А. М. Мельников, Р. А. Минлос, О точечном взаимодействии трех различных частиц, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1991, номер 3, 3–6

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1991. № 3

МАТЕМАТИКА

УДК 517

А. М. Мельников, Р. А. Минлос

О ТОЧЕЧНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ТРЕХ РАЗЛИЧНЫХ ЧАСТИЦ

В этой заметке мы рассматриваем задачу о точечном взаимодействии трех, вообще говоря, различных квантовых частиц в пространстве $\mathbf{R}^3$, т. е. задачу о расширении оператора

$$H = \frac{1}{2m_1}\Delta_{x_1} + \frac{1}{2m_2}\Delta_{x_2} + \frac{1}{2m_3}\Delta_{x_3},$$

определенного в $L^2((\mathbf{R}^3)^3)$ на области

$$D(H) = \{\psi \in L^2((\mathbf{R}^3)^3) \,|\, (\Delta_{x_i}\psi)_{(x_1,x_2,x_3)} \in L^2((\mathbf{R}^3)^3),\ \psi|_{\Gamma_{ij}} = 0,\ ij = 12,\ 13,\ 23\}.$$

(Здесь $\Gamma_{ij} = \{(x_1, x_2, x_3) \in (\mathbf{R}^3)^3 \,|\, x_i = x_j\}$, $1 \leqslant i < j \leqslant 3$, — гиперплоскости в $(\mathbf{R}^3)^3$.)

Аналогичная задача для случая трех одинаковых квантовых частиц (бозонов) изучена в работах [1, 2]. В статье одного из авторов [3] была высказана гипотеза о том, что случай трех различных частиц подобен случаю трех бозонов. Результаты этой заметки подтверждают предположение.

Область определения $D(H^*)$ сопряженного оператора H^* состоит из функций ψ, имеющих следующие асимптотики:

$$\psi(x_1, x_2, x_3) = \frac{C_{ij}(\xi)}{|x_i - x_j|} + B_{ij}(\xi) + o(|x_i - x_j|)$$

при $|x_i - x_j| \to 0$, где C_{ij} и B_{ij} — некоторые функции, определенные на Γ_{ij} и лежащие в соболевском пространстве $\tilde{H}_{-1/2}(\mathbf{R}^3)$ функций, преобразования Фурье которых лежат в $L_2(\mathbf{R}^3, (1+|k|^2)^{-1/2}dk)$. Отсюда видно, что симметрические расширения $\tilde{H} = \tilde{H}_L$ оператора H получаются с помощью ограничения оператора H^* на область $D(\tilde{H}_L) \subseteq D(H^*)$, выделяемую условием вида $\mathbf{C} = L\mathbf{B}$, где $\mathbf{C} = \{C_{ij}(\xi)\}_{1 \leqslant i < j \leqslant 3}$, $\mathbf{B} = \{B_{ij}(\xi)\}_{1 \leqslant i < j \leqslant 3}$, а L — некоторый линейный оператор в пространстве троек функций $\{B_{ij}(\xi)\} = \mathbf{B}$. Простейшие из этих расширений, определяемые условием $C_{ij}(\xi) = \varepsilon_{ij} B_{ij}(\xi)$, где $\varepsilon = \{\varepsilon_{ij}\}_{1 \leqslant i < j \leqslant 3}$ — три вещественные константы, называются расширениями Тер-Мартиросяна—Скорнякова (см. [1]) и обозначаются ниже $H_{\bar{\varepsilon}}$. Расширения $H_{\bar{\varepsilon}}$ оператора H являются, вообще говоря, лишь симметрическими операторами.

Заметим, что наш оператор H, а также его расширение $H_{\bar{\varepsilon}}$ коммутируют с представлением группы вращений в $L^2((\mathbf{R}^3)^3)$, порождаемым заменами $x_i \mapsto \theta x_i$, $\theta \in O_3$. Обозначим через $H^0_{\bar{\varepsilon}}$ сужение $H_{\bar{\varepsilon}}$ на инвариантное подпространство функций, не меняющихся при заменах $f(x_1, x_2, x_3) = f(\theta x_1, \theta x_2, \theta x_3)$, $\theta \in O_3$.

Основной результат этой работы состоит в следующей теореме.

Теорема. *Индексы дефекта оператора $H^0_{\bar{\varepsilon}}$ равны* (1, 1) (*т. е. у оператора $H^0_{\bar{\varepsilon}}$ существует однопараметрическое семейство самосопряженных расширений $H_{\bar{\varepsilon},\beta}$, $\beta \in \mathbf{C}$, $|\beta| = 1$). Любой из операторов*

$H^-_{\varepsilon,\beta}$ имеет дискретный спектр $\{z_n, n=1, 2, \ldots\}$, уходящий на $-\infty$ с асимптотикой

$$z_n=-c_0 e^{-\frac{2\pi n}{s_0}}(1+o(1)), \quad n\to\infty,$$

где $c_0=c_0(\beta)$ — некоторая константа, зависящая от расширения, а $s_0>0$ — некоторая абсолютная константа.

Изложим схему доказательства. После перехода к преобразованию Фурье и отделения полного импульса задача сводится к изучению самосопряженных расширений оператора

$$hf(k_1, k_2, k_3)=\left(\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{2m_i}k_i^2\right)f(k_1, k_2, k_3),$$

действующего в пространстве $L_0^2(\widehat{\Gamma}, dv)$ функций, инвариантных относительно вращения, где $\widehat{\Gamma}\subset(\mathbf{R}^3)^3$ — многообразие, $\widehat{\Gamma}=\{(k_1, k_2, k_3)\,|\,k_1+k_2+k_3=0\}$ (с естественным объемом dv) на области определения

$$D(h)=\{f\in L_0^2(\widehat{\Gamma}, dv)\,|\,hf\in L_0^2(\widehat{\Gamma}, dv),$$
$$\int_{\widehat{\Gamma}} f(k_1, k_2, k_3)\,u(|k_i|)\,dv=0, \ i=1, 2, 3\},$$

где $u(|k|)$ — любая сферически-симметричная функция, удовлетворяющая условию

$$\int_{\mathbf{R}^3}\frac{|u(|k|)|^2}{(k^2+1)^{1/2}}d^3k<\infty.$$

Следуя работам [1, 3], можно показать, что построение симметрических расширений H_ε^0 оператора H или, что одно и то же, соответствующего оператора h_ε^0 сводится к изучению расширений симметрического оператора $T^0(-1)$, где семейство операторов $T^0(z)$, $z\in C^1\setminus(0, \infty)$, задается формулой

$$(T_0(z)\mathbf{u})_{ij}(p)=2\pi^2(2\mu_{ij})^{3/2}\sqrt{\frac{M}{m_1m_2m_3}\mu_{ij}p^2-z}\;u_{ij}(p)-$$
$$-\sum_{i\neq k}2\pi m_i\int_0^\infty \ln\left(\frac{\frac{1}{\mu_{ik}}p^2+\frac{2}{m_i}pp'+\frac{1}{\mu_{ij}}p'^2-2z}{\frac{1}{\mu_{ik}}p^2-\frac{2}{m_i}pp'+\frac{1}{\mu_{ij}}p'^2-2z}\right)\frac{p'}{p}u_{ik}(p')\,dp'$$

и действует в пространстве $L_2^{(3)}$ троек $\mathbf{u}=\{u_{ij}(p)\}_{1\leqslant i<j\leqslant 3}$ сферически симметричных функций $u_{ij}(p)$ на множестве

$$D(T)=\left\{\mathbf{u}\in L_2^{(3)}\,|\,|u_{ij}(|s|)|\leqslant\frac{\text{const}}{|s|^3+1},\ 1\leqslant i<j\leqslant 3\right\}.$$

$\left(\text{Здесь } \mu_{ij}=\frac{m_im_j}{m_i+m_j},\ M=m_1+m_2+m_3.\right)$ При этом операторы h_ε^0 и $T^0(-1)$ имеют равные индексы дефекта и всякое самосопряженное расширение оператора h_ε^0 однозначно порождается самосопряженным расширением оператора $T^0(-1)$.

Лемма 1. *Оператор* $T^0(-1)$ *является симметрическим оператором с индексами дефекта* (1,1).

Доказательство. Выделим в операторе $T^0(-1)$ однородную часть T_0:

$$(T^0\mathbf{u})_{ij}(p)=2\pi^2(2\mu_{ij})^{3/2}\sqrt{\frac{M}{m_1m_2m_3}}\mu_{ij}pu_{ij}(p)-$$

$$-\sum_{i\neq k}2\pi m_i\int\limits_0^\infty \ln\left(\frac{\dfrac{1}{\mu_{ik}}p^2+\dfrac{2}{m_i}pp'+\dfrac{1}{\mu_{ij}}p'^2}{\dfrac{1}{\mu_{ik}}p^2-\dfrac{2}{m_i}pp'+\dfrac{1}{\mu_{ij}}p'^2}\right)\frac{p'}{p}u_{ik}(p')\,dp'$$

и сделаем унитарное преобразование Меллина из $L^2((0,\infty), r^2dr)$ в $L^2(\mathbf{R}^1, ds)$. Оператор T^0 перейдет в оператор

$$(\tilde{T}\mathbf{g})_{ij}(s)=\left\{M\left(s+\frac{i}{2}\right)\mathbf{g}(s+i)\right\}_{ij},$$

действующий на области $D(\tilde{T})$ троек $\mathbf{g}=\{g_{ij}(s)\}_{1\leqslant i<j\leqslant 3}$ функций $g_{ij}(s)$, аналитичных в полосе $0\leqslant \operatorname{Im} s\leqslant 1$ с условием

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|g_{ij}(x+i\alpha)|^2dx<\infty,\quad 0\leqslant\alpha\leqslant 1.$$

Здесь $M(s)=\{M_{ij,\,i'j'}(s)\}$ — явно вычисляемая (довольно громоздкая) матрица функций, аналитичных в полосе $0\leqslant \operatorname{Im} s\leqslant 1$, причем $\operatorname{Det} M(s)$ обращается в нуль только в двух вещественных точках $s=\pm s_0$ и $\operatorname{rank} M(\pm s_0)=2$.

Из этого легко следует, что область определения $D(\tilde{T}^*)$ сопряженного оператора $\tilde{T}^*$ состоит из элементов вида

$$\mathbf{h}=\left[M\left(s-\frac{i}{2}\right)\right]^{-1}\varphi(s),$$

где $\varphi(s)\in D(\tilde{T})$, и содержит кроме векторов из $D(\tilde{T})$ элементы вида $\left\{\dfrac{e_{ij}^+}{s-s_0-i/2}\right\}_{1\leqslant i<j\leqslant 3}$ и $\left\{\dfrac{e_{ij}^-}{s+s_0-i/2}\right\}_{1\leqslant i<j\leqslant 3}$. (Здесь $\mathbf{e}^\pm=\{e_{ij}^\pm\}$ — единичные векторы из $\ker M(\pm s_0)$.)

Отсюда в силу вещественности оператора $T^0(-1)$ его индексы дефекта равны и равны, следовательно, (1,1).

Из доказательства леммы 1 легко выводится

Следствие 1. *Существует однопараметрическое семейство* $\{T^0_\beta(-1)\}$, *параметризуемое комплексным параметром* β, $|\beta|=1$, *самосопряженных расширений* $T^0_\beta(-1)$ *оператора* $T^0(-1)$, *такое, что область определения* $D(T^0_\beta(-1))$ *состоит из элементов вида* $\mathbf{u}=\{u_{ij}(p)\}$:

$$u_{ij}(p)=c\,\frac{e_{ij}p^{is_0}+\bar{\gamma}e_{ij}p^{-is_0}}{p^2+1}+\tilde{u}_{ij}(p).\qquad(1)$$

(*Здесь* $\{\tilde{u}_{ij}(p)\}\in D(T)$, $|\gamma|=|\gamma(\beta)|=1$, а $c\in\mathbf{C}^1$ — *произвольная постоянная.*)

Следствие 2. *Оператор* $h^0_{\bar{\varepsilon}}$ *является симметрическим оператором с индексами дефекта* (1,1). *Существует однопараметрическое семейство* $\{h^0_{\bar{\varepsilon},\beta}\}_{|\beta|=1}$ *самосопряженных расширений оператора* $h^0_{\bar{\varepsilon}}$. *Об-*

ласть определения $D(h_{\varepsilon}^{0*})$ *оператора* h_{ε}^{0*} *состоит из функций* $g(k_1, k_2, k_3)$, *имеющих асимптотику*

$$g(k_1, k_2, k_3)=\frac{c_1 e_{ij}|k_j|^{is_0}+c_2\bar{e}_{ij}|k_j|^{-is_0}}{(|k_j|^2+1)^2}+f(k_1, k_2, k_3), \quad |k_j|\to\infty, \quad j=$$

$$=1,\ 2,\ 3; \tag{1'}$$

где $|f(k_1, k_2, k_3)|\leqslant\frac{\text{const}}{(|k_j|^2+1)^3}$.

Отметим, что система уравнений для отыскания дефектного вектора оператора h_{ε}^{0} (т. е. элемента пространства $(h_{\varepsilon}^{0}-zE)^{\perp}$, $z\in\mathbf{C}\diagdown(0, \infty)$) принимает вид

$$2\pi\varepsilon_{ij}u_{ij}(|p|)+(T^0(z)\,\mathbf{u})_{ij}(|p|)=0. \tag{2}$$

К этой же системе при $z=-\lambda^2$, $\lambda\in\mathbf{R}$, сводится уравнение для отыскания собственной функции оператора $h_{\varepsilon,\beta}^{0}$, отвечающей собственному значению $-\lambda^2$.

Лемма 2. *При всех* z, *лежащих в небольшой комплексной окрестности вещественной полуоси* $(-\infty, -\lambda_0^2)$, *где* $\lambda_0>0$ — *некоторое число, уравнение* (2) *имеет решение* $\mathbf{u}_z(|p|)=\{u_{ij,z}(|p|)\}_{1\leqslant i<j\leqslant 3}$ *с асимптотикой*

$$u_{ij,z}(|p|)=c\,\frac{e_{ij}|p|^{is_0}+d(z)\,\bar{e}_{ij}|p|^{-is_0}}{|p|^2+1}+\tilde{u}_{ij,z}(|p|), \tag{3}$$

где $\{u_{ij,z}(|p|)\}\in D(T^0(z))$ $\left(\text{т. е. } \tilde{u}_{ij,z}(|p|)=o\left(\frac{1}{|p|^3}\right)\right)$, *а* $d(z)$ *при отрицательных вещественных* $z=-\lambda^2$, $\lambda\in\mathbf{R}$, $\lambda>\lambda_0$, *имеет вид*

$$d(-\lambda^2)=B_0\lambda^{-2is_0}(1+o(1))$$

при $\lambda\to\infty$; B_0 — *абсолютная константа*, $B_0\in\mathbf{C}$, $|B_0|=1$.

Таким образом, область определения оператора $h_{\varepsilon,\beta}^{0}$ состоит из функций вида (1′) с условием $c_2=\gamma c_1$ (см. (1)). Сравнивая (1), (1′) и (3), получаем, что оператор $h_{\varepsilon,\beta}^{0}$ имеет бесконечное число собственных значений $z_n=-\lambda_n^2$, уходящих на $-\infty$ с асимптотикой

$$z_n=-\lambda_0^2\exp\left(\frac{\arg\gamma}{s_0}+\frac{2\pi n}{s_0}\right),$$

$n=0, 1, 2\ldots$. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Минлос Р. А., Фаддеев Л. Д. О точечном взаимодействии для системы из трех частиц в квантовой механике//Докл. АН СССР. 1961. **141**, № 6. 1335—1338.
2. Минлос Р. А., Фаддеев Л. Д. Замечание о задаче трех частиц с точечным взаимодействием//Журн. эксперим. и техн. физ. 1961. **41**, № 12. 1850—1851.
3. Minlos R. On the point interaction of three articles//Applications of self-adjoint extention in quantum physics: Proceedings Dubna (USSR). Ed. by P. Exner, P. Šebe. Lect. Notes Phys. 1987. 138—145.

Поступила в редакцию
18.01.90