



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

S. M. Bauer, E. B. Voronkova, On asymmetrical equilibrium states of annular plates under normal pressure, *Izv. Saratov Univ. Math. Mech. Inform.*, 2024, Volume 24, Issue 1, 28–34

DOI: 10.18500/1816-9791-2024-24-1-28-34

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.81

February 10, 2025, 07:11:43





Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 1. С. 28–34
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2024, vol. 24, iss. 1, pp. 28–34
mml.sgu.ru <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-1-28-34>, EDN: MEUNCA

Научная статья
УДК 539.3

О несимметричных формах равновесия кольцевых пластин под действием нормального давления

С. М. Бауэр, Е. Б. Воронкова[✉]

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия, 199034, г. Санкт-Петербург, Университетская наб., д. 7–9

Бауэр Светлана Михайловна, доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической и прикладной механики, s.bauer@spbu.ru, <https://orcid.org/0000-0003-3732-2110>, AuthorID: 6610

Воронкова Ева Боруховна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического моделирования энергетических систем, e.voronkova@spbu.ru, <https://orcid.org/0000-0002-3065-4473>, AuthorID: 111797

Аннотация. Рассматривается потеря устойчивости осесимметричных форм равновесия кольцевых пластин, нагруженных нормальным давлением, с упруго закрепленным краем. Значения нагрузки, при которой происходит переход в несимметричное состояние, определяется численным методом в предположении, что несимметричная составляющая решения носит периодический характер. Исследовано влияние размеров внутреннего радиуса пластины и условий закрепления края на величину критической нагрузки и форму потери устойчивости. Показано, что при увеличении внутреннего радиуса пластина теряет устойчивость при больших значениях нагрузки, но с образованием меньшего числа волн по краю. С увеличением жесткости пружины, препятствующей свободному смещению края пластины в радиальном направлении, бифуркация в несимметричное состояние может происходить при существенно больших нагрузках и с образованием большего числа волн в окружном направлении.

Ключевые слова: кольцевая пластина, нормальное давление, упругая заделка

Для цитирования: Бауэр С. М., Воронкова Е. Б. О несимметричных формах равновесия кольцевых пластин под действием нормального давления // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 1. С. 28–34. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-1-28-34>, EDN: MEUNCA

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

On asymmetrical equilibrium states of annular plates under normal pressure

S. M. Bauer, E. B. Voronkova[✉]

St. Petersburg State University, 7–9 Universitetskaya Emb., St. Petersburg 199034, Russia

Svetlana M. Bauer, s.bauer@spbu.ru, <https://orcid.org/0000-0003-3732-2110>, AuthorID: 6610

Eva B. Voronkova, e.voronkova@spbu.ru, <https://orcid.org/0000-0002-3065-4473>, AuthorID: 111797

Abstract. The unsymmetrical buckling of annular plates with an elastically restrained edge which are subjected to normal pressure is studied in this paper. The unsymmetric part of the solution is sought in terms of multiples of the harmonics of the angular coordinate. A numerical method is employed to obtain the lowest load value, which leads to the appearance of waves in the circumferential direction. The effect of plate geometry (ratio of inner to outer radii) and boundary on the buckling load is examined. It is



shown, that for an annulus the buckling pressure and the buckling mode number decreases as the inner radius increases. It is shown that as the internal radius increases, the plate loses stability as the buckling pressure decreases, which also leads to the buckling mode number decrease.

Keywords: annular plate, normal pressure, elastic restraint

For citation: Bauer S. M., Voronkova E. B. On asymmetrical equilibrium states of annular plates under normal pressure. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 1, pp. 28–34 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-1-28-34>, EDN: MEUNCA This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

Вопросы устойчивости оболочек вращения и пластин при различных нагрузках и условиях закрепления являются предметом постоянного обсуждения в научной литературе. Исследуя вопрос о равновесии и потере устойчивости пологих оболочек при больших прогибах, Д. Ю. Панов и В. И. Феодосьев первыми получили решение, соответствующее несимметричным формам равновесия у пластины, нагруженной нормальным давлением [1]. Используя метод Галеркина, авторы нашли минимальное значение нагрузки и волновое число n , соответствующие появлению вмятин по краю пластины. Однако позже эти результаты подверглись критике, так как принятая однопараметрическая аппроксимация недостаточно точно описывала большие прогибы в докритическом состоянии и, как следствие, привела к ошибочным вычислениям значений критической нагрузки и формы потери устойчивости [2, 3].

Строгие доказательства существования и единственности несимметричного решения у симметрично нагруженной пластины были проведены Н. Ф. Морозовым [4] и W. O. Piechocki [5]. С. D. Soman опубликовал серию работ, посвященных асимптотическим методам решения задачи о потере осесимметричных форм равновесия круглых пластин и сферических оболочек, нагруженных нормальным давлением [6, 7]. Полученные асимптотические решения согласуются с численными расчетами разных авторов [3, 8–10]. При этом Soman отмечает, что появление несимметричных форм равновесия у полой оболочки возможно не при всех типах закрепления края оболочки.

Задача о бифуркации в несимметричное состояние неоднородных в радиальном направлении круглых или кольцевых пластин рассматривалась в работах [8–10]. Получены зависимости критической нагрузки и формы потери устойчивости от скорости изменения жесткости пластины от центра к краю. В настоящей работе обсуждается влияние условий закрепления на появление несимметричных форм равновесия у однородной кольцевой пластины.

1. Постановка задачи

Разрешающая безразмерная система уравнений деформации кольцевой изотропной пластины, нагруженной равномерно распределенным нормальным давлением, относительно функций нормального прогиба $w(r, \theta)$ и усилий $F(r, \theta)$ имеет вид

$$\Delta\Delta w = p + L(w, F), \quad \Delta\Delta F = -L(w, w)/2. \quad (1)$$

Здесь r, θ — полярные координаты срединной поверхности пластины, p — нормальное внешнее давление, Δ — оператор Лапласа, записанный в цилиндрических координатах, L — дифференциальный оператор:

$$\begin{aligned} \Delta &= (\cdot)' + (\cdot)'/r + (\cdot\cdot\cdot)/r^2, \\ L(x, y) &= x''(y'/r + \ddot{y}/r^2) + y''(x'/r + \ddot{x}/r^2) - 2(\dot{x}/r)'(\dot{y}/r)', \\ (\cdot)' &= \partial(\cdot)/\partial r, \quad (\dot{\cdot}) = \partial(\cdot)/\partial \theta. \end{aligned}$$

Безразмерные величины в (1) связаны с размерными соотношениями

$$r = \frac{\tilde{r}}{R}, \quad w = \beta \frac{\tilde{w}}{h}, \quad p = \beta^3 \frac{\tilde{p} R^4}{E h^4}, \quad F = \beta^2 \frac{\tilde{F}}{E h^3}, \quad \beta^2 = 12(1 - \nu^2),$$

где R, h — радиус и толщина пластины, E, ν — модуль упругости и коэффициент Пуассона материала пластины.

На краю пластины можно задать один из 16 вариантов стандартных граничных условий, полагая равной нулю одну из величин в каждой из пар: u или T_r ; v или S ; w' или M_r ; w' или Q_1^* , где u, v, w — компоненты вектора перемещений, T_r, S, M_r, Q_1^* — тангенциальные усилия, изгибающий момент и обобщенная перерезывающая сила соответственно. Для моделирования жестко заделанного края необходимо задать условия $u = v = w = w' = 0$. Свободный край описывается условиями $T_r = S = Q_1^* = M_r = 0$.

Будем считать, что внутренний край пластины ($r = \delta = R_{in}/R$) может смещаться в направлении ее оси, но при этом не поворачивается. В этом случае на внутреннем контуре должны выполняться условия

$$u = w' = Q_1^* = S = 0. \quad (2)$$

Предположим, что точки внешнего края закреплены от смещения в направлении нормали к срединной поверхности и от поворотов, т. е. $w = w' = 0$. При этом свободному смещению точек края в радиальном направлении препятствует упругая связь. Тогда граничные условия можно записать в виде

$$w = w' = k_u u + T_r = S = 0, \quad (3)$$

где k_u — коэффициент упругости заделки. Случаю $k_u = 0$ соответствует скользящая заделка, т. е. защемление точек края без закрепления в радиальном направлении.

Граничные условия (2), (3) можно записать через искомые функции w, F , используя представления для усилий T_r, T_θ, S , а также представление компонент деформации $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \omega$ через компоненты вектора перемещений u, v, w , с одной стороны, и усилий T_r, T_θ, S , с другой:

$$\begin{aligned} T_r &= F'/r + \ddot{F}/r^2, \quad T_\theta = F'', \quad S = -(\dot{F}/r), \\ \varepsilon'_\theta - \varepsilon/r - \dot{\omega}/r &= (T_\theta - \nu T_r)' - (T_r - \nu T_\theta)/r - 2(1 + \nu)\dot{S}/r = \\ &= -u/r^2 - \ddot{u}/r^2 - (w')^2/2r - \ddot{w}w'/r - (\dot{w})^2/r^3. \end{aligned} \quad (4)$$

При выводе (4) использована связь безразмерной переменной $u(r, \theta)$ с размерной $u = \beta^2 \frac{R}{h^2} \tilde{u}$.

Обобщенная сила Q_1^* выражается через изгибающие и скручивающие моменты M_r, M_θ, H как

$$Q_1^* = Q_r + \dot{H}/r = M_r' + (M_r - M_\theta)/r + 2\dot{H}/r.$$

Докритическое состояние пластины при малых значениях нагрузки описывается системой

$$\begin{aligned} \Theta_0'' + \frac{\Theta_0'}{r} - \frac{\Theta_0}{r^2} &= \frac{pr}{2} \left(1 - \frac{R_{in}}{r^2} \right) + \frac{\Theta_0 \Phi_0}{r}, \\ \Phi_0'' + \frac{\Phi_0'}{r} - \frac{\Phi_0}{r^2} &= -\frac{\Theta_0^2}{2r}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\Theta_0 = \Theta_0(r) = w_0'(r)$ и $\Phi_0 = \Phi_0(r) = F_0'(r)$, и $w_0(r), F_0(r)$ определяют докритическое симметричное решение.

Граничные условия (2), (3) с учетом (4) примут вид

$$\begin{aligned} \Phi_0' - \nu \Phi_0/r &= \Theta_0 = 0 \quad \text{при } r = \delta, \\ \Theta_0 &= k_u(\Phi_0' - \nu \Phi_0) + \Phi_0 = 0 \quad \text{при } r = 1, \end{aligned} \quad (6)$$

Для определения несимметричной формы потери устойчивости представим решение в виде $w(r, \theta) = w_0(r) + w_n(r) \cos(n\theta)$, $F(r, \theta) = F_0(r) + F_n(r) \cos(n\theta)$, где функции $w_{ns}(r, \theta) = w_n(r) \cos(n\theta)$, $F_{ns}(r, \theta) = F_n(r) \cos(n\theta)$ описывают поведение пластины сразу после ее перехода в неосесимметричное состояние, n — число волн в окружном направлении, образовавшихся в результате бифуркации.



Разрешающую систему для несимметричных составляющих функций прогиба w_n и усилий F_n можно получить после подстановки выражений для $w(r, \theta)$, $F(r, \theta)$ в систему (6) и ее линейризации относительно малых функций $w_n(r)$, $F_n(r)$:

$$\begin{aligned}\Delta_n \Delta_n w_n &= \Theta'_0 \left(\frac{F'_n}{r} - \frac{n^2}{r^2} F_n \right) - \Phi'_0 \left(\frac{w'_n}{r} - \frac{n^2}{r^2} w_n \right) + \frac{w''_n}{r} \Phi_0 + \frac{F''_n}{r} \Theta_0, \\ \Delta_n \Delta_n F_n &= -\frac{w''_n}{r} \Theta_0 - \Theta'_0 \left(\frac{w'_n}{r} - \frac{n^2}{r^2} w_n \right),\end{aligned}\quad (7)$$

где $\Delta_n = d^2/dr^2 + r^{-1}d/dr - n^2/r^2$.

Граничные условия (2) примут вид

$$\begin{aligned}w'_n &= F'_n - F_n/r = (\Delta_n w_n)' - \frac{n^2}{r}(1 - \nu)(w_n/r)' = 0, \\ (\Delta_n F_n)' - \frac{\Delta_n F_n}{r} - \frac{n^2 - 1}{r^2}(1 + \nu)F'_n &\text{ при } r = \delta,\end{aligned}\quad (8)$$

а условия (3) перейдут в

$$\begin{aligned}w_n &= w'_n = k_u u_n + F'_n - n^2 F_n = 0 \text{ при } r = 1, \\ u_n &= (F'''_n - (1 - \nu + n^2(2 + \nu))F'_n + 3n^2 F_n).\end{aligned}\quad (9)$$

Метод решения задачи изложен в работах [3, 9]. Сначала для заданных значений нагрузки p решается симметричная задача, далее методом прогонки проверяется существование решения несимметричной задачи при выбранном значении волнового числа n . Обозначим за p_n нагрузку, при которой для заданного числа волн в окружном направлении существуют отличные от нуля функции w_n , F_n . Тогда критическая нагрузка $p_{cr} = \min_n p_n$, т. е. наименьшее значение нагрузки p_n , при которой появляются волны в окружном направлении.

2. Осесимметричное напряженно-деформированное состояние и появление асимметричных форм равновесия

Сжимающие напряжения в окрестности края пластины создают условия для появления несимметричных форм равновесия у симметрично загруженной пластины [3]. На рис. 1 показано, как меняется интенсивность сжимающих окружных напряжений $T_{\theta\theta}(r)$ при изменении жесткости заделки k_u . Значение $k_u = 0$ соответствует скользящей заделке, при которой точки края могут свободно смещаться в радиальном направлении. Видно, что ограничение радиальных смещений приводит к сужению зоны сжимающих напряжений и уменьшению их интенсивности ($k_u = 0.1$ и $k_u = 1$). При больших значениях жесткости пружины окружные усилия принимают только положительные значения, и в этом случае бифуркация в асимметричное состояние невозможна. Аналогичные результаты получены в [9] для круглых пластин. Отметим, что полному отсутствию смещения в направлении радиуса пластины ($u = 0$) соответствует значение $k_u = \infty$. При увеличении внутреннего радиуса пластины окружные усилия в окрестности края становятся менее интенсивными (рис. 2). Следует отметить, что для узких кольцевых пластин ($\delta > 0.5$) зона, в которой окружные напряжения принимают отрицательные значения, занимает более 60% ширины пластины.

В работах [3, 8] рассматривалась устойчивость осесимметричного состояния равновесия однородной круглой пластины при условии скользящей заделки края. Показано, что такая пластина переходит в неосесимметричное состояние при безразмерной критической нагрузке, равной $p_{cr}^* = 64956$, с образованием 14 волн по краю пластины. Для кольцевых пластин при скользящей заделке внешнего края бифуркация в неосесимметричное состояние происходит при больших значениях критической нагрузки и меньшем числе волн в сравнении с круглой пластиной (рис. 3).

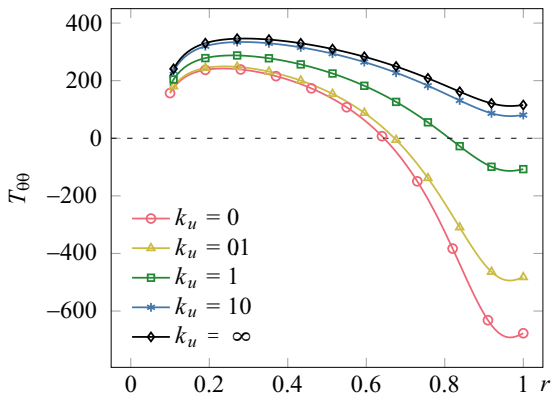


Рис. 1. Безразмерное окружное усилие $T_{\theta}(r)$ для различных значений жесткости заделки внешнего края k_u и внутреннем радиусе $\delta = 0.1$ (цвет онлайн)

Fig. 1. Dimensionless circumferential stress resultant $T_{\theta}(r)$ for different values of spring stiffness k_u . Here $\delta = 0.1$ (color online)

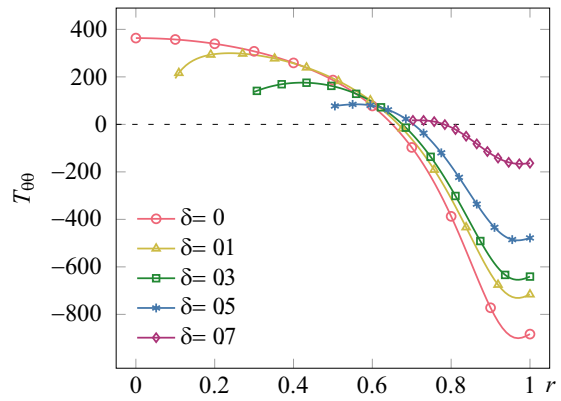


Рис. 2. Влияние внутреннего радиуса на распределение окружных усилий ($k_u = 0.05$). Расчеты проводились для $p = 40000$, $\nu = 0.4$ (цвет онлайн)

Fig. 2. Dependence of geometry of an annular plate (inner-to-outer ratio δ) on the distribution of circumferential stress resultant T_{θ} . Here $k_u = 0.05$. Load value and Poisson's coefficient are taken as $p = 40000$, $\nu = 0.4$ (color online)

Так, для пластины с внутренним радиусом $\delta = 0.1$ критическая нагрузка возрастает в 1.08 раза, а число волн в форме потери устойчивости равно $n = 13$ (таблица). Для значений $\delta = 0.5$ нагрузка отличается более чем в 3 раза от критической нагрузки круглой пластины, а число волн уменьшается с 14 для круглой пластины до 9. Аналогичные зависимости были получены для круглых пластин и сферических панелей в [10].

Зависимость нагрузки от p_n/p_{cr}^* от волнового числа n в форме потери устойчивости для различных условий закрепления края представлена на рис. 4.

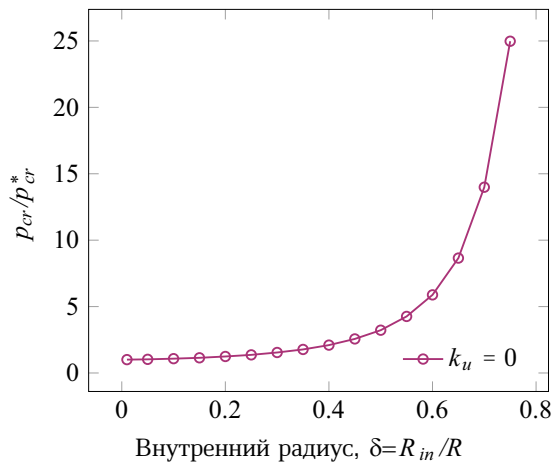


Рис. 3. Зависимость нагрузки p_{cr}/p_{cr}^* от размеров внутреннего радиуса при скользящей заделке внешнего края (цвет онлайн)

Fig. 3. Dependence of the normalized critical load p_{cr}/p_{cr}^* on inner radius δ (color online)

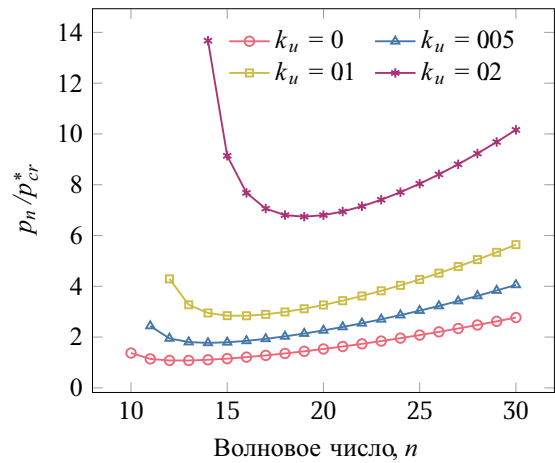


Рис. 4. Зависимость нагрузки p_n/p_{cr}^* от волнового числа n в форме потери устойчивости для различных условий закрепления внешнего края. Здесь $\delta = 0.1$, p_{cr}^* соответствует критической нагрузке для круглой пластины при $k_u = 0$ (цвет онлайн)

Fig. 4. Dependence of the normalized critical load p_n/p_{cr}^* on the mode number n for different values of the restraint coefficient k_u . p_{cr}^* denotes the buckling pressure for a circular plate with a movable edge (color online)



Увеличение жесткости пружины k_u , ограничивающей перемещение точек внешнего края в плоскости пластины, также приводит к резкому росту значений критической нагрузки. При этом пластина переходит в несимметричное состояние с образованием большого числа волн по краю пластины. Так, для кольцевой пластины с внутренним радиусом $\delta = 0.1$ критическая нагрузка отличается от нагрузки p_{cr}^* , при которой круглая пластина теряет устойчивость, в 1.77 раза при $k_u = 0.05$. Если жесткость пружины принять равной $k_u = 0.2$, то критическая нагрузка p_{cr} будет отличаться от нагрузки p_{cr}^* почти в 7 раз, а число волн увеличится до 18. Отношение критической нагрузки при наличии упругой заделки p_{cr} к аналогичным значениям при условии свободного перемещения точек края в радиальном направлении ($k_u = 0$) $p_{cr}^{k_u=0}$ меняется на 6% при $k_u = 0.1$ и на 20% при $k_u = 0.2$ при увеличении внутреннего радиуса с $\delta = 0.1$ до $\delta = 0.25$ соответственно (см. таблицу).

Критическая нагрузка и волновое число для кольцевых пластин при различных значениях жесткости пружины и внутреннего радиуса

Table. Normalized critical buckling load and corresponding wave numbers for the annular plate for different values of the restrained coefficient of the outer edge and inner radius

k_u	0	0.05	0.1	0.2
$\delta = 0.1$				
Критическая нагрузка, p_{cr}/p_{cr}^* ($p_{cr}/p_{cr}^{k_u=0}$)	1.08 (1)	1.77 (1.64)	2.84 (2.63)	6.8 (6.3)
Волновое число, n	13	14	15	18
$\delta = 0.25$				
Критическая нагрузка, p_{cr}/p_{cr}^* ($p_{cr}/p_{cr}^{k_u=0}$)	1.36 (1)	2.33 (1.7)	3.87 (2.85)	9.46 (6.96)
Волновое число, n	11	12	14	17
$\delta = 0.5$				
Критическая нагрузка, p_{cr}/p_{cr}^* ($p_{cr}/p_{cr}^{k_u=0}$)	3.22 (1)	–	–	–
Волновое число, n	9			
$\delta = 0.75$				
Критическая нагрузка, p_{cr}/p_{cr}^* ($p_{cr}/p_{cr}^{k_u=0}$)	24.9 (1)	–	–	–
Волновое число, n	7			

Заключение

Приведены результаты численных расчетов потери устойчивости симметричных форм равновесия кольцевых пластин с упруго заделанным внешним краем. Показано, что увеличение внутреннего радиуса пластины приводит к увеличению значений критической нагрузки в сравнении с круглой пластиной, но образованию меньшего числа волн в окружном направлении. Ограничения перемещений точек края пластины в окружном направлении сопровождается ростом критической нагрузки и увеличением числа волн в форме потери устойчивости. Полученные результаты согласуются с результатами для круглых пластин и пологих сферических панелей.

Список литературы

1. Панов Д. Ю., Феодосьев В. И. О равновесии и потере устойчивости пологих оболочек при больших прогибах // Прикладная математика и механика. 1948. Т. 12, вып. 4. С. 389–406.
2. Феодосьев В. И. Об одном способе решения нелинейных задач устойчивости деформируемых систем // Прикладная математика и механика. 1963. Т. 27, вып. 2. С. 265–274.
3. Cheo L. S., Reiss E. L. Unsymmetric wrinkling of circular plates // Quarterly of Applied Mathematics. 1973. Vol. 31, iss. 1. P. 75–91. <https://doi.org/10.1090/qam/99710>
4. Морозов Н. Ф. К вопросу о существовании несимметричного решения в задаче о больших прогибах круглой пластинки, загруженной симметричной нагрузкой // Известия высших учебных заведений. Математика. 1961. № 2. С. 126–129.
5. Piechocki W. On the nonlinear theory of thin elastic spherical shells: Nonlinear partial differential equations solutions in theory of thin elastic spherical shells subjected to temperature fields and external loading // Archiwum Mechaniki Stosowanej. 1969. Vol. 21, iss. 1. P. 81–102.



6. Coman C. D., Bassom A. P. Asymptotic limits and wrinkling patterns in a pressurised shallow spherical cap // *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2016. Vol. 81. P. 8–18. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2015.12.004>
7. Coman C. D. On the asymptotic reduction of a bifurcation equation for edge-buckling instabilities // *Acta Mechanica*. 2018. Vol. 229. P. 1099–1109. <https://doi.org/10.1007/s00707-017-2036-8>
8. Бауэр С. М., Воронкова Е. Б. О несимметричной форме потери устойчивости неоднородных круглых пластин // *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия*. 2021. Т. 8, № 2. С. 204–211. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.201>, EDN: HDOOGN
9. Bauer S. M., Voronkova E. B. On buckling behavior of inhomogeneous shallow spherical caps with elastically restrained edge // *Analysis of Shells, Plates, and Beams in Advanced Structured Materials* / eds.: H. Altenbach, N. Chinchaladze, R. Kienzler, W. H. Müller. Cham : Springer, 2020. P. 65–74. (Advanced Structured Materials, vol. 134). https://doi.org/10.1007/978-3-030-47491-1_4
10. Bauer S. M., Voronkova E. B. Asymmetric buckling of heterogeneous annular plates // *Recent Approaches in the Theory of Plates and Plate-Like Structures in Advanced Structured Materials* / eds.: S. Bauer, V. A. Eremeyev, G. I. Mikhasev, N. F. Morozov, H. Altenbach. Cham : Springer, 2022. P. 17–26. (Advanced Structured Materials, vol. 151). https://doi.org/10.1007/978-3-030-87185-7_2

References

1. Panov D. Yu., Feodosiev V. I. On the equilibrium and loss of stability of shallow shells in the case of large displacement. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Journal of Applied Mathematics and Mechanics], 1948, vol. 12, iss. 4, pp. 389–406 (in Russian).
2. Feodos'ev V. I. On a method of solution of the nonlinear problems of stability of deformable systems. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1963, vol. 27, iss. 2, pp. 392–404. [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(63\)90008-X](https://doi.org/10.1016/0021-8928(63)90008-X)
3. Cheo L. S., Reiss E. L. Unsymmetric wrinkling of circular plates. *Quarterly of Applied Mathematics*, 1973, vol. 31, iss. 1, pp. 75–91. <https://doi.org/10.1090/qam/99710>
4. Morozov N. F. On the existence of a non-symmetric solution in the problem of large deflections of a circular plate with a symmetric load. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Matematika*, 1961, iss. 2, pp. 126–129 (in Russian).
5. Piechocki W. On the nonlinear theory of thin elastic spherical shells: Nonlinear partial differential equations solutions in theory of thin elastic spherical shells subjected to temperature fields and external loading. *Archiwum Mechaniki Stosowanej*, 1969, vol. 21, iss. 1, pp. 81–102.
6. Coman C. D., Bassom A. P. Asymptotic limits and wrinkling patterns in a pressurised shallow spherical cap. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2016, vol. 81, pp. 8–18. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2015.12.004>
7. Coman C. D. On the asymptotic reduction of a bifurcation equation for edge-buckling instabilities. *Acta Mechanica*, 2018, vol. 229, pp. 1099–1109. <https://doi.org/10.1007/s00707-017-2036-8>
8. Bauer S. M., Voronkova E. B. On non-axisymmetric buckling modes of inhomogeneous circular plates. *Vestnik St. Petersburg University, Mathematics*, 2021, vol. 54, iss. 2, pp. 113–118. <https://doi.org/10.1134/S1063454121020023>
9. Bauer S. M., Voronkova E. B. On buckling behavior of inhomogeneous shallow spherical caps with elastically restrained edge. In: Altenbach H., Chinchaladze N., Kienzler R., Müller W. H. (eds.) *Analysis of Shells, Plates, and Beams*. Advanced Structured Materials, vol. 134. Cham, Springer, 2020, pp. 65–74. https://doi.org/10.1007/978-3-030-47491-1_4
10. Bauer S. M., Voronkova E. B. Asymmetric buckling of heterogeneous annular plates. In: Bauer S., Eremeyev V. A., Mikhasev G. I., Morozov N. F., Altenbach H. (eds.) *Recent Approaches in the Theory of Plates and Plate-Like Structures*. Advanced Structured Materials, vol. 151. Cham, Springer, 2022, pp. 17–26. https://doi.org/10.1007/978-3-030-87185-7_2

Поступила в редакцию / Received 07.12.2023

Принята к публикации / Accepted 28.12.2023

Опубликована / Published 01.03.2024