

Рис. 6. Влияние начального диаметра частиц на долю закристаллизовавшегося вещества сплава $Fe_{89}B_{11}$. $Y_0 - Y_a = 6$ мм. Остальные параметры см. на рис. 2.

волну разрежения, зависимость $Z_{\Sigma}(d)$ оказывается не монотонной. Это связано с тем, что охлаждение частиц разного размера происходит с различной скоростью. Поэтому максимальные значения скорости охлаждения различных по размеру капель будут приходиться на различные значения температуры. Для данных условий движения частиц только для капель размером $d \approx 3.7$ мкм будут выполняться рассмотренные выше условия оптимального охлаждения, когда максимум скорости охлаждения приходится на диапазон $T_e < T_s < T_b$. Этим объясняется появление на кривой $Z_{\Sigma}(d)$ минимума в окрестности $d \approx 3.7$ мкм.

УДК 536.24

РЕШЕНИЕ СОПРЯЖЕННЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С НЕИЗВЕСТНОЙ ГРАНИЦЕЙ РАЗДЕЛА ФАЗ

© 1997 г. В. Р. Романовский

Российский научный центр "Курчатовский институт", Москва

Поступило в редакцию 11.07.96 г.

Исследование сопряженных задач теплопроводности представляет значительный интерес для оценки рабочих режимов энергонапряженных установок. Эти задачи позволяют изучить особенности процессов передачи тепла в элементах реальных конструкций с учетом их физической неоднородности, специфики физико-механического состояния поверхностей контакта. Математическая формализация соответствующих процессов приводит к системе уравнений теплопроводности для составных областей геометрически однородной (многослойные тела прямоугольной, цилиндрической, сферической формы [1]) и геометрически разнородной формы (пространственно сопряженные тела различной геометрии [2–4]) при произволь-

Таким образом, для повышения эффективности процесса газодинамической закалки необходимо использовать оптимальное сочетание различных параметров частиц и газового потока.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Манохин А.И., Митин Б.С., Васильев В.А., Ревякин А.В. Аморфные сплавы. М.: Металлургия, 1984. 160 с.
2. Фельц А. Аморфные и стеклообразные неорганические твердые тела. М.: Мир, 1986. 558 с.
3. Судзуки К., Фудзимори Х., Хасимото К. Аморфные металлы. М.: Металлургия, 1987. 328 с.
4. Аморфные (стеклообразные) металлические материалы. Сб. научн. тр. под общ. ред. Ю.К. Ковнеристого. М.: Наука, 1992. 190 с.
5. Михатулин Д.С., Полежаев Ю.В., Ревизников Д.Л., Русаков В.В. Основные закономерности образования аморфных металлических частиц при аэродинамическом охлаждении // ТВТ. 1995. Т. 33. № 3. С. 430.
6. Onorato P.I.K., Uhlman D.R. Nucleating Heterogeneities and Glass Formation // J. Non-Cryst. Solids. 1976. V. 22. № 2. P. 367.
7. Полежаев Ю.В., Михатулин Д.С., Ревизников Д.Л., Русаков В.В. Основные закономерности кинетики кристаллизации и возможности получения аморфных металлов // ТВТ. 1995. Т. 33. № 6. С. 971.

ной комбинации граничных условий первого, второго и третьего рода и наличии условий взаимного теплового влияния поверхностей соприкосновения. Последние в наиболее общем случае описываются моделью неидеального теплового контакта. Она позволяет рассматривать реальное состояние межконтактных областей, дефекты термического слоя на поверхностях соприкосновения (трещины, расслоение, контактные пятна и т.п. [5, 6]).

Характерной особенностью решаемых при этом задач является фиксированное местоположение поверхности раздела сред. Однако ряд явлений (теплоперенос в телах с фазовым переходом

второго рода, теплообмен при наличии кризиса кипения, джоулев саморазогрев доменных структур, неизотермическая диффузия магнитного потока внутри жестких сверхпроводников) требует решения уравнений теплопроводности в случаях, когда местоположение внутренней границы раздела фаз неизвестно и подлежит определению. В отличие от известной задачи Стефана при решении данных проблем на поверхности раздела соблюдаются непрерывность температуры и теплового потока, что, вообще говоря, не позволяет записать в явной форме уравнение ее движения. Эта особенность существенно ограничивает возможности использования методов, разработанных для решения задач типа Стефана, основанных на явной форме записи уравнения распространения границы фазового перехода.

В данном сообщении изложен метод решения сопряженных задач теплопроводности с неизвестной границей раздела фаз. Рассмотрим стационарный одномерный процесс передачи тепла в двухфазной среде, описываемый уравнениями вида

$$C_m \frac{\partial T_m}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_m \frac{\partial T_m}{\partial x} \right) - \frac{h_m P_m}{S} (T_m - T_0) + F_m(x, t, T_m), \quad (1)$$

$$t > 0, \quad m = 1, 2$$

с начальными условиями

$$T_m(x, 0) = \varphi_m(x), \quad (2)$$

с граничными условиями

$$\gamma_1 T_1(0, t) = f_1(t), \quad (3)$$

$$\gamma_2 T_2(l, t) = f_2(t), \quad (4)$$

$$\gamma_m = \gamma_{1,m} + \gamma_{2,m} \frac{\partial}{\partial x}, \quad \gamma_{1,m}^2 + \gamma_{2,m}^2 > 0, \quad m = 1, 2$$

при наличии условия сопряжения на поверхности раздела сред $x = x_n(t)$

$$T_1 = T_2 = T_c, \quad (5)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x}. \quad (6)$$

Условия (5), (6) учитывают скачкообразное изменение теплоемкости C_m , коэффициента теплопроводности λ_m , теплоотдачи h_m , плотности объемных источников тепловыделения F_m после достижения заданной температуры. Здесь S – площадь поперечного сечения, T_0 – температура хладагента, T_c – температура фазового перехода, $x_n(t)$ – изменяющаяся во времени граница фазового перехода, подлежащая определению.

Для решения задачи (1) – (6) воспользуемся методом, численная реализация которого не вызывает затруднений. Его суть заключается в определении корня нелинейного уравнения, задаваемого условием сопряжения тепловых потоков (6), где $x_n(t)$ – искомая величина. В этом случае проводимые вычисления будут заключаться в отделении, а затем в уточнении корня этого уравнения. На первом шаге для каждой фазы будем решать две независимые начально-краевые задачи (1)–(3), (5) и (1), (2), (4), (5), в которых условие непрерывности температуры (5) является граничным условием для соответствующих фаз. При этом на каждом временном шаге для итерационной последовательности $x_n^{(s)}(t)$, $s = 1, 2, \dots$ находится знак выражения

$$l^{(s)} = \left(\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} - \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} \right) \Big|_{x=x_n^{(s)}(t)}$$

с целью определения таких двух последовательных значений $l^{(s)}$ и $l^{(s+1)}$, знаки которых противоположны. После этого нетрудно выполнить уточнение корня, лежащего между значениями $x_n^{(s)}$ и $x_n^{(s+1)}$. Условием окончания итерационного процесса является выполнение неравенства

$$|x_n^{(s)} - x_n^{(s+1)}| < \varepsilon,$$

где ε – заданная точность.

В качестве иллюстрации работоспособности изложенного метода на рис. 1 приведены результаты расчета начально-краевой задачи вида

$$C \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \frac{hp}{S} (T - T_0) + J^2 \rho \begin{cases} 1, & T > T_c \\ 0, & T \leq T_c, \end{cases}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}(0, t) = 0, \quad T(l, t) = T_0,$$

$$T(x, 0) = \begin{cases} T_1 > T_c, & 0 \leq x \leq x_0 \\ T_0, & x_0 < x \leq l, \end{cases}$$

описывающей симметричное относительно начала координат изменение температурного поля в охлаждаемом проводнике с током, в котором джоулево тепловыделение имеет место только после превышения некоторой критической температуры $T_c = T_0 + (T_{CB} - T_0)(1 - J/2\eta J_{c0})$. Подобные задачи возникают при анализе теплового состояния композитных сверхпроводников [7] (в частности, при анализе устойчивости их сверхпроводящего состояния к импульсным тепловым возмущениям). В простейшем случае оно может быть выполнено с помощью записанного выше начального условия. Последнее соответствует мгновенному нагреву

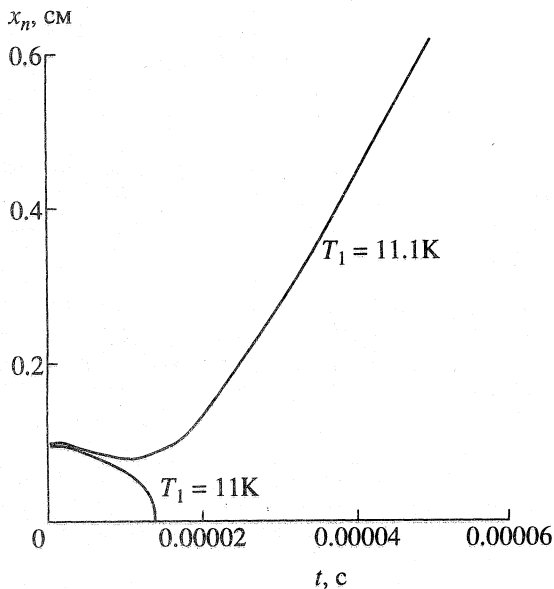


Рис. 1. Изменение во времени протяженности тепловыделяющей области при различных начальных температурах нагрева локального участка проводника.

локального участка композита до температуры выше критической. При этом, как наглядно показано на рис. 1, в зависимости от величины начальной температуры T_1 для заданного значения x_0 зона с нормальной проводимостью x_n , определяемая из уравнения $T(x_n, t) = T_c$, либо исчезает, либо необратимым образом распространяется по всему проводнику. При проведении вычислений исходные параметры задавались равными

$$\begin{aligned} C &= 10^3 \text{ Дж/м}^3 \text{ К}, \quad \lambda = 300 \text{ Вт/м К}, \\ J_{c0} &= 4 \times 10^9 \text{ А/м}^2, \quad \rho = 4 \times 10^{-10} \text{ Ом} \cdot \text{м}, \\ T_{CB} &= 9 \text{ К}, \quad T_0 = 4.2 \text{ К}, \quad \eta = 0.5, \\ a &= 5 \times 10^{-4} \text{ м}, \quad l = 0.1 \text{ м}, \quad x_0 = 10^{-3} \text{ м}, \\ h &= 100 \text{ Вт/м}^2 \text{ К}, \end{aligned} \quad (7)$$

которые соответствуют ниобий-титановому сверхпроводнику в медной матрице.

Общность предлагаемой методики позволяет решать и более сложные задачи. На рис. 2 изображена динамика границы области насыщения r_p , в которой протекает ток, при его вводе с различной скоростью в композитный сверхпроводник цилиндрической формы. Результаты получены для композита с параметрами (7) из решения системы уравнений вида

$$C \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + JE \begin{cases} 1, & r_p(t) < r < a \\ 0, & 0 < r \leq r_p(t), \end{cases}$$

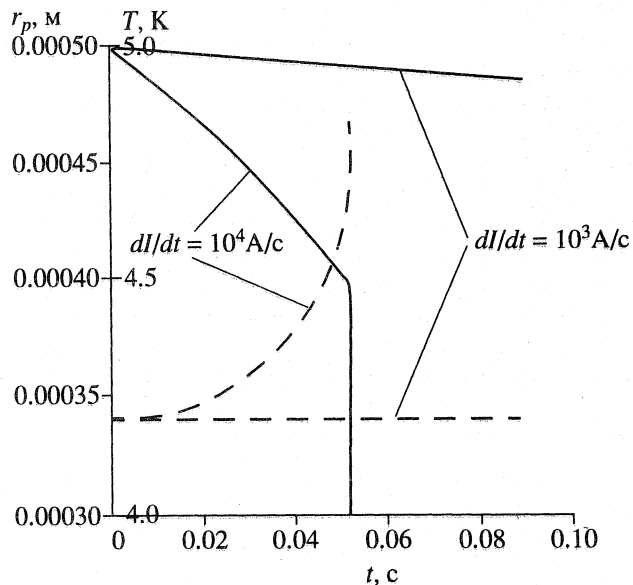


Рис. 2. Заполнение поперечного сечения композитного сверхпроводника током (сплошные кривые) и изменение температуры его поверхности (штриховые кривые) при нарастании внешнего магнитного поля.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rB) = \mu_0 J, \quad \frac{\partial E}{\partial r} = \frac{\partial B}{\partial t},$$

$$J = \eta J_c(T) + \frac{1}{\rho} E, \quad J_c = J_{c0} \frac{T_{CB} - T}{T_{CB} - T_0}$$

с начальными и краевыми условиями

$$T(r, 0) = T_0, \quad B(r, 0) = 0,$$

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial r} + h(T - T_0)|_{r=a} = 0, \quad B(r_p, t) = 0,$$

$$B(a, t) = B_a(t) = \frac{\mu_0}{2\pi a} \frac{dI}{dt} t.$$

Подобные задачи описывают в рамках так называемой модели критического состояния диффузию теплового потока и электромагнитного поля внутри сверхпроводящего композита [7]. При этом предполагается, что он в начальный момент времени равномерно охлажден до температуры хладагента и ток в нем отсутствует. Граничные условия учитывают отвод тепла в хладагент и ввод тока за счет изменения внешнего магнитного поля B_a . При решении данного класса задач граница проникновения тока определяется из уравнения

$$\frac{\mu_0}{a} \int_{r_p}^a J(r, t) r dr = B_a.$$

Она является поверхностью раздела между областями, в которых электромагнитное поле либо

отсутствует ($E = 0, B = 0$) при $0 < r < r_p$, либо существует при $r_p < r < a$. Расчет ее динамики лежит в основе исследования устойчивости критического состояния жестких сверхпроводников при воздействии возмущающих факторов различной природы. В частности, из рис. 2 видно, что при определенных условиях перераспределение тока внутри композита может приобретать лавинообразный характер в результате возникновения так называемой термомагнитной неустойчивости, когда размер тепловыделяющей области резко увеличивается. Подобное развитие процесса ввода тока сопровождается соответствующим увеличением температуры композита выше критической, т.е. его переходом в нормальное состояние.

Отметим, что предложенная методика в силу своей универсальности может быть использована и при решении задач типа Стефана.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 95-02-03527а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лыков А.В.* Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 599 с.
2. *Макаров А.М., Романовский В.Р.* Нестационарный теплообмен в оребренной тонкостенной оболочке вращения при наличии термического сопротивления в зоне сопряжения // ТВТ. 1979. Т. 17. № 1. С. 120.
3. *Макаров А.М., Романовский В.Р.* Нестационарные температурные поля в элементах мембранно-лепестковых теплообменников // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. 1980. № 5. С. 140.
4. *Макаров А.М., Романовский В.Р.* Решение нестационарной задачи теплопроводности в неидеально сопряженных геометрически разнородных структурах // Промышленная теплотехника. 1981. Т. 3. № 4. С. 16.
5. *Макаров А.М., Романовский В.Р.* Решение сопряженной задачи теплопроводности для трех тонкостенных тел при переменном неидеальном контакте // ТВТ. 1979. Т. 17. № 4. С. 822.
6. *Макаров А.М., Романовский В.Р.* Температурное поле в составных конструкциях при переменном контакте сопрягаемых элементов // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. 1979. № 5. С. 156.
7. *Гуревич А.Вл., Минц Р.Г., Рахманов А.Л.* Физика композитных сверхпроводников. М.: Наука, 1987. 240 с.