Г. С. Цейтин, Псевдофундаментальная последовательность, не эквивалентная монотонной,
Зап. научн. сем. ЛОМИ, 1971, том 20, 263–271

Г.С.Цейтин

ПСЕВДОФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ, НЕ ЭКВИВАЛЕНТНАЯ МОНОТОННОЙ*)

Последовательностью рациональных (натуральных) чисел, или, сокращенно, ПРЧ(ПНЧ), будем называть алгорифм, перерабатывающий всякое натуральное число в рациональное (натуральное). В качестве переменных для натуральных чисел будем использовать буквы k, ℓ, m, n, s, t (возможно, с индексами).

ПРЧ будем называть псевдофундаментальной, если

$$\forall m \neg\neg \exists n \forall k \ell (k>n \,\&\, \ell>n \supset |\varphi(k)-\varphi(\ell)|<2^{-m}).$$

Две ПРЧ φ и ψ назовем эквивалентными, если

$$\forall m \neg\neg \exists n \forall \ell (\ell>n \supset |\varphi(\ell)-\psi(\ell)|<2^{-m}).$$

Всякая ограниченная монотонная (неубывающая или невозрастающая) ПРЧ является, очевидно, псевдофундаментальной. Известный пример Э.Шпекера показывает, что монотонная псевдофундаментальная последовательность может не быть фундаментальной. Мы докажем следующую теорему.

Теорема. Существует псевдофундаментальная ПРЧ, не эквивалентная никакой монотонной ПРЧ.

Будем говорить, что ПНЧ f не имеет повторений, если

$$\forall k \ell (f(k)=f(\ell) \supset k=\ell).$$

*) Основные результаты настоящей заметки были доложены на Ленинградском семинаре по конструктивной математике 17 декабря 1970 года.

Будем называть число k m-**г р а н и ц е й** для ПНЧ f, если

$$\forall \ell (\ell > k \supset f(\ell) > m).$$

Пусть f_0 и f_1 – две ПНЧ без повторений. Определим ПРЧ φ_0, φ_1 и φ равенствами

$$\varphi_i(n) = \sum_{\ell=0}^{n} 3^{-f_i(\ell)} \qquad (i = 0, 1),$$

$$\varphi(n) = \varphi_0(n) - \varphi_1(n).$$

Последовательности φ_0 и φ_1 – возрастающие и, ввиду отсутствия повторений у f_0 и f_1, ограниченные (действительно, $\varphi_i(n) < \sum_{m=0}^{\infty} 3^{-m} = \frac{3}{2}$). Следовательно, ПРЧ φ_0 и φ_1 – псевдофундаментальные, а значит, псевдофундаментальной будет и последовательность φ .

<u>Лемма</u>. Если φ эквивалентна некоторой неубывающей (невозрастающей) ПРЧ, то можно построить алгорифм, перерабатывающий всякую пару вида $m \square k$, где k является m-границей для f_0 (соответственно, для f_1), в некоторую m-границу для f_1 (соответственно, для f_0).

<u>Доказательство</u>. Пусть φ эквивалентна неубывающей ПРЧ ψ (случай невозрастающей последовательности рассматривается аналогично). Построим такой алгорифм α , что для любых m и k

$$\alpha(m \square k) \simeq \mu t (t > k \,\&\, |\varphi(t) - \psi(t)| < 3^{-m-1}).$$

Из эквивалентности φ и ψ следует, что не может не найтись такого n , что при $t > n$ будет $|\varphi(t) - \psi(t)| < 3^{-m-1}$,а значит, терм $\alpha(m \square k)$ не может быть бессмысленным. Следовательно (по принципу А.А.Маркова) $\alpha(m \square k)$ определено. Пусть теперь k является m-границей для f_0 , т.е.

$$\forall \ell (\ell > k \supset f_0(\ell) > m). \qquad (I)$$

Полагаем $t = \alpha(m \square k)$. Тогда $t > k$ и

$$|\varphi(t) - \psi(t)| < 3^{-m-1}. \qquad (2)$$

Докажем, что t является m -границей для f_1. Предположим, что при некотором ℓ_0

$$\ell_0 > t \ \& \ f_1(\ell_0) \leqslant m \qquad (3)$$

Тогда при $n \geqslant \ell_0$ имеем

$$\varphi_1(n) \geqslant \varphi_1(\ell_0) \geqslant \varphi_1(t) + 3^{-f_1(\ell_0)} \geqslant \varphi_1(t) + 3^{-m}. \qquad (4)$$

Ввиду (I) и отсутствия повторений у f_0 имеем

$$\varphi_0(n) = \varphi_0(t) + \sum_{\ell=t+1}^{n} 3^{-f_0(\ell)} \leqslant$$

$$\leqslant \varphi_0(t) + \sum_{s=m+1}^{\infty} 3^{-s} = \varphi_0(t) + \tfrac{1}{2} \cdot 3^{-m}.$$

Из этого вместе с (4) получаем

$$\varphi(n) = \varphi_0(n) - \varphi_1(n) \leqslant \varphi_0(t) - \varphi_1(t) - \tfrac{1}{2} \cdot 3^{-m} = \varphi(t) - \tfrac{1}{2} \cdot 3^{-m}.$$

Используя (2) и то, что последовательность ψ – неубывающая, находим отсюда:

$$\varphi(n) < \psi(t) + 3^{-m-1} - \tfrac{1}{2} \cdot 3^{-m} = \psi(t) - \tfrac{1}{6} \cdot 3^{-m} \leqslant \psi(n) - \tfrac{1}{6} \cdot 3^{-m}.$$

Таким образом,

$$\forall n\, (n \geqslant \ell_0 \supset |\varphi(n) - \psi(n)| > \tfrac{1}{6} \cdot 3^{-m}),$$

что противоречит эквивалентности φ и ψ. Следовательно, невозможно ℓ_0, удовлетворяющее условию (3), и, таким образом, t, т.е. $\alpha(m \square k)$ является m-границей для f_1. Лемма доказана.

Теперь для того, чтобы доказать теорему, остается построить такие ПНЧ без повторений f_0 и f_1, для которых алгорифмы, упомянутые в лемме, невозможны. Такие ПНЧ можно построить, например, на основе теоремы А.А.Мучника - Р.М.Фридберга [2,3] о существовании перечислимых множеств с несравнимыми степенями неразрешимости.

В самом деле, пусть перечислимые множества H_0 и H_1 имеют несравнимые степени неразрешимости и пусть f_i $(i=0,1)$ — ПНЧ без повторений, перечисляющая H_i. Тогда по всякой m-границе f_i нетрудно вычислить "характеристическую функцию" H_i на отрезке от 0 до m, так как, если k — m-граница f_i, то при $n \leqslant m$ будем иметь

$$n \in H_i \equiv \exists \ell (\ell \leqslant k \,\&\, f_i(\ell) = n).$$

Обратно, зная "характеристическую функцию" H_i на отрезке от 0 до m, нетрудно найти m-границу для f_i: достаточно взять максимум всех значений $\mu t(f_i(t) = n)$ по таким n, что $n \leqslant m$ и $n \in H_i$. Таким образом, если при $i=0$ или $i=1$ существует алгорифм, перерабатывающий всякую пару $m \square k$, где k — m-граница для f_{1-i}, в m-границу для f_i, то проблема разрешения для H_i сводится к проблеме разрешения для H_{1-i}, что невозможно.

Приведем здесь другой способ построения ПНЧ f_0 и f_1 с требуемыми свойствами, не использующий результата А.А.Мучника - Р.М.Фридберга. Используем для удобства аппарат рекурсивных функ- (все функции и предикаты, которые мы будем строить, будут примитивно рекурсивны).

Будем исходить из четырехместного примитивно рекурсивного предиката T, такого что

$$\forall nmk(!\{n\}(m,k) \equiv \exists t T(n,m,k,t)), \tag{5}$$

$$\forall nmkt(T(n,m,k,t) \supset T(n,m,k,t+1)), \tag{6}$$

$$\forall nmkt(T(n,m,k,t) \supset t > \{n\}(m,k)) \tag{7}$$

(можно положить, например,

$$T(n,m,k,t) \equiv \exists s (s \leq t \& T_2(n,m,k,s) \& U(s) < t),$$

где U и T_2 - те же, что в теореме XIX из [I], § 63). Возьмем также некоторую одноместную примитивно рекурсивную функцию N большого размаха (т.е. такую, что $\forall n \forall k \exists t (t > k \& N(t) = n)$).

Определим примитивно рекурсивные функции S, R, K, M, и примитивно рекурсивный предикат A следующими соотношениями.

$$S(n,0) = R(n,0) = 0. \tag{8}$$

$$K(n,0) = n. \tag{9}$$

$$M(t) = 2 \cdot (2^{N(t)} + R(N(t),t)). \tag{I0}$$

$$A(t) \equiv (T([\tfrac{N(t)}{2}], M(t), K(N(t),t), t) \& S(N(t),t) = 0). \tag{II}$$

$$S(n,t+1) = \begin{cases} 0 & \text{, если } A(t) \& n > N(t), \\ 1 & \text{, если } A(t) \& n = N(t), \\ S(n,t) & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{I2}$$

$$R(n,t+1) = \begin{cases} R(n,t)+1 & \text{,если } A(t) \& n > N(t), \\ R(n,t) & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{I3}$$

$$K(n,t+1) = \begin{cases} max(n,t+1) & \text{, если } A(t) \& n > N(t), \\ K(n,t) & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{I4}$$

Искомые функции f_i $(i = 0, 1)$ определим следующими равенствами:

$$f_i(t) = \begin{cases} M(t) & \text{, если } A(t) \& N(t) \equiv i \pmod 2) \\ 2^{t+1}+1 & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{I5}$$

Мы должны доказать, что при $i = 0,1$ ПНЧ f_i не имеет повторений и невозможна такая двухместная частично рекурсивная функция α, что

$$\forall m k (\forall t (t > k \supset f_{1-i}(t) > m) \supset$$
$$! \alpha(m,k) \& \forall t (t > \alpha(m,k) \supset f_i(t) > m)). \tag{I6}$$

Заметим вначале, что функция S принимает только значения 0 и I, а функция R - неубывающая по второму аргументу. Определив функцию R_1 равенством

$$R_1(n,t) = R(n,t) + S(n,t),$$

установим разбором случаев, что R_1 - также неубывающая по второму аргументу, а в случае $A(t) \& n = N(t)$ будет (с учетом (II))

$$R_1(n,t+1) = R_1(n,t) + 1.$$

На основании этого индукцией по t установим неравенство

$$R(n,t) \leq \sum_{\ell=0}^{n-1} R_1(\ell,t),$$

откуда при помощи индукции по n получим, что

$$\forall n t (R(n,t) \leq 2^n - 1). \tag{I7}$$

Теперь мы можем доказать, что ПНЧ f_i не имеют повторений. В самом деле, пусть $s = f_i(t_1) = f_i(t_2)$. Если s нечетно, то при $j = 1, 2$ имеем $s \neq M(t_j)$ (см. (I0)), следовательно, $s = 2^{t_j+1} + 1$, и $t_1 = t_2$. Пусть теперь s четно. Тогда при $j = 1, 2$ имеем $s = M(t_j)$ и выполняется условие $A(t_j)$. Ввиду (I7) и (I0) имеем

$$2^{N(t_j)} \leq \frac{s}{2} \leq 2^{N(t_j)} + (2^{N(t_j)} - 1),$$

откуда следует, что $N(t_1) = N(t_2)$; полагая $n = N(t_1)$, имеем

$$\frac{s}{2} = 2^n + R(n, t_j),$$

следовательно,

$$R(n,t_1) = R(n,t_2) \tag{18}$$

Пусть для определенности $t_1 < t_2$. Из $A(t_1)$ следует, согласно (12), что $S(n,t_1+1)=1$, а из $A(t_2)$ получим ввиду (11), что $S(n,t_2)=0$. Следовательно (см. (12)), при некотором t между t_1 и t_2 выполнилось условие $A(t) \& n > N(t)$; но тогда (по (13))

$$R(n,t+1) > R(n,t),$$

что противоречит (18). Отсутствие повторений доказано.

Предположим теперь, что при i, равном 0 или 1, некоторая частично рекурсивная функция α удовлетворяет условию (16). Полагаем

$$n = 2 \cdot s + i, \tag{19}$$

где s – геделев номер α. Ввиду (17) не может не существовать такого t_0, что

$$\forall t\,(t \geq t_0 \supset R(n,t) = R(n,t_0)) \tag{20}$$

и

$$\forall t\,(t < t_0 \supset R(n,t) < R(n,t_0)). \tag{21}$$

Пусть некоторое t_0 удовлетворяет этим условиям (сведя это предположение к противоречию, мы докажем теорему). Полагаем

$$k = K(n,t_0).$$

Из (21) следует (по (14) и (9)), что

$$k = max(n,t_0), \tag{22}$$

а также (по (12) и (8)), что

$$S(n,t_0) = 0. \tag{23}$$

Далее, из (20) следует (ввиду (13)), что

$$\forall t\,(t \geqslant t_0 \supset \neg(A(t)\,\&\,n > N(t))), \tag{24}$$

а значит (по (14)),

$$\forall t\,(t \geqslant t_0 \supset K(n,t) = k). \tag{25}$$

Полагаем

$$m = 2\cdot(2^n + R(n,t_0)).$$

Покажем, что

$$\forall t\,(t > k \supset f_{1-i}(t) > m). \tag{26}$$

Ввиду (17) имеем $m < 2^{n+2}$. Пусть $t > k$. Тогда $t > n$ и $t > t_0$. В случае $f_{1-i}(t) = 2^{t+1}+1$ имеем

$$f_{1-i}(t) > 2^{n+2} > m.$$

Остается, ввиду (15), рассмотреть случай, когда $f_{1-i}(t) = M(t)$ и выполняются условия $A(t)$ и

$$N(t) \equiv 1 - i \pmod 2.$$

Из последнего вытекает, ввиду (19), что $N(t) \neq n$, а условие $A(t)$ ввиду (24) дает $\neg(n > N(t))$. Таким образом, $N(t) \geqslant n+1$,

$$M(t) \geqslant 2\cdot 2^{N(t)} \geqslant 2^{n+2} > m.$$

Соотношение (26) доказано.

Из (16) следует, что $!\,\alpha(m,k)$ и

$$\forall t\,(t > \alpha(m,k) \supset f_i(t) > m). \tag{27}$$

Из того, что $!\,\alpha(m,k)$, следует ввиду (5) и (6), что при некотором t_1 будет

$$\forall t\,(t \geqslant t_1 \supset T(s,m,k,t)).$$

Вспоминая, что N – функция большого размаха, найдем такое t, что $t \geqslant t_1$, $t \geqslant t_0$ и $N(t)=n$; тогда будем иметь

$$t \geqslant t_0 \,\&\, N(t)=n \,\&\, T(s,m,k,t). \tag{28}$$

Для всякого t, такого что

$$t \geqslant t_0 \,\&\, N(t)=n,$$

ввиду (20), (25) и (I9) получаем, что

$$M(t)=2\cdot(2^n+R(n,t))=m, \tag{29}$$

$$A(t) \equiv (T(s,m,k,t) \,\&\, S(n,t)=0).$$

Пусть ℓ - наименьшее значение t, удовлетворяющее условию (28). Покажем, что тогда $S(n,\ell)=0$. В самом деле, если $S(n,\ell)=1$, то ввиду (23) и (I2) найдется такое t, что $t_0 \leqslant t < \ell$ и $A(t) \,\&\, n = N(t)$. Но в силу (29) оно будет удовлетворять условию (28), что противоречит предположению, что ℓ - наименьшее. Итак, $S(n,\ell)=0$, и (снова по (29))выполняется $A(\ell)$. Далее, ввиду (I9), $N(\ell) \equiv n \equiv i \pmod 2$, следовательно, по (I5),

$$f_i(\ell)=M(\ell)=m. \tag{30}$$

С другой стороны, из $T(s,m,k,\ell)$ получим, согласно (7), что $\ell > \alpha(m,k)$, и, ввиду (27), должно быть $f_i(\ell) > m$.

Автор благодарен В.А.Лифшицу за постановку задачи и Б.А.Кушнеру за внимание к этой работе.

ЛИТЕРАТУРА

I. Клини С.К. Введение в метаматематику. М., 1957.

2. Мучник А.А. Решение проблемы сводимости Поста и некоторых других проблем теории алгоритмов. I. "Тр.Московского матем. общества", 1958, 7. 39I-405.

3. Friedberg R.M. Two recursively enumerable sets of incomparable degrees of unsolvability (solution of Post's problem,1944). Proc.Nat.Acad.Sci.USA.,1957,43,2,236-238.