Труды по дискретной математике
Том 11, с. 112–124
М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008

СВЕДЕНИЕ ЗАДАЧИ О ПРЕДЕЛЬНОМ ПОВЕДЕНИИ ЧИСЛА РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ СО СЛУЧАЙНЫМ ВХОЖДЕНИЕМ НЕИЗВЕСТНЫХ К ОДНОЙ ЗАДАЧЕ О РАЗМЕЩЕНИИ ЧАСТИЦ

В. Г. МИХАЙЛОВ

Рассматриваются заведомо совместные системы уравнений со случайным вхождением двоичных неизвестных. Случай, когда неизвестные включаются в уравнения с помощью равновероятного выбора без возвращения, изучался в работах [3] и [4]. Там были установлены условия выполнения предельной теоремы Пуассона для двоичного логарифма числа решений системы при неограниченном увеличении числа неизвестных и числа уравнений. В настоящей работе предложен подход к исследованию заведомо совместных систем уравнений со случайным вхождением двоичных неизвестных, сводящий задачу о предельном распределении числа решений такой системы к задаче об асимптотических свойствах числа пустых ячеек в специально подобранной схеме размещения частиц комплектами. С помощью этого подхода исследуются свойства решений систем с неравновероятным выбором неизвестных. Для таких систем получены достаточные условия выполнения предельной теоремы Пуассона для двоичного логарифма числа решений, близких к истинному.

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\varphi_t(u_1,\dots,u_{d(t)})$, $t=1,\dots,T$, — функции двоичных векторов соответствующих размерностей со значениями в некотором множестве A. Будем считать, что они существенно зависят от всех своих аргументов. Рассмотрим систему случайных уравнений

$$\varphi_t(x_{j_1(t)},\dots,x_{j_{d(t)}(t)}) = \varphi_t(x^0_{j_1(t)},\dots,x^0_{j_{d(t)}(t)}),\quad t=1,\dots,T, \tag{1.1}$$

относительно неизвестных $x_1,\dots,x_N \in \{0,1\}$, где значения индексов $j_i(t)$ выбраны случайным образом без возвращения из множества $\{1,\dots,N\}$ (проводимого независимо и, возможно, по своему правилу для каждого уравнения; точные определения даны ниже), а $x^0=(x^0_1,\dots,x^0_N)$ — некоторый набор чисел из $\{0,1\}$. Система (1.1) имеет по крайней мере одно решение и является заведомо совместной системой уравнений (по поводу терминологии см., например, [1]).

Метод изучения асимптотических свойств распределения числа решений системы (1.1) был предложен Г. В. Балакиным в [2] и разработан В. А. Копытцевым в [3]. В работе [3] рассматривался случай, когда все функции $\varphi_t(u_1, \ldots, u_{d(t)})$ одинаковы, а наборы индексов $j_i(t)$ выбираются равновероятно. Были указаны условия, при которых распределение двоичного логарифма числа решений системы (1.1) сходится к пуассоновскому распределению. Случай, когда функции $\varphi_t(u_1, \ldots, u_{d(t)})$ различны, но числа $d(t)$ ограничены при переходе к пределу, рассматривался в работах [4] и [5].

Главная цель нашего исследования — обобщение упомянутых результатов на случай неравновероятного выбора неизвестных в уравнениях. Для достижения этой цели в настоящей статье разработан специальный метод. Суть его состоит в сведении решаемой задачи к задаче об асимптотических свойствах распределения числа пустых ячеек в схеме размещения частиц комплектами. Этот подход предполагает изучение эффектов, возникающих в таких схемах при удалении некоторого количества частиц, и показывает, что ряд свойств систем уравнений можно трактовать как свойства числа пустых ячеек в схеме размещения частиц комплектами.

Опишем наш способ формирования системы (1.1). Пусть подмножества $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_T \subseteq \{1, \ldots, N\}$ выбраны случайно и независимо в соответствии с некоторыми распределениями $P_1, \ldots, P_T$ на множестве всех d-подмножеств множества $\{1, \ldots, N\}$. Множество $\mathcal{B}_t$ представляет собой набор номеров неизвестных, которые входят в t-е уравнение системы. Порядок их использования в качестве аргументов функции может определяться любым способом. Единственное условие — он не зависит от выбора и расстановки неизвестных в других уравнениях. (Порядок использования неизвестных в уравнениях влияет на число решений системы (1.1) и неявно входит в некоторые условия теорем.) Такую схему выбора и расстановки неизвестных мы будем называть *общей* схемой (или *общей постановкой* задачи).

В частном случае, когда подмножества $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_T$ имеют равномерное распределение на множестве всех d-подмножеств $\{1, \ldots, N\}$, порядок использования их элементов в качестве номеров у аргументов функции случаен, распределен равновероятно и независимо для каждого уравнения, а функции $\varphi_t(u_1, \ldots, u_{d(t)})$ одинаковы, получаем постановку работы [3]. Если же эти функции различны, получаем постановку работ [4] и [5].

Множество номеров неизвестных, не участвующих реально в записи системы (1.1), обозначим через $\mathcal{M}_0$. Будем говорить, что переменная x_i допускает варьирование в t-м уравнении, если она входит в него и при изменении ее значения в векторе $(x_1^0, \ldots, x_N^0)$ на противоположное мы снова получим решение t-го уравнения. Неизвестные, которые присутствуют в системе, но допускают варьирование во всех уравнениях, в которые входят, будем называть варьируемыми. Множество номеров варьируемых неизвестных обозначим через $\mathcal{N}$.

Пусть S — множество решений системы (1.1), $\xi = |S|$,

$$D = \{(x_1, \ldots, x_N) \in \{0,1\}^N \colon x_i = x_i^0 \ \forall i \notin \mathcal{M}_0 \cup \mathcal{N}\}.$$

Решения системы, принадлежащие множеству D, будем называть *близкими к истинному* решению x^0. Обозначим их число $\xi' = |S \cap D|$. Остальные решения назовем *посторонними решениями* системы (1.1).

В работе [3] было показано, что в равновероятном случае распределение двоичного логарифма числа близких решений сходится к пуассоновскому распределению, а посторонние решения отсутствуют с вероятностью, стремящейся к единице:

$$\mathbf{P}\{\xi' = 2^k\} \to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{1.2}$$

$$\mathbf{P}\{\xi = \xi'\} \to 1. \tag{1.3}$$

Параметр предельного распределения λ в (1.2) удовлетворяет соотношению $\mathbf{E}\xi \to e^{\lambda}$.

В настоящей работе мы показываем, что при весьма широких условиях в нашей общей постановке выполняется соотношение (1.2). Выводу этих условий посвящены §§ 2–4. Сами условия приведены в теореме 4 (см. § 4).

В § 5 изучаются системы с регулярным неоднородным полиномиальным выбором неизвестных. Для таких систем показано (теорема 5), что соотношение (1.2) выполнено при $N, T \to \infty$, $T/N \to \infty$, $T/N^2 \to 0$.

Изучению свойств распределения числа посторонних решений системы (1.1) в случае регулярного неоднородного полиномиального выбора неизвестных (в частности, условий, при которых выполнено соотношение (1.3)) посвящена отдельная статья.

§ 2. СВЕДЕНИЕ К ЗАДАЧЕ О СЛУЧАЙНОМ РАЗМЕЩЕНИИ ЧАСТИЦ КОМПЛЕКТАМИ

Назовем варьируемые неизвестные x_i и x_j связанными, если они входят одновременно в какое-либо уравнение системы. Если варьируемая неизвестная x_i не связана ни с одной другой варьируемой неизвестной, то будем называть эту неизвестную изолированной. В множестве номеров варьируемых неизвестных $\mathcal{N}$ выделим подмножество номеров изолированных неизвестных $\mathcal{N}_0$. Заметим, что

$$D \supseteq D_0 = \{(x_1, \ldots, x_N) \in \{0,1\}^N \colon x_i = x_i^0 \ \forall i \notin \mathcal{M}_0 \cup \mathcal{N}_0\}.$$

Множество D_0 целиком состоит из решений системы (1.1) (все они являются близкими к x^0). Значит, $S \cap D \supseteq D_0$, и так как $|D_0| = 2^{|\mathcal{M}_0 \cup \mathcal{N}_0|}$, то

$$\mathbf{P}\{2^{|\mathcal{M}_0 \cup \mathcal{N}_0|} \leqslant \xi'\} = 1.$$

С другой стороны, из определения близких решений вытекает, что

$$\mathbf{P}\{\xi' \leqslant 2^{|\mathcal{M}_0 \cup \mathcal{N}|}\} = 1.$$

Поэтому

$$\mathbf{P}\{2^{|\mathcal{M}_0 \cup \mathcal{N}_0|} \leqslant \xi' \leqslant 2^{|\mathcal{M}_0 \cup \mathcal{N}|}\} = 1. \tag{2.1}$$

В этом параграфе мы найдем условия, при которых $\mathbf{P}\{\mathcal{N}_0 = \mathcal{N}\} \to 1$ и, значит,

$$\mathbf{P}\{\xi' = 2^{|\mathcal{M}_0 \cup \mathcal{N}|}\} \to 1. \tag{2.2}$$

Соотношение (2.2) сводит задачу изучения числа близких решений к исследованию суммарного числа отсутствующих и варьируемых неизвестных в системе (1.1).

Теорема 1. *Пусть $T, N \to \infty$ и выполнены условия*

$$\mathbf{E}(|\mathcal{M}_0| + |\mathcal{N}|) = O(1), \tag{2.3}$$

$$\max_k \sum_{i=1}^{T} \mathbf{P}^2\{k \in \mathcal{B}_i\} = O(1), \tag{2.4}$$

$$\max_{k,l} \sum_{i=1}^{T} \mathbf{P}\{k, l \in \mathcal{B}_i\} \to 0, \tag{2.5}$$

$$\max_{k,i} \mathbf{P}\{k \in \mathcal{B}_i\} \leqslant 0{,}5 - \varepsilon \tag{2.6}$$

при некоторой постоянной $\varepsilon > 0$. Тогда выполнено соотношение (2.2).

Выполнение условия (2.3) зависит как от множеств $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_T$, так и от порядка, в котором используются элементы этих множеств в качестве номеров неизвестных. На выполнение условий (2.4)–(2.6) влияет только способ формирования множеств $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_T$. В равновероятном случае при всех $k \neq l$

$$\mathbf{P}\{k \in \mathcal{B}_t\} = \frac{d(t)}{N}, \quad \mathbf{P}\{k, l \in \mathcal{B}_t\} = \frac{d(t)(d(t)-1)}{N(N-1)}. \tag{2.7}$$

Тогда условия (2.4)–(2.6) теоремы 1 выполнены, в частности, если

$$\max_t d(t) \leqslant d = \mathrm{const} < \infty, \quad TN^{-2} \to 0. \tag{2.8}$$

Последнее имеет место, например, в предположениях работы [3], из которых следует, что $d(1) = \ldots = d(T) = \mathrm{const} < \infty$, а $T = O(N \ln N)$.

Замечание 1. В теореме 1 требования к распределениям множеств $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_T$ накладываются только на вероятности $\mathbf{P}\{k \in \mathcal{B}_t\}$ и $\mathbf{P}\{k, l \in \mathcal{B}_t\}$. Поэтому имеет смысл ввести понятия 1-*равновероятной* и 2-*равновероятной* схем *бесповторного* выбора элементов для этих множеств. Будем считать, что для 1-равновероятной схемы выполнено первое из условий (2.7) (при всех k и t), а для 2-равновероятной схемы — оба этих условия (при всех $k \neq l$ и всех t).

Из теоремы 1 вытекает следующее утверждение.

Следствие 1. *Пусть множества* $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_T$ *независимы и построены каждое по 2-равновероятной схеме случайного бесповторного выбора,* $T, N \to \infty$ *и выполнены условия* (2.3) *и* (2.8). *Тогда имеет место соотношение* (2.2).

Используя термины теории случайных размещений, множества $\mathcal{B}_t$ будем интерпретировать как группы (комплекты) частиц. Частицы разных комплектов размещаются по ячейкам $1, \ldots, N$ независимо, при этом частицы t-го комплекта размещаются по одной во все ячейки с номерами из $\mathcal{B}_t$. Множество $\mathcal{M}_0 = \bigcap \overline{\mathcal{B}_t}$ представляет собой множество пустых ячеек.

Дополним эту схему процедурой удаления некоторых частиц после их размещения. Удаление частиц t-го комплекта производится сразу после его размещения по некоторому детерминированному или случайному закону, который зависит только от значения $\mathcal{B}_t$. Можно считать, что множества $\mathcal{B}_t$ случайно и независимо сокращаются, превращаясь в некоторые свои подмножества $\widetilde{\mathcal{B}}_t \subseteq \mathcal{B}_t$.

Таким образом, получилась еще одна схема независимого размещения комплектов частиц $\widetilde{\mathcal{B}}_1, \ldots, \widetilde{\mathcal{B}}_T$. Множество пустых ячеек в новой схеме размещения частиц комплектами выражается формулой

$$\widetilde{\mathcal{M}}_0 = \mathcal{M}_0 \cup \mathcal{N}. \tag{2.9}$$

Положим

$$\mathcal{N} = \bigcap_{t=1}^{T} ((\mathcal{B}_t \setminus \widetilde{\mathcal{B}}_t) \cup \overline{\mathcal{B}}_t) \setminus \bigcap_{t=1}^{T} \overline{\mathcal{B}}_t. \tag{2.10}$$

Другими словами, $\mathcal{N}$ — множество таких ячеек, которые не были пустыми в схеме $(\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_T)$, но стали ими в результате удаления частиц, о котором говорилось ранее.

Приведенные здесь определения множеств $\mathcal{B}_t$, $\widetilde{\mathcal{B}}_t$ и $\mathcal{N}$ полностью соответствуют использованным ранее, если в качестве удаляемых частиц рассматривать номера варьируемых неизвестных. Следует отметить, что закон, в соответствии с которым производится удаление частиц t-го комплекта, в значительной степени определяется порядком использования элементов множества $\mathcal{B}_t$ при подстановке неизвестных в t-е уравнение. В частности, если этот порядок выбирается случайно, то и удаление частиц t-го комплекта происходит по случайному закону.

Нам потребуются следующие характеристики распределений случайных множеств (комплектов частиц) $\mathcal{B}_t$:

$p_k(i)$ — вероятность того, что частица i-го комплекта попадет в ячейку k, т. е. $p_k(i) = \mathbf{P}\{k \in \mathcal{B}_i\}$,

$p_{k,l}(i)$ — вероятность того, что частицы комплекта $\mathcal{B}_i$ попадут одновременно в ячейки k и l, т. е. $p_{k,l}(i) = \mathbf{P}\{k, l \in \mathcal{B}_i\}$.

Рассмотрим следующие характеристики:

$\pi_k(i)$ — вероятность того, что удаляется частица i-го комплекта, попавшая в ячейку k (при условии, что попадание имеет место);

$\pi_{k,l}(i)$ — вероятность того, что удаляются частицы i-го комплекта, попавшие в ячейки k и l (при условии, что оба попадания имели место). Для схемы размещения комплектов частиц $\widetilde{\mathcal{B}}_1, \ldots, \widetilde{\mathcal{B}}_T$

$$\widetilde{p}_k(i) = \mathbf{P}\{k \in \widetilde{\mathcal{B}}_i\} = p_k(i)(1 - \pi_k(i)), \tag{2.11}$$

$$\widetilde{p}_{k,l}(i) = \mathbf{P}\{k, l \in \widetilde{\mathcal{B}}_i\} = p_{k,l}(i)(1 - \pi_k(i) - \pi_l(i) + \pi_{k,l}(i)). \tag{2.12}$$

Введем обозначения

$$A_k = \sum_{i=1}^{T} p_k(i), \qquad \widetilde{A}_k = \sum_{i=1}^{T} \widetilde{p}_k(i), \tag{2.13}$$

$$A_{k,l} = \sum_{i=1}^{T} p_k(i)p_l(i), \qquad \widetilde{A}_{k,l} = \sum_{i=1}^{T} \widetilde{p}_k(i)\widetilde{p}_l(i), \qquad 1 \leqslant k, l \leqslant N, \tag{2.14}$$

$$B_{k,l} = \sum_{i=1}^{T} p_{k,l}(i), \qquad \widetilde{B}_{k,l} = \sum_{i=1}^{T} \widetilde{p}_{k,l}(i), \qquad k \neq l. \tag{2.15}$$

Две ячейки, k и l, назовем связанными и будем использовать запись $k \sim l$, если $k, l \in \mathcal{B}_i$ при некотором i. В противном случае, когда $\{k, l\} \not\subseteq \mathcal{B}_i$ при всех i, будем называть ячейки k и l несвязанными и писать $k \not\sim l$. Нас интересуют связанные ячейки в множестве $\mathcal{N}$. Пусть κ — число пар связанных ячеек в множестве $\mathcal{N}$.

Теорема 2. *Пусть* $n, N \to \infty$ *и выполнены условия*

$$\sum_{k=1}^{N} e^{-\widetilde{A}_k} = O(1), \quad \max_{k<l} B_{k,l} \to 0, \quad \max_{k,i} p_k(i) \leqslant 0{,}5 - \varepsilon \tag{2.16}$$

при некоторой постоянной $\varepsilon > 0$. *Тогда* $\mathbf{E}\kappa \to 0$.

Замечание 1. Последние два соотношения в условии (2.16) — это записанные в иных обозначениях условия (2.5) и (2.6) теоремы 1.

Поясним смысл выражения $\sum_{k=1}^{N} e^{-\widetilde{A}_k}$. Оно связано со средним значением числа $\widetilde{\mu}_0 = |\mathcal{M}_0 \cup \mathcal{N}|$ пустых ячеек в схеме $(\widetilde{\mathcal{B}}_1, \ldots, \widetilde{\mathcal{B}}_T)$. Действительно,

$$\mathbf{E}\widetilde{\mu}_0 = \sum_{k=1}^{N} I\{k \in \widetilde{\mathcal{M}}_0\} = \sum_{k=1}^{N} \prod_{i=1}^{T} \mathbf{P}\{k \notin \widetilde{\mathcal{B}}_i\},$$

причем

$$\mathbf{P}\{k \notin \widetilde{\mathcal{B}}_i\} = 1 - \widetilde{p}_k(i) \leqslant e^{-\widetilde{p}_k(i)}.$$

Поэтому

$$\mathbf{E}\widetilde{\mu}_0 \leqslant \sum_{k=1}^{N} e^{-\widetilde{A}_k}. \tag{2.17}$$

Теорема 3. *Пусть* $n, N \to \infty$ *и выполнены условия*

$$p_k(i) \leqslant 1/2, \quad \max_{k} \widetilde{A}_{k,k} = O(1). \tag{2.18}$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^{N} e^{-\widetilde{A}_k} = O(\mathbf{E}\widetilde{\mu}_0). \tag{2.19}$$

Непосредственно из теорем 2 и 3 вытекает следующее утверждение.

Следствие 2. *Пусть* $n, N \to \infty$ *и выполнены условия*

$$\mathbf{E}\widetilde{\mu}_0 = O(1), \quad \max_{k,l} B_{k,l} \to 0,$$

$$\max_{k} \widetilde{A}_{k,k} = O(1), \quad p_k(i) \leqslant 0{,}5 - \varepsilon$$

при некоторой постоянной $\varepsilon > 0$. *Тогда* $\mathbf{E}\kappa \to 0$.

Доказательства теорем 2 и 3 будут приведены в следующем параграфе. А сейчас мы воспользуемся следствием 2 и докажем теорему 1.

В силу равенства (2.1) и соотношений

$$\widetilde{\mu}_0 = |\mathcal{M}_0 \cup \mathcal{N}|, \quad \widetilde{A}_{k,k} \leqslant A_{k,k}, \quad \{\mathcal{N}_0 = \mathcal{N}\} = \{\kappa = 0\}$$

из следствия 2 и предположений теоремы 1 вытекают соотношения $\mathbf{P}\{\mathcal{N}_0 = \mathcal{N}\} \to 1$ и (2.2). Теорема 1 доказана.

§ 3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ 2 И 3

Доказательство теоремы 2. Согласно определениям

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{k,l\in\mathcal{N},\ k\sim l\}\leqslant \mathbf{P}\{k,l\in\widetilde{\mathcal{M}}_0,\ k\sim l\}=\\ =\mathbf{P}\{k,l\in\widetilde{\mathcal{M}}_0\}-\mathbf{P}\{k,l\in\widetilde{\mathcal{M}}_0,\ k\not\sim l\}=\\ =\prod_{i=1}^{T}\mathbf{P}\{k,l\notin\widetilde{\mathcal{B}}_i\}-\prod_{i=1}^{T}\mathbf{P}\{k,l\notin\widetilde{\mathcal{B}}_i,\ \{k,l\}\not\subseteq\mathcal{B}_i\},\end{aligned}\qquad(3.1)$$

Очевидно, что

$$\mathbf{P}\{k,l\notin\widetilde{\mathcal{B}}_i\}=1-\widetilde{p}_k(i)-\widetilde{p}_l(i)+\widetilde{p}_{k,l}(i).\qquad(3.2)$$

Нетрудно показать, используя формулы (2.11) и (2.12), что

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{k,l\notin\widetilde{\mathcal{B}}_i,\ \{k,l\}\not\subseteq\mathcal{B}_i\}=(p_k(i)-p_{k,l}(i))\pi_k(i)+\\ +(p_l(i)-p_{k,l}(i))\pi_l(i)+1-p_k(i)-p_l(i)+p_{k,l}(i)=\\ =1-p_k(i)(1-\pi_k(i))-p_l(i)(1-\pi_l(i))+p_{k,l}(i)(1-\pi_k(i)-\pi_l(i))=\\ =\mathbf{P}\{k,l\notin\widetilde{\mathcal{B}}_i\}-p_{k,l}(i)\pi_{k,l}(i).\end{aligned}\qquad(3.3)$$

Поэтому, используя формулы (3.1)–(3.3) и неравенство

$$\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)\geqslant 1-x_1-\ldots-x_n,\qquad 0\leqslant x_1,\ldots,x_n\leqslant 1,$$

которое доказывается по индукции, получаем

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{k,l\in\mathcal{N},\ k\sim l\}\leqslant\\ \leqslant\prod_{i=1}^{T}\mathbf{P}\{k,l\notin\widetilde{\mathcal{B}}_i\}\left(1-\prod_{i=1}^{T}\left(1-p_{k,l}(i)\pi_{k,l}(i)(\mathbf{P}\{k,l\notin\widetilde{\mathcal{B}}_i\})^{-1}\right)\right)\leqslant\\ \leqslant\prod_{i=1}^{T}\mathbf{P}\{k,l\notin\widetilde{\mathcal{B}}_i\}\left(\sum_{i=1}^{T}p_{k,l}(i)\pi_{k,l}(i)(\mathbf{P}\{k,l\notin\widetilde{\mathcal{B}}_i\})^{-1}\right).\end{aligned}\qquad(3.4)$$

Используя правое неравенство в (2.16), неравенства

$$\mathbf{P}\{k,l\notin\widetilde{\mathcal{B}}_i\}\geqslant\mathbf{P}\{k,l\notin\mathcal{B}_i\}\geqslant 1-p_k(i)-p_l(i)\qquad(3.5)$$

и $\pi_{k,l}(i)\leqslant 1$, получаем

$$\sum_{i=1}^{T}p_{k,l}(i)\pi_{k,l}(i)(\mathbf{P}\{k,l\notin\widetilde{\mathcal{B}}_i\})^{-1}\leqslant(1-p_k(i)-p_l(i))^{-1}B_{k,l}.\qquad(3.6)$$

Кроме этого,

$$\prod_{i=1}^{T} \mathbf{P}\{k,l \notin \widetilde{\mathcal{B}}_i\} \leqslant \prod_{i=1}^{T} (1 - \widetilde{p}_k(i) - \widetilde{p}_l(i) + \widetilde{p}_{k,l}(i)) \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left\{-\sum_{i=1}^{T} \widetilde{p}_k(i) - \sum_{i=1}^{T} \widetilde{p}_l(i) + \sum_{i=1}^{T} \widetilde{p}_{k,l}(i)\right\} = \exp\{-\widetilde{A}_k - \widetilde{A}_l + \widetilde{B}_{k,l}\}.$$

В итоге получаем оценку

$$\mathbf{P}\{k,l \in \mathcal{N},\ k \sim l\} \leqslant (1 - p_k(i) - p_l(i))^{-1} B_{k,l} e^{-\widetilde{A}_k} e^{-\widetilde{A}_l} e^{\widetilde{B}_{k,l}}. \tag{3.7}$$

Заметим, что

$$\kappa = \sum_{1 \leqslant k < l \leqslant N} I\{k,l \in \mathcal{N},\ k \sim l\},$$

где $I\{E\}$ — индикатор случайного события E. Поэтому

$$\mathbf{E}\kappa = \sum_{1 \leqslant k < l \leqslant N} \mathbf{P}\{k,l \in \mathcal{N},\ k \sim l\}.$$

Теперь с помощью неравенств (3.7) и $\widetilde{B}_{k,l} \leqslant B_{k,l}$ получаем

$$\mathbf{E}\kappa \leqslant \varepsilon^{-1} \sum_{1 \leqslant k < l \leqslant N} B_{k,l} e^{-\widetilde{A}_k} e^{-\widetilde{A}_l} e^{\widetilde{B}_{k,l}} \leqslant \frac{1}{2\varepsilon} \max_{k<l} B_{k,l} e^{\max_{k<l} B_{k,l}} \left(\sum_{k=1}^{N} e^{-\widetilde{A}_k}\right)^2.$$

Воспользуемся в этих соотношениях условием (2.16) и получим, что $\mathbf{E}\kappa \to 0$. Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Заметим, что

$$1 - x \geqslant e^{-x-x^2}, \quad \text{если} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1/2.$$

Поэтому

$$\mathbf{E}\widetilde{\mu}_0 = \sum_{k=1}^{N} I\{k \in \widetilde{\mathcal{M}}_0\} = \sum_{k=1}^{N} \prod_{i=1}^{T} \mathbf{P}\{k \notin \widetilde{\mathcal{B}}_i\} = \sum_{k=1}^{N} \prod_{i=1}^{T} (1 - \widetilde{p}_k(i)) \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{k=1}^{N} e^{-\widetilde{A}_k - \widetilde{A}_{k,k}} \geqslant \exp\{-\max_k \widetilde{A}_{k,k}\} \sum_{k=1}^{N} e^{-\widetilde{A}_k}.$$

По условиям теоремы множитель перед суммой в правой части не меньше некоторой положительной константы. Теорема 3 доказана.

Замечание 2. Если вторую часть условия (2.18) теоремы 3 заменить условием $\max_k \widetilde{A}_{k,k} \to 0$, то аналогичные рассуждения вместо (2.19) дадут соотношение

$$\mathbf{E}\widetilde{\mu}_0 = \sum_{k=1}^{N} e^{-\widetilde{A}_k} (1 + o(1)). \tag{3.8}$$

§ 4. ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ ЧИСЛА БЛИЗКИХ РЕШЕНИЙ

Основной в нашей работе является следующая теорема.

Пусть величины $\widetilde{A}_k$, $A_{k,l}$, $\widetilde{A}_{k,l}$, $B_{k,l}$ и $\widetilde{B}_{k,l}$ определены формулами (2.13)–(2.15), а

$$\Lambda = \sum_{k=1}^{N} \exp\{-\widetilde{A}_k\}.$$

Теорема 4. *Пусть* $T, N \to \infty$, $\Lambda = O(1)$, *выполнены условия* (2.4), (2.5),

$$\max_{k,i} \mathbf{P}\{k \in \widetilde{\mathcal{B}}_i\} \to 0, \quad \min \widetilde{A}_k \to \infty, \tag{4.1}$$

$$\sum_{k,l=1}^{N} \widetilde{A}_{k,l} \exp\{-\widetilde{A}_k - \widetilde{A}_l\} \to 0. \tag{4.2}$$

Тогда при всех $k = 0, 1, \ldots$

$$\mathbf{P}\{\xi' = 2^k\} - \frac{\Lambda^k}{k!} e^{-\Lambda} \to 0. \tag{4.3}$$

Доказательство теоремы 4. Воспользуемся предельной теоремой Пуассона для числа пустых ячеек в обобщенной схеме размещения частиц комплектами (теорема 1 в [5]). Сформулируем ее для схемы $(\widetilde{\mathcal{B}}_1, \ldots, \widetilde{\mathcal{B}}_T)$ в виде леммы.

Лемма 1. *Пусть* $T, N \to \infty$, $\Lambda = O(1)$, *выполнены условия* (4.1), (4.2),

$$\sum_{1 \leqslant k < l \leqslant N} \widetilde{B}_{k,l} \exp\{-\widetilde{A}_k - \widetilde{A}_l\} \to 0, \tag{4.4}$$

$$\max_{k<l} \widetilde{B}_{k,l} = O(1), \tag{4.5}$$

Тогда при всех $k = 0, 1, \ldots$

$$\mathbf{P}\{\widetilde{\mu}_0 = k\} - \frac{\Lambda^k}{k!} e^{-\Lambda} \to 0, \tag{4.6}$$

$$\underline{\lim}(\mathbf{E}\xi' - e^{\Lambda}) \geqslant 0. \tag{4.7}$$

Убедимся, что в данном случае выполнены условия теоремы 1 и леммы 1. Условия (4.4) и (4.5) следуют из условий (2.5) и $\Lambda = O(1)$, условие (2.6) следует из условия (4.1), а условие (2.3) вытекает из условия $\Lambda = O(1)$ и неравенства (2.17). Остальные требования упомянутых утверждений перечислены в условиях теоремы 4. Поэтому можно воспользоваться теоремой 1 и леммой 1. Из них следует соотношение (4.3). Теорема 4 доказана.

§ 5. ТЕОРЕМА ДЛЯ СИСТЕМ С РЕГУЛЯРНЫМ НЕОДНОРОДНЫМ ПОЛИНОМИАЛЬНЫМ ВЫБОРОМ НЕИЗВЕСТНЫХ

Специальный интерес для нас представляет случай, когда

$$d(1) = \ldots = d(T) = d \geqslant 1$$

и наборы номеров $(j_1(t), \ldots, j_d(t))$ выбираются из множества

$$K_d = \{(k_1, \ldots, k_d) \colon 1 \leqslant k_1 < \ldots < k_d \leqslant N\}$$

случайно и независимо с вероятностями

$$P_t(k_1, \ldots, k_d) = \mathbf{P}\{(j_1(t), \ldots, j_d(t)) = (k_1, \ldots, k_d)\}. \tag{5.1}$$

Пусть для этих вероятностей выполнено условие

$$P_t(k_1, \ldots, k_d) = p_{t,k_1} p_{t,k_2} \ldots p_{t,k_d} (1 + \beta_t(k_1, \ldots, k_d)), \tag{5.2}$$

где $p_{t,k_1} + p_{t,k_2} + \ldots + p_{t,k_d} = 1$,

$$|\beta_t(k_1, \ldots, k_d)| \leqslant \frac{C}{N}, \quad 1 \leqslant k_1 < \ldots < k_d \leqslant N, \quad t = 1, 2, \ldots, T, \tag{5.3}$$

$$\frac{c}{N} \leqslant p_{t,k} \leqslant \frac{C}{N}, \quad k = 1, 2, \ldots, N, \quad t = 1, 2, \ldots, T, \tag{5.4}$$

при некоторых $0 < c < C < \infty$. Такой способ выбора неизвестных в уравнениях системы (1.1) назовем регулярным неоднородным полиномиальным выбором без возвращения.

Частным случаем является обычный равновероятный выбор без возвращения. Для него

$$p_{t,k_1} = p_{t,k_2} = \ldots = p_{t,k_d} = \frac{1}{N}.$$

Действительно, в этом случае

$$P_t(k_1, \ldots, k_d) = \frac{1}{(N)_d} = \frac{1}{N^d} (1 + \beta_t(k_1, \ldots, k_d)),$$

где при $N \geqslant (d+1)d$

$$0 < \beta_t(k_1, \ldots, k_d) = \prod_{s=0}^{d-1} \left(1 - \frac{s}{N}\right)^{-1} - 1 \leqslant \frac{d^2}{N}$$

(последнее неравенство доказывается индукцией по d).

При изучении системы с регулярным неоднородным полиномиальным выбором неизвестных удобно использовать условия на истинное решение, аналогичные использованным В. А. Копытцевым в работе [3]. Пусть вектор $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_N^0)$ — истинное решение системы, J_0 — множество нулевых координат, $n_0 = |J_0|$ — число нулей в записи истинного решения, J_1 — множество единичных координат, а $n_1 = |J_1|$ — число единиц в записи истинного решения. Считаем, что существуют такие константы $0 < c_0 < c_1 < 1$, что при всех достаточно больших N

$$c_0 \leqslant \frac{n_1}{N} = 1 - \frac{n_0}{N} \leqslant c_1. \tag{5.5}$$

Теорема 5. *Пусть* $T, N \to \infty$, $T/N \to \infty$, $T/N^2 \to 0$, $d = \mathrm{const}$, $\Lambda = O(1)$, *выполнены условия* (5.2)–(5.5). *Тогда имеет место соотношение* (4.3).

Доказательство теоремы 5. Проверим, что в данном случае выполнены условия теоремы 4. Все они, кроме соотношения

$$\min \widetilde{A}_k = \min \sum_{i=1}^{T} \widetilde{p}_k(i) \to \infty, \tag{5.6}$$

выводятся непосредственно из условий $T/N^2 \to 0$ и $\Lambda = O(1)$.

Остается лишь убедиться в справедливости условия (5.6). Оно означает, что среднее число уравнений, в которых k-я переменная присутствует и не варьируется, равномерно по k стремится к бесконечности. Убедимся в этом, используя условие $T/N \to \infty$. Так как все переменные для каждой функции $\varphi_t(y_1, \ldots, y_d)$ в уравнениях существенны, то для каждого t и каждого s найдется значение аргумента $(y_1', \ldots, y_d')$, при котором изменение y_s' влечет изменение значения функции φ_t. Вероятность одновременного осуществления событий $\{j_s(t) = k\}$ и $\{x_{j_l(t)} = y_l',\ l \neq s\}$ в силу (5.2)–(5.5) оценивается снизу величиной

$$\left(\min\left\{\sum_{k \in J_0} p_{t,k}, \sum_{k \in J_1} p_{t,k}\right\}\right)^{d-1} p_{t,k} \left(1 - \frac{C}{N}\right)^d \geqslant \frac{\delta}{N},$$

где

$$\delta = c \left(\min\{c_0, 1 - c_0\}\right)^{d-1} \left(1 - \frac{C}{N}\right)^d > 0.$$

Значит, $\widetilde{p}_k(t) \geqslant \delta/N$, и соотношение (5.6) следует из условия $T/N \to \infty$.

Таким образом, в данном случае выполнены все условия теоремы 4. Согласно этой теореме имеет место соотношение (4.3). Теорема 5 доказана.

Пользуюсь случаем выразить свою признательность В. А. Копытцеву. Наши обсуждения результатов работ [3–5] были очень полезными и сыграли существенную роль в появлении этой статьи. Я также благодарен А. М. Зубкову за полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Балакин Г.В.* Введение в теорию случайных систем уравнений. — В сб.: Труды по дискретной математике. Т. 1. — М.: ТВП, 1997, с. 1–18.
2. *Балакин Г.В.* О распределении числа решений систем случайных булевых уравнений. — Теор. вероятн. примен., 1973, т. 18, в. 3, с. 627–632.
3. *Копытцев В.А.* О распределении числа решений случайных заведомо совместных систем уравнений. — Теор. вероятн. примен., 1995, т. 40, в. 2, с. 430–437.
4. *Копытцев В.А.* Предельные теоремы для числа решений системы случайных уравнений. — Теор. вероятн. примен., 2000, т. 45, в. 1, с. 51–72.
5. *Михайлов В.Г.* Предельные теоремы для случайного покрытия конечного множества и для числа решений системы случайных уравнений. — Теор. вероятн. примен., 1996, т. 41, в. 2, с. 272–283.