па Тимошенко многослойных анизотропных оболочек.–Механика композитных материалов, 1979, № 3.

7. Паймушин В.Н. Соотношения теории тонких оболочек типа Тимошенко в криволинейных координатах поверхности отсчета. – "Прикладная математика и механика", 1978, 42, № 4.

8. Теория оболочек с учетом поперечного сдвига. Научный ред.К.З.Галимов. Казань, Изд-во Казан.ун-та, 1977.

ВЫРАЖЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ ДЕФОРМАЦИИ УТОЧНЕННОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК

А.М. Зайнашев

Основные разрешающие уравнения уточненной нелинейной теории пологих оболочек [I] сложные. При рассмотрении частных задач в некоторых случаях может оказаться предпочтительным использование энергетического метода, чем решение этих уравнений приближенными методами. Определим здесь уточненное выражение потенциальной энергии деформации.

Потенциальная энергия деформации произвольного тела, следующего закону Гука, представляется в виде [2]

$$V=\frac{1}{2}\iiint\limits_V\left(\sigma_{11}^z\varepsilon_{11}^z+\sigma_{22}^z\varepsilon_{22}^z+\sigma_{33}^z\varepsilon_{33}^z+\tau_{12}^z\gamma_{12}^z+\tau_{13}^z\gamma_{13}^z+\tau_{23}^z\gamma_{23}^z\right)dV, \qquad (\mathrm{I})$$

где $\sigma_{11}^z, \sigma_{22}^z$, σ_{33}^z и ε_{11}^z, ε_{22}^z, ε_{33}^z – нормальные напряжения, действующие на элемент на уровне z и соответствующие им относительные удлинения; $\tau_{12}^z, \tau_{13}^z, \tau_{23}^z$ и $\gamma_{12}^z, \gamma_{13}^z, \gamma_{23}^z$ – касательные напряжения на том же уровне и соответствующие им деформации сдвига; dV – объем выделенного элемента.

Следуя гипотезе прямых нормалей, принимая $\gamma_{13}^z=\gamma_{23}^z=0$, в декартовой прямоугольной системе координат имеем

$$V=\frac{1}{2}\iint\limits_S\left[\int_{w-h_z/2}^{w+h_z/2}\left(\sigma_{11}^z\varepsilon_{11}^z+\sigma_{22}^z\varepsilon_{22}^z+\tau_{12}^z\gamma_{12}^z\right)dz\right]dx\,dy. \qquad (2)$$

Здесь первое интегрирование выполняется в пределах "толщины" деформированной оболочки в направлении оси z h_z , т.е. в пределах $w-h_z/2 \le z(x,y) \le w+h_z/2$, а интегрирование двух остальных интегралов – по всей ее срединной поверхности.

Подставим в выражение потенциальной энергии (2) вместо компонентов деформаций ε_{11}^z , ε_{22}^z, γ_{12}^z и напряжений σ_{11}^z , σ_{22}^z , τ_{12}^z их выражения [I] в декартовых координатах, связанных со срединной поверхностью недеформированной оболочки :

$$\varepsilon_{11}^z = \varepsilon_{11} + (w-z)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left[(w-z)F\right]\frac{\partial w}{\partial x},$$

$$\varepsilon_{22}^z = \varepsilon_{22} + (w-z)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y}\left[(w-z)F\right]\frac{\partial w}{\partial y}, \tag{3}$$

$$\gamma_{12}^z = \gamma_{12} + 2(w-z)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial}{\partial y}\left[(w-z)F\right]\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left[(w-z)F\right]\frac{\partial w}{\partial y},$$

$$\sigma_{11}^z = \sigma_{11} + \frac{E}{1-\mu^2}\left\{(w-z)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left[(w-z)F\right]\frac{\partial w}{\partial x} + \mu\frac{\partial}{\partial y}\left[(w-z)F\right]\frac{\partial w}{\partial y}\right\},$$

$$\sigma_{22}^z = \sigma_{22} + \frac{E}{1-\mu^2}\left\{(w-z)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left[(w-z)F\right]\frac{\partial w}{\partial y} + \mu\frac{\partial}{\partial x}\left[(w-z)F\right]\frac{\partial w}{\partial x}\right\},$$

$$\tau_{12}^z = \tau_{12} + \frac{E}{2(1+\mu)}\left\{2(w-z)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial}{\partial y}\left[(w-z)F\right]\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left[(w-z)F\right]\frac{\partial w}{\partial y}\right\}. \tag{4}$$

Приходим

$$V = \frac{1}{2}\iint\limits_S\left\{\int\limits_{w-h_z/2}^{w+h_z/2}\left[Q_0 + Q_1(w-z) + Q_2\frac{\partial}{\partial x}(w-z) + Q_3\frac{\partial}{\partial y}(w-z)\right]dz + \right.$$

$$+\frac{E}{1-\mu^2}\int\limits_{w-h_z/2}^{w+h_z/2}\left\{Q_4(w-z)^2 + Q_5(w-z)\frac{\partial}{\partial x}(w-z) + \right. \tag{5}$$

$$+Q_6(w-z)\frac{\partial}{\partial y}(w-z) + Q_7\left[\frac{\partial}{\partial x}(w-z)\right]^2 + Q_8\frac{\partial}{\partial x}(w-z)\frac{\partial}{\partial y}(w-z) +$$

$$\left.\left. + Q_9\left[\frac{\partial}{\partial y}(w-z)\right]^2\right\}dz\right\}dx\,dy,$$

где

$$F = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2}, \quad h_z = Fh;$$

$$Q_0 = \sigma_{11}\varepsilon_{11} + \sigma_{22}\varepsilon_{22} + \tau_{12}\gamma_{12}, \quad Q_2 = 2F\left(\sigma_{11}\frac{\partial w}{\partial x} + \tau_{12}\frac{\partial w}{\partial y}\right), \quad Q_3 = 2F\left(\sigma_{22}\frac{\partial w}{\partial y} + \tau_{12}\frac{\partial w}{\partial x}\right),$$

$$Q_4 = \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{R_x}(F-1) + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{1}{R_y}(F-1) + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial y}\right]^2 +$$

$$+2\mu\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{R_x}(F-1) + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial x}\right]\left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{1}{R_y}(F-1) + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial y}\right] + \tag{6–7}$$

$$+\frac{1}{2}(1-\mu)\left(2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2,$$

$$Q_5=F\left\{\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\frac{1}{R_x}(F-1)+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial x}\right]\frac{\partial w}{\partial x}+\mu\left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\frac{1}{R_y}(F-1)+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial y}\right]\frac{\partial w}{\partial x}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}(1-\mu)\left(2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+\frac{\partial w\,\partial F}{\partial x\partial y}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial x}\right)\frac{\partial w}{\partial y}\right\},$$

$$Q_6=F\left\{\left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\frac{1}{R_y}(F-1)+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial y}\right]\frac{\partial w}{\partial y}+\mu\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\frac{1}{R_x}(F-1)+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial x}\right]\frac{\partial w}{\partial y}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}(1-\mu)\left(2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial x}\right)\frac{\partial w}{\partial x}\right\},$$

$$Q_7=F^2\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{2}(1-\mu)\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right],\ Q_8=(1+\mu)F^2\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y},\ Q_9=F^2\left[\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2+\frac{1}{2}(1-\mu)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right].$$

Значение Q_1 для нас безразлично, поскольку

$$\int_{w-h_z/2}^{w+h_z/2} Q_1(w-z)\,dz=Q_1\int_{w-h_z/2}^{w+h_z/2}(w-z)\,dz=0. \tag{8}$$

Пользуясь соотношениями

$$\int\frac{dz}{dx}dz=\int\frac{d}{dz}\left(z\frac{dz}{dx}\right)dz=z\frac{\partial z}{\partial x},\ \int\frac{\partial z}{\partial y}dz=z\frac{\partial z}{\partial y},$$
$$\int\frac{\partial z}{\partial x}z\,dz=\int\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{2}z^2\frac{dz}{dx}\right)dz=\frac{1}{2}z^2\frac{\partial z}{\partial x},\ \int\frac{\partial z}{\partial y}z\,dz=\frac{1}{2}z^2\frac{\partial z}{\partial y},$$
$$\int\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2dz=\int\frac{d}{dz}\left[z\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right]dz=z\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2,\ \int\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2dz=z\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2, \tag{9}$$
$$\int\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}dz=\int\frac{d}{dz}\left(z\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\right)dz=z\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y},$$

выполним интегрирование по z и заменим в полученных выражениях напряжения срединной поверхности по закону Гука деформациями. Приходим к следующему выражению для потенциальной энергии :

$$V=\frac{K}{2}\iint_S\left\{(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22})^2-2(1-\mu)\left(\varepsilon_{11}\varepsilon_{22}-\frac{1}{4}\gamma_{12}^2\right)-2w\left[(\varepsilon_{11}+\mu\varepsilon_{22})\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial x}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{2}(1-\mu)\gamma_{12}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial x}\right)+(\varepsilon_{22}+\mu\varepsilon_{11})\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial y}\right]\right\}F\,dx\,dy+$$
$$+\frac{D}{2}\iint_S F^3\left\{\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\frac{1}{R_x}(F-1)+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial x}\right]^2+\left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\frac{1}{R_y}(F-1)+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial y}\right]^2+\right.$$

(10)

$$+2\mu\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\frac{1}{R_x}(F-1)+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial x}\right]\left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\frac{1}{R_y}(F-1)+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial y}\right]+$$

$$+\frac{1}{2}(1-\mu)\left(2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+3\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}(1-\mu)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\frac{1}{2}(1-\mu)\left(\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+(1+\mu)\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial x}\right]+$$

$$+3\left(1-2\frac{1}{F^2}\frac{w^2}{h^2}\right)\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\frac{1}{R_x}(F-1)+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial x}\right]\left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial x}+\mu\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial y}\right)+\right.$$

$$+3\left(1-2\frac{1}{F^2}\frac{w^2}{h^2}\right)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\frac{1}{R_y}(F-1)+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial y}\right]\left(\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial y}+\mu\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial x}\right)+$$

$$+\frac{3}{2}(1-\mu)\left(1-2\frac{1}{F^2}\frac{w^2}{h^2}\right)\left(2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}+\right.$$

$$\left.\left.\left.+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial x}\right)\right]\right\}dx\,dy.$$

Следует отметить, что в этом выражении пока сохранены малые члены. Отбрасывание их до процедуры дифференцирования не всегда оправдано. Оно может привести к ошибочным результатам, так как после дифференцирования второстепенные члены в некоторых случаях могут оказаться сравнимыми с главными.

После выполнения процедуры дифференцирования, с учетом выражения для F (6), примем F =I и отбросим малые члены. Получим

$$V=\frac{K}{2}\iint_S\left\{(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22})^2-2(1-\mu)\left(\varepsilon_{11}\varepsilon_{22}-\frac{1}{4}\gamma_{12}^2\right)-2w\left[(\varepsilon_{11}+\mu\varepsilon_{22})\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial L}{\partial x}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{2}(1-\mu)\gamma_{12}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial L}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial L}{\partial x}\right)+(\varepsilon_{22}+\mu\varepsilon_{11})\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial L}{\partial y}\right]\right\}dx\,dy+ \qquad \text{(II)}$$

$$+\frac{D}{2}\iint_S\left\{(\nabla^2 w)^2-2(1-\mu)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2\right]-6\frac{w^2}{h^2}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial L}{\partial x}+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\mu\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial L}{\partial y}\right)+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial L}{\partial y}+\mu\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial L}{\partial x}\right)+(1-\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial L}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial L}{\partial x}\right)\right]\right\}dxdy.$$

Здесь

$$K=\frac{Eh}{1-\mu^2},\quad \frac{\partial L}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y},$$

(I2)

$$D=\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}, \quad \frac{\partial L}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Выражение (II) допускает дальнейшее упрощение. В самом деле, выражая в первом подынтегральном выражении деформации ε_{11}, ε_{12} и γ_{12} через перемещения убеждаемся, что подчеркнутые члены пренебрежимо малы по сравнению с остальными. Следовательно, их можно отбросить. Таким образом, приходим окончательно к следующему выражению для потенциальной энергии деформации:

$$V=\frac{K}{2}\iint\limits_S\left[(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22})^2-2(1-\mu)(\varepsilon_{11}\varepsilon_{22}-\frac{1}{4}\gamma_{12}^2)\right]dx\,dy+\frac{D}{2}\iint\limits_S\left\{(\nabla^2 w)^2-\right.$$
$$-2(1-\mu)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2\right]-6\frac{w^2}{h^2}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial L}{\partial x}+\mu\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial L}{\partial y}\right)+\right. \qquad (13)$$
$$\left.\left.+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial L}{\partial y}+\mu\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial L}{\partial x}\right)+(1-\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial L}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial L}{\partial x}\right)\right]\right\}dx\,dy.$$

Потенциальную энергию деформации можно записать как в функции компонентов перемещений, так и в функции усилий φ и прогиб w. Запишем ее сначала через перемещения срединной поверхности. Подставляя в (13) вместо деформаций их выражения через перемещения, получаем

$$V=\frac{K}{2}\iint\limits_S\left\{\left[\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{w}{R_x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{w}{R_y}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]^2-2(1-\mu)\left[\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{w}{R_x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]\times\right.$$
$$\left.\times\left[\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{w}{R_y}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]+\frac{1}{2}(1-\mu)\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right\}dx\,dy+ \qquad (14)$$
$$+\frac{D}{2}\iint\limits_S\left\{(\nabla^2 w)^2-2(1-\mu)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2\right]-6\frac{w^2}{h^2}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial L}{\partial x}+\mu\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial L}{\partial y}\right)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial L}{\partial y}+\mu\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial L}{\partial x}\right)+(1-\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial L}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial L}{\partial x}\right)\right]\right\}dx\,dy.$$

Определим теперь выражение потенциальной энергии деформации через функцию усилий и прогиба. Используя соотношения закона Гука, имеем

$$\frac{K}{2}\iint\limits_S\left[(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22})^2-2(1-\mu)(\varepsilon_{11}\varepsilon_{22}-\frac{1}{4}\gamma_{12}^2)\right]dx\,dy=\frac{1}{2}\frac{h}{E}\iint\limits_S\left[(\sigma_{11}+\sigma_{22})^2-\right. \qquad (15)$$
$$\left.-2(1+\mu)(\sigma_{11}\sigma_{22}-\tau_{12}^2)\right]dx\,dy.$$

Подставим сюда вместо напряжений по формулам [1]

$$\sigma_{11}=\frac{1}{h}\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_{22}=\frac{1}{h}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{12}=-\frac{1}{h}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} \tag{16}$$

их выражения через функцию усилий Φ . Приходим

$$\frac{K}{2}\iint\limits_S\left[(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22})^2-2(1-\mu)(\varepsilon_{11}\varepsilon_{22}-\frac{1}{4}\gamma_{12}^2)\right]dx\,dy = \\ =\frac{1}{2Eh}\iint\limits_S\left\{(\nabla^2\Phi)^2-2(1+\mu)\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}\right)^2\right]\right\}dxdy. \tag{17}$$

Учитывая это, приходим окончательно к следующему выражению потенциальной энергии деформации в усилиях:

$$V=\frac{1}{2Eh}\iint\limits_S\left\{(\nabla^2\Phi)^2-2(1+\mu)\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}\right)^2\right]\right\}dxdy+\frac{D}{2}\iint\limits_S\left\{(\nabla^2 w)^2- \\ -2(1-\mu)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2\right]-6\frac{w^2}{h^2}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial L}{\partial x}+\mu\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial L}{\partial y}\right)+ \\ +\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial L}{\partial y}+\mu\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial L}{\partial x}\right)+(1-\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial L}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial L}{\partial x}\right)\right]\right\}dxdy. \tag{18}$$

Выражения потенциальной энергии деформации (13), (14) и (18) отличаются от аналогичных выражений существующей теории пологих оболочек дополнительными членами порядка

$$6\frac{w^2}{h^2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2, \quad 6\frac{w^2}{h^2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2, \quad 6\frac{w^2}{h^2}\left|\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right|$$

по сравнению с единицей.

Отметим, что выражения (14) и (18) потенциальной энергии деформации, дополненные работой внешних сил, могут быть использованы при исследовании изгиба и устойчивости пологих оболочек энергетическим методом по уточненной нелинейной теории.

Литература

1. Зайнашев А. М. Основные соотношения и уравнения уточненной нелинейной теории тонких пластин и оболочек. – В сб.: Исследование, расчет и испытание металлических конструкций. Л., Изд-во ЛИСИ, 1982.

2. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Л., Судпромгиз, 1962.