{1, |\kappa| - 1}, \quad (1.24)$$

любое решение  $\varphi(x)$  класса  $h(\infty)$ , удовлетворяющее соотношению

$$\int_0^{+\infty} \frac{b(\sigma)}{\sigma+1} \varphi(\sigma) d\sigma = \int_0^{+\infty} \frac{b(\sigma)f(\sigma)}{Z(\sigma)} \frac{\sigma^{|\kappa|-1}}{(\sigma+1)^{|\kappa|+1}} d\sigma, \quad (1.25)$$

представимо формулой (1.23), в которой  $P_\kappa(1/(x+1)) \equiv 0$ .

**Пример 1.1.** Найдем решение уравнения (0.5) в классе  $h(\infty)$ , полагая

$$a(x) = b(x)(1 + E_1(x))/(1 - E_1(x)), \quad b(x) = (2x + 1)/(3x + 2), \quad f(x) = X(2)/(x + 2),$$

$$E_1(x) = \exp\{2\pi i(\alpha_2 x/(x+1) + \beta_2)\}, \quad \alpha_2 = 7/2 - i/2, \quad \beta_2 = -5/4 + i.$$

Тогда  $X(z) = z^{-2}(z-1)^{-2} \exp\{\Gamma_1(z)\}$ ,  $\Gamma_1(z) = (\alpha_2 z + \beta_2) \ln(1 - 1/z) + \alpha_2$ ,  $z \notin (0, 1)$ , следовательно,  $\kappa = 4$ .



Поскольку  $\Gamma_1^\pm(t) = (\alpha_2 t + \beta_2)(\ln(1/t - 1) \pm \pi i) + \alpha_2 = (\alpha_2 + \beta_2) \ln(1 - t) - \beta_2 \ln t + \Omega_1^\pm(t)$ ,  $\Omega_1^\pm(t) = \pm \pi i(\alpha_2 t + \beta_2) + \alpha_2 - \alpha_2 t \ln t - \alpha_2(1 - t) \ln(1 - t)$ ,  $t \in (0, 1)$ , то  $X^\pm(t) = t^{-2}(t - 1)^{-2} \exp\{\Gamma_1^\pm(z)\} = t^{-3/4-i}(1 - t)^{1/4+i/2} \exp\{\Omega_1^\pm(t)\}$ . Поэтому

$$\chi^\pm(x) = X^\pm(x/(x + 1)) = (x/(x + 1))^{-3/4-i}(x + 1)^{-1/4-i/2} \exp\{\Omega_1^\pm(x/(x + 1))\}, \quad x > 0,$$

$$Z_1(x) = \frac{2(2x + 1)}{3x + 2} \frac{1}{1 - E_1(x)} (x + 1)^{1/2+i/2} x^{-3/4-i} \exp\left\{\Omega_1^+\left(\frac{x}{x + 1}\right)\right\}, \quad x > 0.$$

Согласно (1.23),

$$\varphi(x) = -\frac{x + 1}{x + 2} \frac{Z_1(x)}{a^2(x) - b^2(x)} + \frac{Z_1(x)}{a^2(x) - b^2(x)} \sum_{j=0}^4 \frac{\gamma_j}{(x + 1)^j}, \quad x > 0.$$

Произвольные константы  $\gamma_j$ ,  $j = \overline{0, 4}$ , будут однозначно определены, если зададим  $A_j$ ,  $j = \overline{0, 4}$ . Положим, например,  $A_j = -X(2)$ ,  $j = \overline{0, 4}$ . Тогда  $\gamma_j = 0$ ,  $j = \overline{0, 4}$ .

**Пример 1.2.** Найдем еще решение уравнения (0.5) в том же классе  $h(\infty)$ , полагая  $a(x)$ ,  $b(x)$  и  $E_2(x)$  такими же, как в примере 1.1, но с  $\alpha_2 = -3 + i/2$ ,  $\beta_2 = -3/2 + i$ :

$$f(x) = \frac{X(2)}{x + 2} - \frac{1}{x + 1} \left( \frac{x}{x + 1} + \frac{5}{2} - \frac{3}{4} i \right).$$

Тогда  $X(z) = z(z - 1)^2 \exp\{\Gamma_2(z)\}$ ,  $\Gamma_2(z) = (\alpha_2 z - \beta_2) \ln(1 - 1/z) + \alpha_2$ ,  $\kappa = -3$ .

Поскольку  $\Gamma_2^\pm(t) = (\alpha_2 t - \beta_2)(\ln(1/t - 1) \pm \pi i) + \alpha_2 = (\alpha_2 - \beta_2) \ln(1 - t) + \beta_2 \ln t + \Omega_2^\pm(t)$ ,  $\Omega_2^\pm(t) = \pm \pi i(\alpha_2 t - \beta_2) + \alpha_2 - \alpha_2 t \ln t - \alpha_2(1 - t) \ln(1 - t)$ ,  $t \in (0, 1)$ , то  $X^\pm(t) = t(t - 1)^2 \exp\{\Gamma_2^\pm(z)\} = t^{-1/2+i}(1 - t)^{1/2-i/2} \exp\{\Omega_2^\pm(t)\}$ . Отсюда следует, что

$$\chi^\pm(x) = X^\pm(x/(x + 1)) = (1 + 1/x)^{1/2-i}(x + 1)^{-1/2+i/2} \exp\{\Omega_2^\pm(x/(x + 1))\}, \quad x > 0,$$

$$Z_2(x) = \frac{2(2x + 1)}{3x + 2} \frac{1}{1 - E_2(x)} \frac{(x + 1)^{-i/2}}{x^{1/2-i}} \exp\left\{\Omega_2^+\left(\frac{x}{x + 1}\right)\right\}, \quad x > 0.$$

Можно проверить, что условия (1.24) для функции  $f(x)$  выполнены. Искомое решение имеет вид

$$\varphi(x) = -\frac{x + 1}{x + 2} \frac{Z_2(x)}{a^2(x) - b^2(x)}, \quad x > 0.$$

2. В настоящем пункте сведем сингулярное уравнение (1.7) к уравнению Фредгольма, для этого рассматриваемое уравнение запишем в форме

$$\begin{aligned} A(t)Z^*(t)u(t) + \frac{1}{\pi i} \int_0^1 B(\tau)Z^*(\tau) \frac{u(\tau)}{\tau - t} d\tau - \frac{1}{\pi i} \int_0^1 B(\tau)Z^*(\tau) \frac{u(\tau)}{\tau - 1} d\tau = \\ = f^*(t) - \frac{1}{\pi i} \int_0^1 k^*(t, \tau)Z^*(\tau)r(\tau)u(\tau) d\tau, \quad t \in (0, 1), \end{aligned}$$

а затем к правой части применим формулу (1.10). В результате получим уравнение

$$u(t) = \frac{a^*(t)}{Z^*(t)} \left[ f^*(t) - \frac{1}{\pi i} \int_0^1 k^*(t, \tau)Z^*(\tau)r(\tau)u(\tau) d\tau \right] - \frac{1}{\pi i} \int_0^1 \frac{b^*(\tau)}{Z^*(\tau)} \frac{f^*(\tau)}{\tau - t} d\tau +$$

$$+ \frac{1}{\pi i} \int_0^1 \frac{b^*(\tau)}{Z^*(\tau)} \left\{ \frac{1}{\pi i} \int_0^1 \frac{k^*(\tau, \tau_1)}{Z^*(\tau_1)} r(\tau_1) u(\tau_1) d\tau_1 \right\} \frac{d\tau}{\tau - t} + P_{\varkappa}(t - 1), \quad t \in (0, 1), \quad (2.1)$$

которое элементарными преобразованиями приведем к виду

$$u(t) + \int_0^1 N(t, \tau) u(\tau) d\tau = F(t), \quad t \in (0, 1), \quad (2.2)$$

где

$$N(t, \tau) = \frac{1}{\pi i} \frac{Z(\tau)}{Z^*(t)} r(\tau) \left[ a^*(t) k^*(t, \tau) - \frac{Z^*(t)}{\pi i} \int_0^1 \frac{b^*(\tau_1)}{Z^*(\tau_1)} \frac{k^*(\tau_1, \tau)}{\tau_1 - t} d\tau_1 \right],$$

$$F(t) = \frac{a^*(t)}{Z^*(t)} f^*(t) - \frac{1}{\pi i} \int_0^1 \frac{b^*(\tau_1)}{Z^*(\tau_1)} \frac{f^*(\tau_1)}{\tau_1 - t} d\tau_1 + P_{\varkappa}(t - 1).$$

Для уравнения (2.2) справедлива теория уравнений Фредгольма. Поэтому если соответствующее уравнение ( $F(t) \equiv 0$ ) неразрешимо (имеет только нулевое решение), то решение неоднородного уравнения (2.2) задается формулой

$$u(t) = F(t) - \int_0^1 \Gamma(t, \tau) F(\tau) d\tau, \quad t \in (0, 1),$$

где  $\Gamma(t, \tau)$  – резольвента ядра  $N(t, \tau)$ .

Если  $\varkappa < 0$ , то уравнение (1.7) разрешимо тогда и только тогда, когда выполнены равенства

$$\frac{1}{\pi i} \int_0^1 \frac{b^*(\tau)}{Z^*(\tau)} \left[ f^*(\tau) - \frac{1}{\pi i} \int_0^1 k^*(\tau, \tau_1) Z^*(\tau_1) r(\tau_1) u(\tau_1) d\tau_1 + A_0^* \right] \tau^{j-1} d\tau = 0,$$

$j = \overline{1, |\varkappa|}$ ,  $A_0^*$  определено формулой (1.16), равносильные следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi i} \int_0^1 \frac{b^*(\tau)}{Z^*(\tau)} f^*(\tau) \tau^{|\varkappa|-1} d\tau &= \frac{1}{(\pi i)^2} \int_0^1 \int_0^1 \frac{b^*(\tau)}{Z^*(\tau)} k^*(\tau, \tau_1) Z^*(\tau_1) r(\tau_1) u(\tau_1) \tau^{|\varkappa|-1} d\tau_1 d\tau + \\ &+ [1 + \operatorname{sgn}(j - |\varkappa|)] \frac{1}{\pi i} \int_0^1 B(\tau) Z^*(\tau) \frac{u(\tau)}{\tau - 1} d\tau. \end{aligned} \quad (2.3)$$

С учетом (2.3) при  $j = |\varkappa|$  уравнение (1.7) может быть записано в виде

$$\begin{aligned} A(t) Z^*(t) u(t) + \frac{1}{\pi i} \int_0^1 B(\tau) Z^*(\tau) \frac{u(\tau)}{\tau - t} d\tau &= f^*(t) - \frac{1}{\pi i} \int_0^1 k^*(t, \tau) Z^*(\tau) r(\tau) u(\tau) d\tau + \\ + \frac{1}{\pi i} \int_0^1 \frac{b^*(\tau)}{Z^*(\tau)} f^*(\tau) \tau^{|\varkappa|-1} d\tau &- \frac{1}{(\pi i)^2} \int_0^1 \int_0^1 \frac{b^*(\tau)}{Z^*(\tau)} k^*(\tau, \tau_1) Z^*(\tau_1) r(\tau_1) u(\tau_1) \tau^{|\varkappa|-1} d\tau_1 d\tau. \end{aligned} \quad (2.4)$$

При выполнении равенств (2.3) при  $j = \overline{|\varkappa| - 1}$  тем же путем, что и в предыдущем случае, от (2.4) приходим к уравнению (2.2), в правой части которого необходимо положить  $P_{\varkappa-1}(t-1) \equiv 0$ .

Таким образом, справедлива

**Теорема 2.1.** Пусть функции  $a^*(t)$ ,  $b^*(t)$ ,  $f^*(t)$ , входящие в уравнение (1.7), принадлежат классу Гёльдера, причем  $(a^*(t))^2 - (b^*(t))^2 \neq 0 \quad \forall t \in (0, 1)$ , где функция  $m_0(t, \tau)$  из выражения (1.3) также принадлежит классу  $H$  (по обоим переменным), а функция  $f^*(t)$  в окрестности  $t = 1$  представима в виде  $f^*(t) = (t-1)^\beta f_0^*(t)$ ,  $\beta \geq 1$ , где  $f_0^*(t)$  из класса  $H$ . Если индекс  $\varkappa$  задачи (1.4) неотрицателен и однородное уравнение (2.2) неразрешимо, задача (1.7), (1.20) имеет единственное решение.

Если  $\varkappa < 0$ , то уравнение (1.7) эквивалентно (в смысле разрешимости) уравнению Фредгольма (2.2) с  $P_\varkappa(t-1) \equiv 0$  с присоединенными к нему  $|\varkappa| - 1$  уравнениями (2.3).

**3.** Построим две вычислительные схемы для уравнения (1.9). Следуя [5], приближенное решение задачи (1.9), (1.20) ( $\varkappa \geq 0$ ) будем искать как решение задачи

$$A(t)Z^*(t)u_{n+\varkappa}(t) + \frac{1}{\pi i} \int_0^1 B(\tau)Z^*(\tau) \frac{u_{n+\varkappa}(\tau)}{\tau - t} d\tau = f_n^*(t) + A_0^*, \quad t \in (0, 1), \quad (3.1)$$

$A_0^*$  определено формулой (1.16) и

$$\frac{1}{\pi i} \int_0^1 B(\tau)Z^*(\tau)u_{n+\varkappa}(\tau)(\tau - 1)^{j-1} d\tau = A_j, \quad j = \overline{0, \varkappa}, \quad (3.2)$$

в которой  $f_n^*(t)$  – многочлен степени  $n$ , интерполирующий функцию  $f^*(t)$  по узлам Чебышева первого рода  $t_k = (1/2) \cos[(2k - 1)/(2(n + 1))\pi] + 1/2$ ,  $k = \overline{1, n + 1}$ , который запишем в виде ряда

$$f_n^*(t) = \sum_{k=0}^n f_k t^k, \quad t \in [0, 1], \quad (3.3)$$

$$u_{n+\varkappa}(t) = \sum_{k=0}^{n+\varkappa} c_k t^k, \quad (3.4)$$

$c_k$  – коэффициенты, подлежащие нахождению.

Подставим (3.4) в (3.1), а затем для вычисления сингулярного интеграла применим формулу (1.11). В результате получим тождество, из которого путем приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях  $t$  находим  $c_{n+\varkappa} = f_n$ ,  $p_1 c_{n+\varkappa} + c_{n+\varkappa-1} = f_{n-1}$ , ...,  $p_n c_{n+\varkappa} + p_{n-1} c_{n+\varkappa-1} + \dots + c_\varkappa = f_0 + A_0^*$ , где  $p_1, p_2, \dots, p_n$  – коэффициенты, входящие в разложение (1.22).

Недостающие коэффициенты  $c_{\varkappa-1}, c_{\varkappa-2}, \dots, c_0$  определим из (3.2), используя при этом формулу [5]  $(\pi i)^{-1} \int_0^1 B(\tau)Z^*(\tau)\tau^j d\tau = -\operatorname{Res}_{z=\infty} \{X(z)z^j\}$ ,  $j = 1, 2, \dots$ . В результате придем к системе

$$c_{\varkappa-1} + p_1 c_\varkappa + \dots + p_{n+1} c_{n+\varkappa} = A_1, \quad c_{\varkappa-2} + (p_1 - 1)c_{\varkappa-1} + \dots + (p_{n+2} - p_{n+1})c_{n+\varkappa} = A_2, \quad \dots,$$

$$c_0 + (p_1 - \varkappa + 1)c_1 + \left[ p_2 - (\varkappa - 1)p_1 + \frac{(\varkappa - 1)(\varkappa - 2)}{2} p_0 \right] c_2 + \dots$$

$$\dots + \left[ p_{n+\varkappa} - (\varkappa - 1)p_{n+\varkappa-1} + \frac{(\varkappa - 1)(\varkappa - 2)}{2} p_{n+\varkappa-2} + \dots + (-1)^{\varkappa-1} p_{n+1} \right] c_{n+\varkappa} = A_\varkappa, \quad p_0 = 1.$$

Если требуется получить решение с высокой степенью точности, то целесообразно искать решение в виде

$$u_{n+\varkappa}(t) = \sum_{k=0}^{n+\varkappa} c_k T_k^*(t), \quad t \in [0, 1], \quad (3.5)$$

где  $T_k^*(t)$  – смещенный многочлен Чебышева первого рода, определяемый соотношением:

$$T_k^*(t) = T_k(2t - 1), \quad t \in [0, 1], \quad T_k(t) = \cos(k \arccos t), \quad |t| \leq 1.$$

Подставляя (3.5) в (3.1), предварительно записав интерполяционный многочлен (3.3) в виде

$$f_n^*(t) = \sum_{j=0}^n f_j^* U_j^*(t), \quad t \in [0, 1],$$

где  $U_j^*(t) = U_j(2t - 1)$ ,  $t \in [0, 1]$ ,  $U_j(t) = \sin[(j + 1) \arccos t](1 - t^2)^{-1/2}$ ,  $|t| \leq 1$ , приходим к равенству

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{n+\varkappa} c_k \left[ A(t) Z^*(t) T_k^*(t) + \frac{1}{\pi i} \int_0^1 B(\tau) Z^*(\tau) \frac{T_k^*(\tau)}{\tau - t} d\tau \right] = \\ & = \sum_{k=0}^n c_{k+\varkappa} \left[ A(t) Z^*(t) T_{k+\varkappa}^*(t) + \frac{1}{\pi i} \int_0^1 B(\tau) Z^*(\tau) \frac{T_{k+\varkappa}^*(\tau)}{\tau - t} d\tau \right] = \sum_{j=0}^n f_j^* U_j^*(t), \quad t \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Поскольку (см. [6, формула (2.1)]) выражение в последних квадратных скобках представимо в виде  $\alpha_0^{(k)} U_0^*(t) + \alpha_1^{(k)} U_1^*(t) + \dots + \alpha_k^{(k)} U_k^*(t)$ ,  $t \in [0, 1]$ , где коэффициенты  $\alpha_j^{(k)}$ ,  $j = \overline{0, k}$ , определяются по правилу (2.9) из [6], то на основании (3.6) получаем тождество

$$\sum_{k=0}^n c_{k+\varkappa} [\alpha_0^{(k)} U_0^*(t) + \alpha_1^{(k)} U_1^*(t) + \dots + \alpha_k^{(k)} U_k^*(t)] = \sum_{j=0}^n f_j^* U_j^*(t), \quad t \in [0, 1],$$

из которого для определения  $c_{n+\varkappa}, c_{n+\varkappa-1}, \dots, c_\varkappa$  находим систему линейных алгебраических уравнений с треугольной матрицей. Недостающие коэффициенты  $c_{\varkappa-1}, \dots, c_1, c_0$ , как и в предыдущем случае, определим из (3.2). Для их нахождения снова будем иметь систему с треугольной матрицей.

Пусть  $\varkappa < 0$ . Приближенное решение уравнения (1.9) в этом случае найдем из уравнения

$$A(t) Z^*(t) u_{n-|\varkappa|}(t) + \frac{1}{\pi i} \int_0^1 B(\tau) Z^*(\tau) \frac{u_{n-|\varkappa|}(\tau)}{\tau - t} d\tau = f_n^*(t) + A^* + Q_{|\varkappa|-1}(t), \quad t \in (0, 1), \quad (3.7)$$

$$A^* = \frac{1}{\pi i} \int_0^1 b^*(\tau) (Z^*(\tau))^{-1} f_n^*(\tau) \tau^{|\varkappa|-1} d\tau,$$

где интерполяционный многочлен  $f_n^*(t)$  определяется по правилу (3.3),  $Q_{|\varkappa|-1}(t) = q_0^* + q_1^* t + \dots + q_{|\varkappa|-1}^* t^{|\varkappa|-1}$ ,

$$u_{n-|\varkappa|}(t) = \sum_{k=0}^{n-|\varkappa|} c_k t^k. \quad (3.8)$$

Коэффициенты  $q_0^*, q_1^*, \dots, q_{|\varkappa|-1}^*$  вспомогательного многочлена  $Q_{|\varkappa|-1}(t)$  определим из равенств (см. (1.13))

$$\frac{1}{\pi i} \int_0^1 \frac{b^*(\tau)}{Z^*(\tau)} [f_n^*(\tau) + A^* + Q_{|\varkappa|-1}(\tau)] \tau^{j-1} d\tau = 0, \quad j = \overline{1, |\varkappa|}. \quad (3.9)$$

Применяя формулу (1.14), от (3.9) приходим к системе

$$\begin{aligned} q_{|\varkappa|-1}^* + f_{|\varkappa|-1} + q_1 f_{|\varkappa|} + \dots + q_{n-|\varkappa|+1} f_n &= 0, \\ q_1 q_{|\varkappa|-1}^* + q_{|\varkappa|-2}^* + f_{|\varkappa|-2} + q_1 f_{|\varkappa|-1} + \dots + q_{n-|\varkappa|} f_n &= 0, \dots, \\ q_{|\varkappa|-1} q_{|\varkappa|-1}^* + \dots + q_1 q_1^* + q_0^* + f_0 + q_1 f_1 + \dots + q_n f_n &= 0, \end{aligned}$$

где числа  $q_1, q_2, \dots$  находятся из разложения  $(X(z))^{-1} = z^{-|\varkappa|}(1 + q_1/z + q_2/z^2 + \dots)$ ,  $|z| > 1$ . Подставляя (3.8) в (3.7), получаем равенство

$$\sum_{k=0}^{n-|\varkappa|} c_k (t^{k+|\varkappa|} + p_1 t^{k+|\varkappa|-1} + \dots + p_{k+|\varkappa|}) = \sum_{k=0}^n f_k t^k + A^* + q_0^* + q_1^* t + \dots + q_{|\varkappa|-1}^* t^{|\varkappa|-1},$$

от которого переходим к системе

$$\begin{aligned} c_{n-|\varkappa|} &= f_n, \quad p_1 c_{n-|\varkappa|} + c_{n-|\varkappa|-1} = f_{n-1}, \quad \dots, \quad p_{n-|\varkappa|} c_{n-|\varkappa|} + p_{n-|\varkappa|-1} c_{n-|\varkappa|-1} + \dots + c_0 = f_{|\varkappa|}, \\ p_{n-|\varkappa|-1} c_{n-|\varkappa|} + p_{n-|\varkappa|-2} c_{n-|\varkappa|-1} + \dots + p_1 c_0 &= f_{|\varkappa|-1} + q_{|\varkappa|-1}^*, \quad \dots, \\ p_n c_{n-|\varkappa|} + p_{n-1} c_{n-|\varkappa|-1} + \dots + p_{|\varkappa|} c_0 &= f_0 + A^* + q_0^*. \end{aligned}$$

Из первых  $n - |\varkappa| - 1$  уравнений последовательно находим  $c_{n-|\varkappa|}, c_{n-|\varkappa|-1}, \dots, c_0$ .

Приведем еще одну вычислительную схему для уравнения (1.9) с отрицательным индексом. Приближенное решение найдем из уравнения (3.7), полагая

$$\begin{aligned} f_n^*(t) &= \sum_{j=0}^n f_j^* T_j^*(t), \quad f_j^* = \frac{2}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} T_j^*(t_k) f^*(t_k), \quad j = \overline{1, n}, \quad f_0^* = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} f^*(t_k), \\ t_k &= \frac{1}{2} \cos \frac{2k-1}{2(n+1)} \pi + \frac{1}{2}, \quad k = \overline{1, n+1}, \end{aligned}$$

$$Q_{|\varkappa|-1}(t) = \sum_{m=0}^{|\varkappa|-1} h_m T_m^*(t), \quad u_{n-|\varkappa|}(t) = \sum_{k=|\varkappa|}^n c_{k-|\varkappa|} U_{k-|\varkappa|}^*(t). \tag{3.10}$$

Подставляя (3.10) в (3.7) и учитывая формулу (2.2) из [6], а именно формулу

$$\begin{aligned} A(t) Z^*(t) U_{k-|\varkappa|}^*(t) + \frac{1}{\pi i} \int_0^1 B(\tau) Z^*(\tau) \frac{U_{k-|\varkappa|}^*(\tau)}{\tau - t} d\tau &= \\ = \sum_{j=0}^k \beta_j^{(k)} T_j^*(t), \quad t \in [0, 1], \quad k = |\varkappa|, |\varkappa| + 1, \dots, \end{aligned}$$

в которой коэффициенты  $\beta_j^{(k)}$  вычисляются по правилу (2.13) из [6], будем иметь

$$\begin{aligned} \sum_{k=|\varkappa|}^n c_{k-|\varkappa|} \left[ A(t) Z^*(t) U_{k-|\varkappa|}^*(t) + \frac{1}{\pi i} \int_0^1 B(\tau) Z^*(\tau) \frac{U_{k-|\varkappa|}^*(\tau)}{\tau - t} d\tau \right] &= \\ = \sum_{k=|\varkappa|}^n c_{k-|\varkappa|} \left[ \sum_{j=0}^k \beta_j^{(k)} T_j^*(t) \right] &= \sum_{j=0}^n f_j^* T_j^*(t) + A^* + \sum_{m=0}^{|\varkappa|-1} h_m T_m^*(t) \quad \forall t \in [0, 1]. \end{aligned} \tag{3.11}$$

От (3.11) приходим к системе  $\sum_{k=j}^n \beta_j^{(k)} c_{k-|x|} = f_j^*$ ,  $j = n, n-1, \dots, |x|$ , из которой последовательно находим неизвестные  $c_{n-|x|}, c_{n-|x|-1}, \dots, c_0$ .

**Замечание 3.1.** Имея вычислительные схемы для уравнения (1.9), не представляет труда построить вычислительные схемы и для уравнения (1.7), как это сделано в работе [6].

4. Приведем порядковые оценки погрешностей построенных в п. 3 приближенных решений. Для этого введем класс функций  $W^r H^\mu$ ,  $r \geq 0$ ,  $0 < \mu \leq 1$ . Будем говорить, что функция  $f(t) \in W^r H^\mu$ ,  $t \in [0, 1]$ , если она имеет производные до порядка  $r$  включительно и  $r$ -я производная принадлежит классу Гельдера  $H(\mu) : |f^{(r)}(t') - f^{(r)}(t'')| \leq K|t' - t''|^\mu \quad \forall t', t'' \in [0, 1]$ , где  $K$  и  $\mu$  – константы, не зависящие от выбора точек  $t', t''$ .

**Теорема 4.1.** Пусть функции  $a^*(t)$ ,  $b^*(t)$ ,  $(a^*(t))^2 - (b^*(t))^2 \neq 0 \quad \forall t \in [0, 1]$ , входящие в уравнение (1.9), принадлежат классу  $H(\mu)$ ,  $0 < \mu \leq 1$ , функция  $f^*(t)$ , являющаяся правой частью этого уравнения, принадлежит классу  $W^r H^\mu$ ,  $r \geq 0$ ,  $0 < \mu \leq 1$ . Пусть, далее,  $f^*(t)$  аппроксимируется интерполяционным многочленом (3.3) по узлам Чебышева первого рода,  $u(t)$ ,  $u_{n+x}(t)$  означают соответственно точное и приближенное решение задач (1.9), (1.20), (3.1), (3.2). Тогда

$$\|(1-t)^{-\operatorname{Re} \beta_1} (u(t) - u_{n+x}(t))\|_\infty \leq M(\ln^2 n)/n^{r+\mu}, \quad (4.1)$$

где  $\beta_1$  – число, входящее в представление (1.8),  $M$  – константа, не зависящая от  $n$ .

**Доказательство.** Поскольку

$$u_{n+x}(t) = \frac{a^*(t)}{Z^*(t)} f_n^*(t) - \frac{1}{\pi i} \int_0^1 \frac{b^*(\tau) f_n^*(\tau)}{Z^*(\tau) \tau - t} d\tau + P_x(t-1),$$

то

$$u(t) - u_{n+x}(t) = \frac{a^*(t)}{Z^*(t)} [f^*(t) - f_n^*(t)] - \frac{1}{\pi i} \int_0^1 \frac{b^*(\tau) f^*(\tau) - f_n^*(\tau)}{Z^*(\tau) \tau - t} d\tau.$$

Далее, учитывая неравенство [7]  $\|f^*(t) - f_n^*(t)\|_\infty \leq M_1(\ln n)/n^{r+\mu}$ , а также оценки, приведенные в [8] для сингулярного интеграла, приходим к оценке (4.1).

**Замечание 4.1.** Теорема 4.1 справедлива и для вычислительных схем (3.5), (3.8), (3.10).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М., 1968.
2. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М., 1977.
3. Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I. // Integrals and Series. 1992. V. 5. P. 472.
4. Estrada R., Kanwal R.P. Singular Integral Equations. Boston; Basel; Berlin, 2000.
5. Шешко М.А. Сингулярные интегральные уравнения с ядрами Коши и Гильберта и их приближенное решение. Люблин, 2003.
6. Smarzewski R., Sheshko M.A., Rasolko G.A. // J. Comput. Meth. in Appl. Math. 2003. V. 2. P. 331–358.
7. Paszkowski S. // Numerical Applications of Chebyshev Polynomials and Series. Warsaw, 1975.
8. Шешко М.А. // Изв. вузов. Математика. 1976. № 12. С. 108–118.

Католический университет,  
г. Люблин, Польша

Поступила в редакцию  
29.10.2003 г.