Схема доказательства. 1) Определим оператор (9) на функциях $f \in K_a^\alpha(L_p)$ следующим образом: $(K_a^\alpha)^{-1} f = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} (K_a^\alpha)_\varepsilon^{-1} f$, где $(K_a^\alpha)_\varepsilon^{-1} f = \overline{D}_{\lambda,\varepsilon}^\alpha f + af + \mu_\alpha(|x|) * f$. Тогда равенство

$$\lim_{\varepsilon\to 0} (K_a^\alpha)_\varepsilon^{-1} K_a^\alpha \varphi \equiv \varphi, \quad \varphi \in L_p(R^n),\ 1 \leqslant p < n/\alpha, \tag{12}$$

можно обосновать с помощью теоремы Банаха — Штейнгауза.

В [2] доказано, что $|x|^{-\alpha} A_\alpha(|x|) \hat{\mu}_\alpha(|x|) \in R(R^n)$, т. е. расширенному винеровскому кольцу. Поэтому оператор $\mu_\alpha * f$ ограничен в $L_p(R^n)$, $p \geqslant 1$. С учетом того, что $\overline{K}_{l,\alpha}(|x|) \in L_1(R^n)$, можно получить оценку $\|\overline{D}_{\lambda,\varepsilon}^\alpha K^\alpha \varphi\|_p \leqslant c\|\varphi\|_p$, $\varphi \in L_p(R^n)$, из которой и из равенства $K_a^\alpha \varphi = K^\alpha B\varphi$, где B — некоторый ограниченный оператор в $L_p(R^n)$, $p \geqslant 1$, следует, что $\|\overline{D}_{\lambda,\varepsilon}^\alpha K_a^\alpha \varphi\|_p \leqslant \tilde{c}\|\varphi\|_p$. Равенство (12) на плотном в $L_p(R^n)$ множестве Φ устанавливается на основании следствия к теореме 2.

2) Равенство (11) для целых α очевидно, т. к. характеристики $a(|t|)$, $\lambda(|t|)$ и ядро $\mu_\alpha(|x|)$ являются радиальными функциями, а дифференциальный оператор A содержит производные только четных порядков.

В заключение отметим, что идея использования м. г. с. и. вида (1), позволившая доказать теорему 2 при любых $\alpha > 0$ (известную в случае обычных г. с. и. при $0 < \alpha < 2$), была подсказана Г. А. Калябиным, которому автор выражает глубокую благодарность.

ЛИТЕРАТУРА

1. Самко С. Г. Гиперсингулярные интегралы и их приложения.— Ростов-на-Дону: РГУ, 1984.—208 с.
2. Самко С. Г., Умархаджиев С. М. Приложения гиперсингулярных интегралов к многомерным интегральным уравнениям первого рода // Труды МИАН СССР.—1985.— Т. 172.— С. 299—313.
3. Калябин Г. А. Характеризация некоторых функциональных пространств с помощью обобщенных разностей // ДАН СССР.—1985.— Т. 284.—№ 6.— С. 1305—1308.
4. Marchaud A. Sur les derivees et sur les differences des fonctions // J. math. pures et appl.— 1927.— V. 6.— P. 337—425.
5. Кувшинникова И. А. Обращение операторов типа потенциала целого порядка с разностной радиальной характеристикой / Ростов. ун-т.— Ростов-на-Дону. 1985.— 14 с.— Библиогр.: 3 назв.— Деп. в ВИНИТИ 26.11.85, № 8134—В.
6. Лизоркин П. И. Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и функциональные пространства $L_p^r(E_n)$. Теоремы вложения // Мат. сб., 1963.— Т. 60.— № 3.— С. 325—353.

г. Брянск

Поступила 23.09.1986

Г. В. Микаелян

УДК 517.547

О РОСТЕ ФУНКЦИЙ, МЕРОМОРФНЫХ В ПОЛУПЛОСКОСТИ

Введение

1. С 60-х годов Л. А. Рубел, Б. А. Тейлор [1], [2] при исследовании мероморфных в конечной комплексной плоскости C функций систематически использовали метод рядов Фурье (истоки этого метода в теории мероморфных функций восходят к давним работам Ф. и Р. Неванлинн). Метод рядов Фурье в дальнейшем при исследовании мероморфных в C или в круге функций применяли многие математики. Обзор результатов до 1973 г. дан в статье [3]. Для случая круга отметим работу [4]. В работах [5], [6] для исследования мероморфных в полуплоскости функций оказалось естественным применение метода преобразований Фурье. В данной статье также для исследования роста мероморфных в полуплоскости функций применяется метод преобразований Фурье. В основе результатов статьи лежит следующая теорема, установленная в [6].

Теорема 1. *Пусть для мероморфной в полуплоскости $G = \{w : \operatorname{Im} w < 0\}$ функции $f(w)$ при любом $a > 0$ логарифмическая производная*

$$f'(w)/f(w) \to 0 \text{ при } w \to \infty \quad (\operatorname{Im} w > a), \tag{1}$$

и для любого v $(-\infty < v < 0)$

$$|f(u + iv)| \to 1 \text{ при } u \to \infty, \tag{2}$$

причем последовательности нулей $\{z_k\}_1^\infty \equiv \{u_k + iv_k\}_1^\infty$ *и полюсов* $\{w_k\}_1^\infty \equiv \{t_k + i\rho_k\}_1^\infty$ *функции* f *удовлетворяют условию*

$$\lim_{k\to\infty} v_k = \lim_{k\to\infty} \rho_k = 0. \tag{3}$$

Тогда если при некоторых v_0 $(v_0 < v_k,\ v_0 < \rho_k;\ k = 1, 2, \ldots)$ *и* x $(x \neq 0)$ *интеграл*

$$\frac{e^{xv_0}}{i\sqrt{2\pi}\,x} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixu} \frac{f'(u+iv_0)}{f(u+iv_0)}\, du \equiv h(x) \tag{4}$$

существует, то он не зависит от v_0, *равен нулю для* $x > 0$ *и при любом* v $(-\infty < v < 0)$ *справедлива формула*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixu} \log|f(u+iv)|\, du = \frac{1}{2}\,[e^{-xv} h(x) + e^{xv}\overline{h(-x)}] -$$

$$- \frac{\sqrt{2\pi}}{x} \sum_{v_k < v} e^{-ixu_k} \operatorname{sh}(x(v_k - v)) + \frac{\sqrt{2\pi}}{x} \sum_{\rho_k < v} e^{-ixt_k} \operatorname{sh}(x(\rho_k - v)). \tag{5}$$

2. Если дополнительно предположить, что функция $\log|f(u+iv)|$ $(-\infty < u < +\infty)$ принадлежит классу L_1 $(-\infty, +\infty)$, то из (5) предельным переходом при $x \to -0$ получается следующая формула типа Б. Я. Левина:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \log|f(u+iv)|\, du = \frac{h(-0)}{2\sqrt{2\pi}} - \sum_{v_k < v} (v_k - v) + \sum_{\rho_k < v} (\rho_k - v) \quad (-\infty < v < 0),$$

где $h(-0) = \lim\limits_{x\to -0} h(x)$, причем предел этот существует и конечен.

Введем следующие функции:

$$n(v, f) \equiv \sum_{\rho_k < v} 1, \quad N(v, f) \equiv \int_{-\infty}^{v} n(t, f)\, dt = \sum_{\rho_k < v} (v - \rho_k),$$

$$m(v, f) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \log^+|f(u+iv)|\, du, \quad L(v, f) \equiv m(v, f) + N(v, f).$$

Как нетрудно заметить, после инверсии $z = w^{-1}$ функция $L(v, f)$ по существу переходит в характеристическую функцию, порождаемую формулой Б. Я. Левина (см. [7], с. 41—42), которую принято называть характеристикой Цудзи. Эта функция, при аналитичности функции $f(w)$ в окрестности бесконечно удаленной точки, неубывающая с точностью до ограниченной величины. Существует неубывающая непрерывная функция $L_0(v, f)$ такая, что при $v \to -0$ $L(v, f) = L_0(v, f) + O(1)$.

Для мероморфной в полуплоскости G функции $f(w)$ введем также величину

$$E(v, f) \equiv \left(\int_{-\infty}^{+\infty} [\log|f(u+iv)|]^2\, du \right)^{1/2}.$$

3. Введем ряд понятий, характеризующих плотности последовательностей комплексных чисел из полуплоскости.

Пусть последовательность комплексных чисел $W \equiv \{w_k\}_1^\infty \equiv \{u_k + iv_k\}_1^\infty \subset G$ удовлетворяет условию $\lim\limits_{k\to\infty} v_k = 0$. Для любого v $(-\infty < v < 0)$ определим следующие функции:

$$n(v) \equiv \sum_{v_k \leqslant v} 1, \quad N(v) \equiv \int_{-\infty}^{v} n(t)\, dt.$$

Далее, условимся для любых v, ρ, x $(-\infty < v,\ \rho < 0;\ x \neq 0)$ обозначать

$$T(x, v) \equiv \frac{\sqrt{2\pi}}{x} \sum_{v_k \leqslant v} e^{-ixw_k}, \quad T(x, v, \rho) \equiv T(x, \rho) - T(x, v).$$

Определение 1. Любую функцию $\lambda(v) > 0$, непрерывную и неубывающую на $[-\infty, 0)$, будем называть функцией роста.

Если $\lambda(v)$ — функция роста, то для любых $A, B \in (0, +\infty)$ и целого $p \geqslant 0$ условимся обозначать $\lambda^*(v) \equiv (A/|v|^p)\,\lambda(Bv)$.

Определение 2. Будем говорить, что последовательность W имеет конечную λ-плотность, если существует функция λ^* такая, что $N(v) \leqslant \lambda^*(v)$ $(-\infty < v < 0)$.

Определение 3. Последовательность W будем называть λ-сбалансированной, если существует функция λ^* такая, что

$$|T(x, v, \rho)| \leqslant e^{xv}\lambda^*(v) + e^{x\rho}\lambda^*(\rho)$$

при всех $v, \rho \in (-\infty, 0)$, $x \in (-\infty, -1)$. Если же выполняется неравенство

$$|T(x, v, \rho)| \leqslant \frac{e^{xv}}{|x|}\lambda^*(v) + \frac{e^{x\rho}}{|x|}\lambda^*(\rho),$$

то W назовем строго λ-сбалансированной.

Определение 4. Последовательность W будем называть λ-устойчивой, если существуют функции $h(x)$ и λ^* такие, что

$$|h(x) - T(x, v)| \leqslant e^{xv}\lambda^*(v)$$

при всех $v \in (-\infty, 0)$, $x \in (-\infty, -1)$. Если же выполняется неравенство

$$|h(x) - T(x, v)| \leqslant (e^{xv}/|x|)\,\lambda^*(v),$$

то W назовем строго λ-устойчивой.

Определение 5. Последовательность W назовем λ-допустимой, если она имеет конечную λ-плотность и λ-устойчива.

Справедлива следующая

Лемма. *Если последовательность W имеет конечную λ-плотность, то следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *W λ-устойчива;*

(2) *W строго λ-устойчива;*

(3) *W λ-сбалансированна;*

(4) *W строго λ-сбалансированна;*

(5) *W λ-допустима.*

Определение 6. Пусть последовательность W обладает конечной λ-плотностью. Назовем W λ-сбалансируемой, если она является подпоследовательностью некоторой λ-сбалансированной последовательности конечной λ-плотности.

Определение 7. Функцию роста λ назовем регулярной, если каждая последовательность конечной λ-плотности λ-сбалансируема.

Нетрудно проверить, что если для функции роста λ существует число $q > 0$ такое, что $\lambda(v) = O(|v|^{-q})$, и последовательность W обладает конечной λ-плотностью, то W λ-допустима.

Остается открытым вопрос: будет ли каждая функция роста регулярной? В случае плоскости это доказано Майлсом в [8], а в случае круга — Беком в [4]. Однако, как оказалось, в случае полуплоскости применение методов этих работ связано с определенными сложностями.

4. Определение 8. Пусть λ — функция роста. Будем говорить, что f конечного λ-типа, если f мероморфна в G, удовлетворяет условиям (1)—(4) и существует функция λ^* такая, что

$$L(v, f) \leqslant \lambda^*(v) \quad (-\infty < v < 0).$$

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 2. 1°. *Если последовательность W является последовательностью нулей аналитической в G функции конечного λ-типа, то она λ-допустима.*

2°. *Если последовательность W λ-допустима, то существует аналитическая в полуплоскости G функция f с нулями W, для которой существует функция λ^* такая, что*

$$E(v, f) \leqslant \lambda^*(v) \quad (-\infty < v < 0).$$

Теорема 3. 1°. *Если последовательность W является последовательностью нулей мероморфной в полуплоскости G функции f конечного λ-типа, то она обладает конечной λ-плотностью.*

2°. *Если последовательность W обладает конечной λ-плотностью, то существует мероморфная в полуплоскости G функция f с нулями W, для которой существует функция λ^* такая, что*

$$E(v, f) \leqslant \lambda^*(v) \quad (-\infty < v < 0).$$

Теорема 4. *Если λ регулярна, то каждую мероморфную в полуплоскости G функцию f конечного λ-типа при $E(v, f) < +\infty$ $(-\infty < v < 0)$ можно представить в виде отношения аналитических функций $f = g/h$, для которых существует функция λ^* такая, что*

$$E(v, g) \leqslant \lambda^*(v), \quad E(v, h) \leqslant \lambda^*(v) \quad (-\infty < v < 0).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Rubel L. A. A Fourier series method for entire functions // Duke Math. J.—1963.—V. 30.— P. 437—442.
2. Rubel L. A., Taylor B. A. Fourier series method for meromorphic and entire functions // Bull. Soc. math. France.—1968.—V. 96.—№ 1.— P. 53—96.
3. Rubel L. A. A survey of a Fourier series method for meromorphic functions // Lect. Notes. Math.—1973.—V. 336.— P. 51—62.
4. Beck W. E. Efficient quotient representations of meromorphic functions in the disc // Thesis, University of Illinois (Urbana-Champaign).—1970.—34 p.
5. Микаелян Г. В. Исследование роста произведений типа Бляшке—Неванлинны методом преобразований Фурье // Изв. АН АрмССР. Сер. матем.—1983.—Т. XVIII.—№ 3.— С. 216—229.
6. Микаелян Г. В. Преобразование Фурье, ассоциированное с функциями, мероморфными в полуплоскости // Изв. АН АрмССР. Сер. матем.—1984.— Т. XIX.—№ 5.— С. 361—376.
7. Гольдберг А. А., Островский И. В. Распределение значений мероморфных функций.— М.: Наука, 1970.—592 с.
8. Miles J. Quotient representations of meromorphic functions // J. analyse math.—1972.—V. 25.— P. 371—388.

г. Ереван

Поступили
полный текст 11.06.1986
краткое сообщение 25.10.1987

И. Ж. Миловачович, М. А. Ковачевич, С. Д. Цвеич

УДК 517.521

О НЕКОТОРЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ РЯДОВ

1. *Введение.* В работе [1] (а также в [2]—[4]) изложены различные способы улучшения сходимости рядов. Один способ улучшения сходимости рядов состоит в следующем.

Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ действительных или комплексных чисел a_n сходится и $r \neq 1$ — произвольное действительное или комплексное число, то справедлива формула

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \frac{a_1}{1-r} + \frac{1}{1-r} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_{n+1} - r a_n). \tag{1}$$

Для оператора Δ_r^k, который определен равенствами

$$\Delta_r(a_n) = a_{n+1} - r a_n \quad (\Delta_r^0(a_n) = a_n),$$
$$\Delta_r^k(a_n) = \Delta_r(\Delta_r^{k-1}(a_n)),$$

при выполнении условия

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\Delta_r^k(a_{n+1})}{\Delta_r^k(a_n)} = r \quad (k = 1, \dots, p-1) \tag{2}$$

также доказано, что справедлива формула

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{\Delta_r^k(a_1)}{(1-r)^{k+1}} + \frac{1}{(1-r)^p} \sum_{n=1}^{+\infty} \Delta_r^p(a_n). \tag{3}$$

В данной работе мы получим обобщения преобразования (1) и (3) и, как в работе [1], применим их к преобразованию степенных рядов.

Сначала для любых действительных чисел $r_1, \dots, r_k$ введем оператор $L_{r_1 \dots r_k}$, полагая $L_{r_1}(a_n) = a_{n+1} - r_1 a_n$, $L_{r_1 \dots r_k}(a_n) = L_{r_k}(L_{r_1 \dots r_{k-1}}(a_n))$. Легко заметить, что для $r_1 = \dots = r_k = r$ получаем $L_{r_1 \dots r_k} = \Delta_r^k$.

2. *Некоторые преобразования рядов.* Как и в работе [1], нетрудно доказать, что справедлива

Теорема. *Если ряд* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ *действительных или комплексных чисел* a_n *сходится и* $r \neq 1, \dots, r_p \neq 1$ — *произвольные действительные или комплексные числа, то справедлива формула*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \frac{a_0}{1-r} + \sum_{k=1}^{p-1} \frac{L_{r_1 \dots r_k}(a_0)}{(1-r_1)\dots(1-r_{k+1})} + \frac{1}{(1-r_1)\dots(1-r_p)} \sum_{n=0}^{+\infty} L_{r_1 \dots r_p}(a_n). \tag{4}$$