E. A. Blagoveshchenskaya, A. V. Yakovlev, Direct decompositions of torsion-free abelian groups of finite rank,
Algebra i Analiz, 1989, Volume 1, Issue 1, 111–127

https://www.mathnet.ru/eng/aa4

Е. А. Благовещенская, А. В. Яковлев

ПРЯМЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП КОНЕЧНОГО РАНГА БЕЗ КРУЧЕНИЯ

Доказана достаточность условий следующей теоремы, полностью решающей проблему 67 из монографии Л. Фукса «Бесконечные абелевы группы» (необходимость доказана в [4]). Пусть $n=r_1+r_2+\ldots+r_s=l_1+l_2+\ldots+l_t$ — два разбиения числа n в суммы натуральных слагаемых, u — количество слагаемых r_i, равных 1, v — количество слагаемых l_j, равных 1. Для того чтобы существовала абелева группа без кручения ранга n, допускающая как прямое разложение с рангами неразложимых слагаемых $r_1, r_2, \ldots, r_s$, так и разложение с рангами неразложимых слагаемых $l_1, l_2, \ldots, l_t$, необходимо и достаточно, чтобы 1) $r_i \leqslant n-v$, $l_j \leqslant n-u$ для всех i, j, $1 \leqslant i \leqslant s$, $1 \leqslant j \leqslant t$; 2) если $r_i=n-v$ для некоторого i, то среди чисел l_j лишь одно отлично от 1 (и равно $n-v$); если $l_j=n-u$ для некоторого j, то среди чисел r_i лишь одно отлично от 1 (и равно $n-u$).

Как хорошо известно, разложение абелевой группы конечного ранга без кручения в прямую сумму неразложимых групп далеко не однозначно: даже ранги слагаемых и их число меняются при переходе от одного разложения к другому. Следующая теорема, анонсированная нами в [2], отвечает на вопрос, какова связь между рангами неразложимых слагаемых различных прямых разложений одной и той же группы; она полностью решает проблему 67 из монографии Л. Фукса [3].

Теорема. *Пусть*

$$n=r_1+r_2+\ldots+r_s=l_1+l_2+\ldots+l_t, \quad 1<s,\ t<n$$

— два разбиения числа n в суммы натуральных слагаемых, u — количество слагаемых r_i, равных 1, v — количество слагаемых l_j, равных 1. Для того чтобы существовала абелева группа без кручения ранга n, допускающая как прямое разложение с неразложимыми слагаемыми рангов $r_1, r_2, \ldots, r_s$, так и разложение с неразложимыми слагаемыми рангов $l_1, l_2, \ldots, l_t$, необходимо и достаточно, чтобы 1) $r_i \leqslant n-v$ для всех i, $1 \leqslant i \leqslant s$; $l_j \leqslant n-u$ для всех j, $1 \leqslant j \leqslant t$;

2) если $r_i=n-v$ для некоторого i, то среди чисел l_j лишь одно отлично от 1 (и равно $n-v$); если $l_j=n-u$ для некоторого j, то среди чисел r_i лишь одно отлично от 1 (и равно $n-u$).

Необходимость условий этой теоремы доказана в [4]. Цель настоящей работы — доказательство достаточности этих условий. Первое доказательство достаточности было получено Е. А. Благовещенской. Однако оно было очень громоздко и трудно обозримо. Поэтому в настоящей работе мы приводим более простой вариант доказательства, который принадлежит обоим авторам.

Всюду в дальнейшем слово «группа» означает «абелева группа конечного ранга без кручения». Поскольку все суммы групп, встречающиеся в работе, прямые, мы обозначаем прямую сумму групп $A_1, A_2, \ldots, A_n$ через A_1+A_2+

Ключевые слова: абелева группа без кручения, прямое разложение ранг группы.

$\ldots + A_n$ или через $\sum_{i=1}^{n} A_i$. Пусть p — простое число; через $\langle p^{-\infty} a\rangle$ мы обозначаем группу ранга 1, всякий элемент которой имеет вид $\frac{z}{p^n} a$, где z — целое, n — любое натуральное число, и, наоборот, для всяких целого z и натурального n существует единственный элемент $b \in \langle p^{-\infty} a\rangle$ такой, что $p^n b = za$.

§ 1. Г-группы

Кирпичиками для построения группы с предписанными ранговыми типами разложений будут изученные (но так не названные) в [1] Г-группы и цветкообразные группы, определенные в [4].

Группа V называется Г-группой, если она имеет вполне характеристическую подгруппу $U = U_1 \oplus U_2 \oplus \ldots \oplus U_n$, где U_i — прямая сумма k_i экземпляров группы $\langle p_i^{-\infty} a\rangle$ ($p_1, \ldots, p_n$ — различные простые числа), причем фактор-группа-V/U циклическая, ее порядок свободен от квадратов и не делится ни на одно из чисел $p_1, \ldots, p_n$. U называется остовом Г-группы V.

Обозначим через $M = M(V)$ множество простых делителей индекса $Q = Q(V)$ подгруппы U в группе V; пусть b — такой элемент из V, что его класс по модулю U порождает V/U; тогда $Qb \in U$, $Qb = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$, где $u_i \in U_i$. Через $M_i = M_i(V)$ обозначим множество всех простых делителей Q, на которые не делится u_i; множества M_i образуют покрытие множества M. Покрытию отвечает граф $\Gamma(V)$; его вершины — простые числа p_i, причем p_i и p_j соединены ребром тогда и только тогда, когда $M_i \cap M_j$ непусто. Числа k_i называются кратностями вершин графа $\Gamma(V)$. Этот граф во многом определяет свойства группы V (откуда название Г-группа); он называется каркасом Г-группы V.

Следующие свойства Г-групп получены в [1].

Предложение 1.

а) *Г-группа тогда и только тогда неразложима, когда ее каркас связан и кратности всех вершин каркаса равны 1.*

б) *Пусть V — Г-группа, $p_1, \ldots, p_n$ — вершины ее каркаса, $k_1, \ldots, k_n$ — их кратности, M — множество простых делителей индекса Q этой группы, $M_1, \ldots, M_n \subset M$ — множества, образующие соответствующее группе V покрытие множества M. Пусть далее множество M представлено в виде дизъюнктного объединения множеств $K_1, \ldots, K_m$, и пусть n_i — количество множеств K_j, имеющих непустое пересечение с M_i, Γ_j — граф покрытия множества K_j теми множествами $K_j \cap M_i$, которые непусты, r_j — число вершин Γ_j. Если для всех i $k_i \geqslant n_i$ и для всех j Γ_j — связный граф, то V раскладывается в прямую сумму групп $V_1, \ldots, V_m$ и нескольких групп ранга 1, где V_j — неразложимая Г-группа с каркасом Γ_j, имеющая ранг r_j.*

Предложение 2. *Пусть $n = r_1 + r_2 + \ldots + r_s = l_1 + l_2 + \ldots + l_t$ — два представления n в виде сумм натуральных слагаемых, причем $r_i \leqslant n - t + 1$, $l_j \leqslant n - s + 1$ для любых i, j. Тогда существует Г-группа ранга n, обладающая как разложением в прямую сумму неразложимых групп рангов $r_1, \ldots, r_s$, так и разложением в прямую сумму неразложимых групп рангов $l_1, \ldots, l_t$.*

Это утверждение — частный случай доказываемой нами теоремы; оно будет использовано при доказательстве общего случая.

Будем называть Г-группу группой с линейным графом покрытия (ЛГ-группой), если все вершины ее каркаса имеют кратность 1, а сам каркас линеен; это значит, что его вершины можно расположить в таком порядке $p_1, p_2, \ldots, p_n$, что p_1 соединяется ребром лишь с p_2, p_2 — лишь с p_3, $\ldots$, p_{n-1} — лишь с p_n. Предложение 1, а) показывает, что ЛГ-группы всегда неразложимы.

Пусть U — прямая сумма двух ЛГ-групп V, W, причем в каркасе второй группы некоторые соединенные ребром простые числа содержатся и в каркасе первой группы, и там тоже связаны ребром. В переводе на комбинаторный язык это значит, что имеются конечное множество M, его покрытие множествами M_i ($i \in I$) и разбиение M в объединение непересекающихся множеств N_1, N_2, причем

а) существуют последовательности $i_1, i_2, \ldots, i_m$; $j_1, j_2, \ldots, j_n$ элементов из I такие, что $N_1 \cap M_i$ непусто тогда и только тогда, когда $i = i_1, i_2, \ldots i_m$; $N_2 \cap M_i$ непусто тогда и только тогда, когда $j = j_1, j_2, \ldots, j_n$; $N_1 \cap M_i \cap M_j$ непусто тогда и только тогда, когда для некоторого s: $i = i_s$, $j = i_{s+1}$ или $i = i_{s+1}$, $j = i_s$; $N_2 \cap M_i \cap M_j$ непусто тогда и только тогда, когда для некоторого t: $i = j_t$, $j = t+1$ или $i = j_{t+1}$, $j = j_t$;

б) для некоторых $s < m$ и $t < n: i_s = j_t$, $i_{s+1} = j_{t+1}$.

Построим новые множества $\bar{N}_1$, $\bar{N}_2$, положив $\bar{N}_1 = N_1 \cup (N_2 \cap M_{i_s} \cap M_{i_{s+1}}) = N_1 \cup (N_2 \cap M_{j_t} \cap M_{j_{t+1}})$, $\bar{N}_2 = N_2 \setminus (N_2 \cap M_{j_t} \cap M_{j_{t+1}})$. Тогда покрытие множества N_2 множествами $\bar{N}_2 \cap M_{j_s}$ уже не будет связным: $\bar{N}_2 = N_2' \cup N_2''$, где каркас покрытия N_2' состоит из элементов $j_1, \ldots, j_t$, а каркас N_2'' — из элементов $j_{t+}, \ldots, j_m$. Возвращаясь к терминологии абелевых групп, получим по предложению 1, б): группа $U = V \oplus W$ раскладывается в прямую сумму трех неразложимых ЛГ-групп V', W', W'', причем каркасы V и V' одинаковы, а каркасы W', W'' получаются из каркаса W разрывом по некоторому ребру. При этом, очевидно, $\operatorname{rank} V' = \operatorname{rank} V = n$, $\operatorname{rank} W' = t$, $\operatorname{rank} W'' = m - t$. Это утверждение — база индукции для следующего предложения.

Предложение 3. *Пусть* $V = V_1 + \ldots + V_s$ *— прямая сумма ЛГ-групп,* $n_i = \operatorname{rank} V_i$, $m < s$. *Пусть для каждого* $i > m$ *и для любых соседних вершин каркаса группы* V_i *найдется группа* V_j *с* $j \leqslant m$, *для которой эти же два простых числа соединены ребром и в каркасе* V_j. *Тогда для любых разбиений*

$$n_i = n'_{i1} + \ldots + n'_{ir_i} \quad (i > m)$$

существует разложение группы V в прямую сумму неразложимых ЛГ-групп

$$V = V'_1 + \ldots + V'_m + \sum_{i=m+1}^{s} \left(\sum_{j=1}^{r_i} V'_{ij} \right);$$

при этом $\operatorname{rank} V'_i = \operatorname{rank} V_i = n_i$ *при* $i \leqslant m$, $\operatorname{rank} V'_{ij} = n'_{ij}$ *при* $i > m$, *каркасы групп* V'_i *при* $i \leqslant m$ *— такие же, как каркасы* V_i, *а каркасы групп* V'_{ij} *при* $i > m$ *получаются из каркасов групп* V_i *разрывом по некоторым ребрам.*

Во всех встречающихся ниже Г-группах можно выбрать такую вершину каркаса, которая соединена ребром не более чем с одной вершиной (для ЛГ-групп это можно сделать, и даже двумя способами); мы фиксируем такую вершину и называем ее первой вершиной каркаса. Ту вершину, с которой первая вершина соединена ребром (если такая существует), называем второй вершиной. Пусть V — неразложимая Г-группа с остовом $\langle p_1^{-\infty} a_1 \rangle + \langle p_2^{-\infty} a_2 \rangle + \ldots + \langle p_n^{-\infty} a_n \rangle$, индекс которого в V равен Q, M — множество простых делителей Q, $M_1, \ldots, M_n \subset M$ — множества, образующие определенное выше покрытие множества M, V_0 — подгруппа V, состоящая из всех элементов, некоторое целочисленное кратное которых принадлежит группе $\langle p_2^{-\infty} a_2 \rangle + \ldots + \langle p_n^{-\infty} a_n \rangle$, Q_1 — произведение всех чисел из M_1. Тогда группа V порождается подгруппами $\langle p_1^{-\infty} a_1 \rangle$, V_0 и таким элементом $b \in V$, что $Q_1 b = a_1 + v_0$, $v_0 \in V_0$. Если p_1 — первая вершина каркаса группы V, а p_2 — вторая, то можно выбрать v_0 так, что $v_0 \in \langle p_2^{-\infty} a_2 \rangle$. В этом случае Q_1 называем первым индексом Г-группы V, V_0 — ее лепестком, а p_2 — вершиной лепестка. Нетрудно видеть, что V_0 — тоже

Г-группа; ее каркас получается из каркаса V выбрасыванием первой вершины. В частности, если V — ЛГ-группа, то V_0 — тоже ЛГ-группа.

Пусть V_0 — Г-группа, в каркасе которой отмечена вершина p_2 и не содержится p_1. Допуская вольность речи, мы будем называть прямую сумму $\langle p_1^{-\infty} a_1 \rangle + V_0$ Г-группой с первой вершиной p_1, второй вершиной p_2, первым индексом 1 и лепестком V_0.

§ 2. Цветкообразные группы

Мы ограничимся напоминанием определения цветкообразной группы лишь в нужном нам частном случае. Пусть V_i $(1 \leqslant i \leqslant t)$ — неразложимые Г-группы, у которых первые вершины каркасов совпадают и других пересечений каркасы этих групп не имеют. Пусть эта общая вершина p; группы V_i содержат сервантные подгруппы $\langle p^{-\infty} a_i \rangle$. Обозначим через V_i^0 лепесток группы V_i, а через Q_i — первый индекс группы V_i; тогда V_i порождается подгруппами $\langle p^{-\infty} a_i \rangle$, V_i^0 и элементом b_i таким, что $Q_i b_i = a_i + v_i$, $v_i \in V_i^0$. Пусть первые индексы Q_1, $Q_2, \ldots, Q_t$ взаимно просты в совокупности, $g_1, g_2, \ldots, g_t$ — такие натуральные числа (мы будем называть их вспомогательными индексами), что $Q_1 g_1$, $Q_2 g_2, \ldots, Q_t g_t$ по-прежнему взаимно просты в совокупности. В прямой сумме $V_1 + \ldots + V_t$ выделим элемент $a = g_1 a_1 + g_2 a_2 + \ldots + g_t a_t$; в [4] показано, что $V_1 + \ldots + V_t$ раскладывается в прямую сумму группы $\langle p^{-\infty} a \rangle$ ранга 1 и некоторой группы U, которая называется цветкообразной группой с лепестками V_i^0, определяющими индексами Q_i, вспомогательными индексами g_i $(1 \leqslant i \leqslant t)$ и сердцевиной типа $\langle p^{-\infty} a \rangle$. Вторые вершины групп V_i называются вершинами лепестков. В [4] показано, что если каждое собственное подмножество множества определяющих индексов $Q_1, \ldots, Q_t$ имеет нетривиальный общий делитель, то цветкообразная группа неразложима.

Следующее свойство цветкообразных групп доказано (в большей общности) в § 9.

Предложение 4. *Пусть V — цветкообразная группа с сердцевиной типа $\langle h^{-\infty} a \rangle$, вершинами лепестков $p_1, \ldots, p_t$, определяющими индексами $Q_1, \ldots, Q_t$ и вспомогательными индексами $g_1 = 1$, $g_2, \ldots, g_t$; далее, пусть $s \leqslant t$ и W_i $(2 \leqslant i \leqslant s)$ — Г-группы с первыми вершинами h, вторыми вершинами p_i и первыми индексами $\bar{Q}_i$ (быть может, $\bar{Q}_i = 1$, так что W_i — прямая сумма лепестка и группы $\langle h^{-\infty} a \rangle$), а V_1, V_s — Г-группы, в каркас которых входят соответственно p_1, p_s и не входит h, причем других пересечений каркасы групп W_i, V_j* не имеют. *Предполагаем, что числа $\bar{Q}_2, \ldots, \bar{Q}_s$, $Q_1 \ldots Q_s Q_{s+1} \ldots Q_t$ взаимно просты. Наконец, пусть $Q_1 = q_1 Q_1'$, $\ldots$, $Q_s = q_s Q_s'$, причем числа $q_1 \ldots q_s$, $Q_1' \ldots Q_s' Q_{s+1} \ldots Q_t$ взаимно просты, а каждое собственное подмножество множества $Q_1', \ldots, Q_s', Q_{s+1}, \ldots, Q_t$ имеет нетривиальный общий делитель. В каждом из случаев* а), б), в) *определенная там группа B раскладывается в прямую сумму неразложимой цветкообразной группы с такой же сердцевиной и теми же лепестками (а значит, и тем же рангом), что и V, и с определяющими индексами $Q_1', \ldots, Q_s', Q_{s+1}, \ldots, Q_t$, и еще одной неразложимой группы*;

а) *$q_1, \ldots, q_s$ взаимно просты в совокупности, но каждое собственное подмножество этого множества имеет нетривиальный общий делитель, $q_{s+1}, \ldots, q_t$ делятся на h, а* $B = V + V_1 + W_2 + \ldots + W_s$;

б) $s = 1$, $q_1 > 1$, $B = V + \langle h^{-\infty} a \rangle + V_1$;

в) *$s > 2$, $q_1, \ldots, q_s$ взаимно просты в совокупности, но любое собственное подмножество этого множества имеет нетривиальный общий делитель; q_s взаимно просто с $q_1 \ldots q_{s-1}$; $q_s, \ldots, q_t$ делятся на q_1, $B = V + V_1 + W_2 + \ldots + W_{s-1} + V_s$.*

В связи с этим утверждением уместно следующее определение. Набор индексов $Q_1, Q_2, \ldots, Q_t$, взаимно простых в совокупности и таких, что при отбрасывании любого из них оставшиеся имеют нетривиальный общий делитель, будем называть почти произвольным (относительно натурального N), если, кроме этих ограничений, числа Q_i удовлетворяют лишь еще одному условию: они взаимно просты с натуральным числом N. В условиях предложения 4 набор индексов $Q_1, Q_2, \ldots, Q_t$ почти произволен. Набор определяющих индексов цветкообразной группы, получающейся в результате применения предложения 4, тоже почти произволен (но относительно другого N): для любого допустимого набора найдется такой набор определяющих индексов первоначальной цветкообразной группы, что исходный допустимый набор является набором определяющих индексов цветкообразной группы, получающейся в результате применения предложения 4.

§ 3. Частные случаи теоремы

Мы обращаемся теперь к доказательству достаточности условий теоремы, сформулированной во введении к статье. Пусть

$$n = r_1 + r_2 + \ldots + r_s = l_1 + l_2 + \ldots + l_t$$

— два разбиения числа n в суммы натуральных слагаемых, причем $1 < s$, $t < n$. Без ограничения общности считаем, что

$$r_1 \geqslant r_2 \geqslant \ldots \geqslant r_s, \quad l_1 \geqslant l_2 \geqslant \ldots \geqslant l_t, \; r_1 \geqslant l_1.$$

Пусть среди слагаемых r_i равно u единиц, а среди слагаемых l_j равно v единиц, т. е. $r_1, \ldots, r_{s-u}, l_1, \ldots, l_{t-v} \geqslant 2$, $r_{s-u+1} = \ldots = r_s = l_{t-v+1} = \ldots = l_t = 1$. По условию теоремы имеем: $r_1 \leqslant n - v$.

Лемма 1. *Если $r_1 \leqslant n - t + 1$ или $r_1 = n - v$, то существует группа ранга n, допускающая прямые разложения как с неразложимыми слагаемыми рангов $r_1, \ldots, r_s$, так и с неразложимыми слагаемыми рангов $l_1, \ldots, l_t$.*

Доказательство. Поскольку $n_2, \ldots, n_s \geqslant 1$, имеем

$$l_1 \leqslant r_1 = n - n_2 - \ldots - n_s \leqslant n - s + 1.$$

Если $r_1 \leqslant n - t + 1$, то мы находимся в ситуации предложения 2, откуда все следует. Если $r_1 = n - v$, то по условию теоремы $l_1 = n - v$, $l_2 = \ldots = l_t = 1$, и $r_1 = n - t + 1$, т. е. снова применимо предложение 2.

Таким образом, мы можем в дальнейшем ограничиться случаем $n - t + 1 < r_1 < n - v$. Кроме того, можно считать, что из двух чисел u, v не более одного отлично от 1. В самом деле, если единичные слагаемые входят в оба разбиения числа n, то, отбрасывая по одному из них в каждом разбиении, мы снова получим разбиения, удовлетворяющие условиям теоремы. Рассуждая по индукции, построим группу, допускающую оба эти разбиения как наборы рангов неразложимых слагаемых; прибавляя к ней произвольное слагаемое ранга 1, мы найдем группу, удовлетворяющую требованиям теоремы для исходных разбиений.

Начиная отсюда, мы до конца работы считаем, что из чисел u, v не более одного отлично от 1 и что $n - t + 1 < r_1 < n - v$.

§ 4. Измельчение разбиений числа n

Критические числа. Положим $r'_1 = r_1 + 1$, $r'_s = r_s - 1$, $r'_i = r_i$ при $i \neq 1, s$. Обозначим через a_i сумму $r'_1 + r'_2 + \ldots + r'_i$; удобно будет считать, что $a_0 = 1$. Через b_j обозначим сумму $b_1 + \ldots b_j$. Число i называется критическим, если существует такое j, что $a_{i-1} < b_j \leqslant a_i$ (в частности, 1 — критическое число, так как $a_0 = 1 < b_1 = l_1 \leqslant r_1 < r'_1 = a_1$). Пусть $1 = s_0, s_1, \ldots, s_f$ — все критические числа. Если $v > 0$, то найдется такое число k, что $a_{s_k - 1} \leqslant n - v <$

$< a_{s_k}$; ясно, что все числа, бо́льшие s_k, тоже критические, т. е. $s_{k+i}=s_k+i$ для $i=1, \ldots, f-k$ и $s_f=s$. Если же $v=0$, то положим $k=f$; в этом случае, вообще говоря, s_f не совпадает с s.

2. Числа t_i, R'_{s_i}, R''_{s_i} для $i<k$. Если $i\leqslant k$, то через t_i обозначим наибольшее число j такое, что $a_{s_{i}-1}\geqslant b_{j-1}$. В частности, $t_0=1$, так как $a_0=1<$ $<l_1=b_1$. Очевидно, что

$$b_{t_i-1}\leqslant a_{s_i-1}<b_{t_i}\leqslant b_{t_{i+1}-1}\leqslant a_{s_i}.$$

Положим при $i<k$

$$R'_{s_i}=b_{t_i}-a_{s_i-1},\quad R''_{s_i}=a_{s_i}-b_{t_{i+1}-1}.$$

Пусть $w=\max\limits_{i<k} R'_{s_i}$. Поскольку $R'_{s_i}\leqslant l_{t_i}\leqslant l_1$, имеем $w\leqslant l_1$. С другой стороны, $w\geqslant R'_1=l_1-1\geqslant 1$.

Лемма 2. $t-v-t_1<t_1-3$. *В частности*, $t_1>3$ *и* $t_i-t_{i-1}\leqslant t_1-1$ *при* $1<i\leqslant k$.

Доказательство. По предположению, $r_1>n-t+1$, и потому $l_1+\ldots$ $\ldots+l_{t_1}>r_1+1>n-t+2$ и $2(t-v-t_1)\leqslant l_{t_1+1}+\ldots+l_{t-v}<n-(n-t+$ $+3)-v=t-3-v$, откуда $(t-v)-t_1<t_1-3$.

3. Перераспределение единичных слагаемых.

Лемма 3. *Пусть* $c_1+c_2+\ldots+c_h\geqslant d_1+d_2+\ldots+d_l+x$, *где* c_i, d_i; x — *неотрицательные целые числа*; $1\leqslant l\leqslant h$; $d_1\geqslant 1$; $c_2, \ldots, c_{h-1}, d_2, \ldots, d_l\geqslant 2$, $0<d_i\leqslant c_i$ *при* $i\leqslant l$. *Тогда существуют такие целые числа* m, $d'_1, \ldots, d'_m$, d'_h, *что* $d_1+\ldots+d_l+x=d'_1+\ldots+d'_m+d'_h$, $l\leqslant m<h$, $d_i\leqslant d'_i\leqslant c_i$ *при* $1\leqslant$ $\leqslant i\leqslant l$, $2\leqslant d'_i\leqslant c_i$ *при* $l<i<m$, $0\leqslant d'_m\leqslant c_m$, $0\leqslant d'_h\leqslant c_h$. *При этом, если* $c_1+\ldots+c_h>d_1+\ldots+d_l+x$ *и* $l<h-1$, *то числа* d'_i *можно выбрать так, что* $l<m$, $d'_m<c_m$.

Утверждение леммы очевидно. Предполагая, что $v>0$ (а тогда $r_s\geqslant 2$ и $s=s_f$), применим его к следующим неравенствам:

$$w+l_2+\ldots+l_{t_1-1}+R''_1\geqslant r_1\geqslant r'_{s_k}=(b_{t_k}-a_{s_k-1})+l_{t_k+1}+\ldots+l_{t-v}+x_k,$$
$$w+l_2+\ldots+l_{t_1-1}\geqslant r'_{s_i}=x_i\quad(i>k)$$

(здесь x_i — число единичных слагаемых в соответствующем представлении числа r'_{s_i}; при $i=f$ последнее неравенство строгое, так как $r'_{s_f}=r'_s=r_{s-1}<r_1$). Мы получим следующие разбиения чисел $r'_{s_k}, \ldots, r'_{s_f}=r'_s$:

$$\begin{gathered}
r'_{s_k}=R'_{s_k}+l'_{t_k}+\ldots+l'_{t_{k+1}-1}+R''_{s_k},\\
r'_{s_{k+1}}=R'_{s_k+1}+l'_{t_{k+1}+1}+\ldots+l'_{t_{k+2}-1}+R''_{s_{k+1}},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
r'_s=R'_{s_f}+l'_{t_f+1}+\ldots+l'_g+R''_{s_f},
\end{gathered}$$

где в каждой сумме не более одного из слагаемых l'_j равно 1, а остальные не менее 2, причем при $k\leqslant i<f$ и при $i=f$, если $r'_s\neq 0$, выполняются неравенства $1\leqslant R'_{s_i}\leqslant w$, $t_{i+1}-t_i\leqslant t_1-1$, $g-t_f\leqslant t_1-1$, $0\leqslant R''_{s_i}\leqslant R''_1$, $l'_{t_i+j}\leqslant$ $\leqslant l_{1+j}$ (при $j<t_{i+1}-t_i$, если $i\neq f$, и при $j<g-t_f$, если $i=f$); $l'_g<l_{1+g-t_f}$; $R'_{s_k}\geqslant b_{t_k}-a_{s_k-1}$.

Эти равенства и неравенства служат определением чисел t_i, g, R'_{s_i}, R''_{s_i}, l'_j при $i\geqslant k$, $j\geqslant t_k$, $j\neq t_k$, $t_{k+1}, \ldots, t_f$ (конечно, выбор их неоднозначен, но лемма 3 обеспечивает возможность хотя бы одного такого выбора). Положим теперь

$$l'_{t_k} = R''_{s_{k-1}} + r'_{s_{k-1}+1} + \ldots + r'_{s_k-1} + R'_{s_k},$$
$$l_{t_i} = R''_{s_{i-1}} + R'_{s_i}$$

при $k < i \leqslant f$.

Для единообразия формул положим также $l'_i = l_i$ при $i < t_k$. Ясно, что каждое l'_i — сумма нескольких l_j; точнее говоря, все числа l_j можно разбить на группы, так что сумма элементов этой группы равна l'_i, причем в каждой группе не более одного, а при $i < t_k$ — ни одного единичного слагаемого. В частности,

$$l'_{t_k} = R''_{s_{k-1}} + r'_{s_{k-1}+1} + \ldots + r'_{s_k-1} + b_{t_k} - a_{s_k-1} + R'_{s_k} - (b_{t_k} - a_{s_k-1})$$

состоит из неединичного слагаемого l_{t_k} и $R'_{s_k} - (b_{t_k} - a_{s_k-1})$ единичных слагаемых.

Если $v = 0$, то положим $l'_i = l_i$ для всех i. Далее, при любом v положим $R_1 = 1 + R'_1 + R''_1$, $R_{s_i} = R'_{s_i} + R''_{s_i}$, $R_i = r'_i$ для некритического i. Следующие соотношения выполняются для всех i:

$$r'_{s_i} = R_{s_i} + l'_{t_i+1} + \ldots + l'_{t_{i+1}-1}, \quad r'_j = R_j$$

при $j = 1, s_1, \ldots, s_f$;

$$l'_{t_i} = R''_{s_{i-1}} + R_{s_{i-1}+1} + \ldots + R_{s_i-1} + R'_{s_i};$$
$$R_1 + R_2 + \ldots + R_s = l'_{t_0} + l'_{t_1} + \ldots + l'_{t_f};$$

$t_{i+1} - t_i \leqslant t_1 - 1$, $l'_{t_i+j} \leqslant l_{1+j}$, если $t_i < t_i + j < t_{i+1}$ (здесь для однообразия формул мы положили $t_{f+1} = g + 1$).

§ 5. Реализация разбиения $R_1 + \ldots + R_s = l'_{t_0} + \ldots + l'_{t_f}$

Обозначим через J множество тех индексов $j \leqslant t$, для которых l_j вошло слагаемым в одно из чисел l'_{t_i}, так что $l'_{t_0} + \ldots + l'_{t_f} = \sum_{j \in J} l_j$.

Лемма 4. *Существует Γ-группа U, обладающая разложениями*

$$U = U'_1 + \ldots + U'_s = V'_{t_0} + \ldots V'_{t_f}$$

с неразложимыми слагаемыми, такими, что $\operatorname{rank} U'_i = R_i$, $\operatorname{rank} V'_{t_i} = l'_{t_i}$, *причем*

1) *первые вершины групп $U'_2, \ldots, U'_s$ одинаковы и равны p, и их каркасы не содержат h;*

2) *первая и вторая вершины группы U'_1 суть h и p (здесь $p \neq h$ — простые числа);*

3) *все V'_{t_i}* — ЛГ-*группы;*

4) $U = \sum_{j \in J} V_j$, *где V_j — неразложимая группа ранга l_j.*

Согласно предложению 2, первые три утверждения леммы 4 равносильны следующему комбинаторному утверждению.

Лемма 4'. *Существует такое конечное множество простых чисел, не делящих Qph, его покрытие множествами M_q $(1 \leqslant q \leqslant m)$ и его дизъюнктные разбиения $M = \bigcup_{i=1}^{s} N_i = \bigcup_{j=0}^{f} K_j$, что*

1) *если $l'_{t_j} = 1$ (или $R_i = 1$), то K_j (соответственно N_i) пусто;*

2) *число множеств M_q, для которых $K_j \cap M_q$ непусто, равно l'_{t_j} (если $l'_{t_j} \neq 1$);*

3) *число множеств M_q, для которых $N_i \cap M_q$ непусто, равно R_i (если $R_i \neq 1$);*

4) $N_1 \supset M_0$, $N_i \cap M_0 = \varnothing$ *при* $i > 1$;

5) *существует такое $c \neq 0$, что при $R'_{s_i} \neq 1$ пересечение $N_{s_i} \cap M_c$ непусто;*

6) $M_0 \cap M_c$ *непусто;*

7) *Покрытия множеств* N_i, K_j *множествами* $N_i \cap M_q$, $K_j \cap M_q$ *связны, причем для* K_j *графы покрытий линейны;*

8) *число множеств* N_i, *имеющих непустое пересечение с* M_c, *не больше* $f+1$; *число множеств* N_i, *имеющих непустое пересечение с* M_q *при* $q \neq c$, *не больше, чем число множеств* K_j, *имеющих непустое пересечение с* M_q.

Доказательство леммы 4'. Пусть $c = 1 + \max\limits_{i \leqslant f} R''_{s_i} = 1 + \max\limits_{i \leqslant k} R''_{s_i}$, $m = w + c + 1$ (напомним, что $w = \max\limits_{i<k} R'_{s_i}$, $l_1 - 1 \leqslant w \leqslant l_1$). Выберем в множестве простых чисел, отличных от p, h конечные попарно не пересекающиеся множества L_0, L_{ij} $(1 \leqslant i < m,\ 0 \leqslant j \leqslant f)$, причем L_{ij} непусто тогда и только тогда, когда $l'_{t_j} \neq 1$, $c - R''_{s_{j-1}} \leqslant i < c - R''_{s_{j-1}} + l'_{t_j} - 1$ (если $j \geqslant 1$), $c \leqslant i < c + l_1 - 1$ (если $j = 0$). Положим

$$M = L_0 \cup \Big(\bigcup_{i,\,j} L_{ij}\Big),\quad M_0 = L_0,\quad M_1 = \bigcup_{j=0}^{f} L_{1j},\quad M_i = \bigcup_{j=0}^{f} (L_{i-1,\,j} \cup L_{ij})$$

при $i \neq 1$, c, m;

$$M_c = L_0 \cup \Big(\bigcup_{j=0}^{f} L_{c-1,\,j} \cup L_{cj}\Big),\quad M_m = \bigcup_{j=0}^{f} L_{m-1,\,j};$$

в случае $c = 1$ надо множество $M_1 = M_c$ определить формулой $M_1 = L_0 \cup \Big(\bigcup\limits_{j=0}^{f} L_{ij}\Big)$. Далее, положим $K_0 = L_0 \cup \Big(\bigcup\limits_{i=1}^{m-1} L_{i0}\Big)$, $K_j = \bigcup\limits_{i=1}^{m-1} L_{ij}$ при $j > 1$.

Для построения множеств N_i построим сначала вспомогательные множества $\bar{N}_i$. Если $R_i = 1$, то полагаем $\bar{N}_i = \varnothing$. Далее, полагаем $\bar{N}_1 = K_0 \cup \Big(\bigcup\limits_{i<c} L_{i1}\Big)$; $\bar{N}_{s_j} = \Big(\bigcup\limits_{i \leqslant c} L_{ij}\Big) \cup \Big(\bigcup\limits_{i<c} L_{i,\,j+1}\Big)$, если $R_{s_j} > 1$. Если q — некритическое число, то существует j, для которого $s_{j-1} < q < s_j$; положим $z = c - 1 + R_{s_j} + R_{s_{j-1}+1} + \ldots + R_{q-1}$. При $R_q \neq 1$ через $\bar{N}_q$ обозначим $\bigcup\limits_{i=z+1}^{c-1+R_q} L_{ij}$. Множества $\bar{N}_i$ попарно не пересекаются, однако их объединение, вообще говоря, не совпадает с N; неиспользованные множества L_{ij} надо добавить к тем $\bar{N}_i$ для которых это не увеличит количество множеств M_q, с которыми пересекается $\bar{N}_i$. Пусть x $(0 < x < k)$ — такой номер, что $R''_{s_x} = c - 1$, а $y < k$ — такой номер, что $R'_{s_y} = w$ (они не обязательно разные). Множества L_{ij} с $i < c$, не вошедшие ни в одно $\bar{N}_q$, добавим к $\bar{N}_{s_x - 1}$, а такие же множества с $i \geqslant c$ — к $\bar{N}_{s_y}$; может оказаться (если $s_x - 1 = s_y$), что все L_{ij} добавлены к одному и тому же множеству. Полученные множества обозначим N_{s_x-1}, N_{s_y}. Для остальных индексов i полагаем $N_i = \bar{N}_i$. Все требования леммы 4' удовлетворяются для построенных множеств M, M_q, N_i, K_j.

Замечание. Могло оказаться, что $R'_s = 0$; это возможно только, если $r'_s = 0$, $r_s = 1$, т. е. $u > 0$. Но тогда по предположению $v = 0$ и все числа l'_j совпадают с соответствующими $l_j \geqslant 2$; в разложении $r'_{s-1} = R'_{s+1} + \ldots + l_t$ отсутствует слагаемое R''_{s-1}, и поэтому не получается противоречия с леммой 4' (если бы это было не так, то $l'_{sf} = R''_{s-1}$, и число множеств M_q, с которыми пересекается K_f, было бы $l'^{\#}_{sf} + 1$, т. е. на 1 больше, чем надо).

Итак, лемма 4' доказана, и тем самым установлено существование группы U, удовлетворяющей первым трем условиям леммы 4. Покажем, что условие 4 выполняется автоматически. Как видно из построения, $V'_1, \ldots, V'_{t_f}$ — ЛГ-группы, причем каркасы групп V'_1, V'_{t_x}, V'_{t_y} покрывают каркас любой другой группы V'_{t_j}:

если два простых числа соединены ребром в каркасе V'_{t_j}, то они соединены ребром и в каркасе хотя бы одной из групп V'_1, V'_{t_x}, V'_{t_y}. Как отмечалось, 1, x, $y < k$, и потому $\operatorname{rank} V'_1 = l'_1 = l_1$, $\operatorname{rank} V'_{t_x} = l'_{t_x} = l_{t_x}$, $\operatorname{rank} V'_{t_y} = l'_{t_y} = l_{t_y}$. Поскольку разбиение $l_1 + l_{t_x} + l_{t_y} + \sum_{J_1} l_j$ (здесь $J_1 = J \setminus 1,\ t_x,\ t_y$) вписано в разбиение $l_1 + l_{t_x} + l_{t_y} + \sum_{j \neq 0,\, x,\, y} l'_{t_j}$, по предложению 4 найдется и прямое разложение группы U с неразложимыми слагаемыми $V_j (j \in J)$ такими, что $\operatorname{rank} V_j = l_j$. Лемма 4 доказана.

§ 6. Группы V'_i с $i \neq t$, $t_1, \ldots, t_f$

Расположим числа R_{s_i}, l'_j с $j \neq t_0$, $t_1, \ldots, t_f$ в виде таблицы (через t_{f+1}, обозначено число $g+1$).

$$\begin{array}{llll}
R_1 & l'_2 & l'_3 \ \ldots & l'_{t_1-1} \\
R_{s_1} & l'_{t_1+1} & l'_{t_1+2} \ldots & l'_{t_2-1} \\
R_{s_2} & l'_{t_2+1} & l'_{t_2+2} \ldots & l'_{t_3-1} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
R_{s_{f-1}} & l'_{t_{f-1}+1} & \ldots & l'_{t_f-1} \\
R_{s_f} & l'_{t_f+1} & \ldots & l'_{t_{f+1}-1}
\end{array} \qquad (*)$$

Суммы чисел, стоящих в строках этой таблицы, равны r'_1, $r'_{s_1}, \ldots, r'_{s_f}$. Заменим теперь каждое число на определенную ниже группу, ранг которой равен этому числу, причем в первом столбце поставим уже построенные в лемме 4 группы U'_1, $U'_{s_1}, \ldots, U'_{s_f}$:

$$\begin{array}{llll}
U'_1 & V'_2 & V'_3 \ \ldots & V'_{t_1-1} \\
U'_{s_1} & V'_{t_1+1} & V'_{t_1+2} \ldots & V'_{t_2-1} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
U'_{s_{f-1}} & V'_{t_{f-1}+1} & \ldots & V'_{t_f-1} \\
U'_{s_f} & V'_{t_f+1} & \ldots & V'_{t_{f+1}-1}
\end{array} \qquad (**)$$

Опишем сначала группы из первой строки. Группы V_i $(1 < i < t_1)$ представляют собой ЛГ-группы, первый элемент каркаса которых равен простому числу h из леммы 4. Кроме h, каркасы групп $V'_2, \ldots, V'_{t_f-1}$ не имеют общих элементов, и все простые числа, входящие в них, не входят в каркасы Г-групп, стоящих в первом столбце, и не делят первый индекс группы U'_1. В последующих строках тоже стоят ЛГ-группы. Общее правило — каркас группы V'_j из i-й строки совпадает с начальным отрезком длины l'_j каркаса группы, стоящей в первой строке и в том же столбце, что V'_j (в § 4 было показано, что первая строка не короче остальных, а стоящие в ней числа l'_j не меньше других чисел того же столбца). Есть два исключения из общего правила. Первое исключение касается случая $l'_j = 1$: если в той же строке есть лишь еще одно слагаемое U'_{s_i} (т. е. строка состоит из групп U'_{s_i}, V'_j), то полагаем $V'_j = \langle h^{-\infty} a \rangle$; если же строка состоит более чем из двух слагаемых и группа V'_j стоит в i-м столбце, то полагаем $V'_j = \langle p_i^{-\infty} a \rangle$, где p_i — вторая вершина каркаса группы V'_i. Второе исключение относится к последней строке, если $s_f = s$. Выделим несколько случаев:

а) $v = 0$; тогда $g = t$. Все группы из последней строки, кроме V'_t, определяются по общему правилу, а каркас группы V'_t начинается не с первой, а со второй вершины каркаса стоящей над V'_t в первой строке группы V'_j. При этом может оказаться, что $l'_t = l'_j$ и каркаса группы V'_j не хватит; в этом случае дополним «хвост» каркаса группы V'_j еще одним простым числом, отличным от всех ранее использованных и не делящим первый индекс группы U'_1.

б) $v>0$, $g=t_{f+1}-1=t_j$. В этом случае в последней строке групп V'_j нет.

в) $v>0$, $g>t_f$. Группы $V_{tf+1}, \ldots, V'_{g-1}$ определяются по общему правилу, а каркас группы V'_g совпадает с отрезком каркаса стоящей над ней группы V'_j из первой строки, начинающимся со второго простого числа и имеющим нужную длину (в этом случае по построению из § 4 $l'_g < l'_j$).

До сих пор мы ничего не говорили об индексах остовов групп V'_i. Они должны удовлетворять следующим условиям: 1) индексы $Q(V'_i)$, $Q(V'_j)$ взаимно просты, если хотя бы одна из групп V'_i, V'_j не находится в первой строчке; 2) индексы групп V'_j, не лежащих в первой строчке, взаимно просты с числом Q из леммы 4; 3) числа Q и первые индексы $Q'_2=Q'(V'_2), \ldots, Q'_{t_1-1}=Q'(V'_{t_1-1})$ групп V'_i из первой строчки взаимно просты в совокупности, но каждое собственное подмножество множества $Q, Q'_2, \ldots, Q'_{t_1-1}$ имеет нетривиальный общий делитель. Ясно, что всем этим условиям можно удовлетворить.

В дальнейшем мы будем считать фиксированными индексы всех групп, не принадлежащих первой строке. Числа же $Q, Q'_2, \ldots, Q'_{t_1-1}$ остаются почти произвольными в смысле § 2; мы их зафиксируем позже.

Обозначим через W прямую сумму всех групп U'_i, $1 \leqslant i \leqslant s$ (включая и группы с некритическими индексами, построенные в лемме 4 и не вошедшие в таблицу) и групп V'_j с $j=1, t_1, \ldots, t_f, t_{f+1}$. В следующих параграфах мы покажем, что группа W допускает оба требуемых прямых разложения.

§ 7. Разложение W в прямую сумму групп рангов $l_1, l_2, \ldots, l_t$

По построению, группа U представляет собой прямую сумму групп V'_j $(1 \leqslant j \leqslant t_{f+1})$ (группы V'_j с $j=t_0, t_1, \ldots, t_f$ построены в лемме 4, а остальные — в § 6). При $v=0$ их количество равно t и для каждого j $\operatorname{rank} V'_j=l_j$, так что требуемое разложение уже построено.

Пусть теперь $v>0$. Обозначим через J'_x множество таких i, что l'_i стоит в x-м столбце таблицы (*) $(x \geqslant 2)$, а через J_x — множество тех j, что при разбиении чисел l'_i в слагаемые разложения $n=l_1+\ldots+l_t$ число l_j вошло в одно из чисел l'_i с $i \in J'_x$, так что $\Sigma_{i \in J'_x} l'_i=\Sigma_{j \in J_x} l_j$. Ясно, что $[1, t]=J \cup J_1 \cup \cup \ldots \cup J_{t_1-1}$ (множество J определено в формулировке леммы 4). Для каждого x, $t_1>x \geqslant 2$ каркас любой группы V'_j, стоящей в x-м столбце таблицы (**), является отрезком каркаса группы V'_x, стоящей вверху этого столбца, и все группы столбца — ЛГ-группы. Поэтому применимо предложение 3, согласно которому, можно, разорвав каркасы групп x-го столбца, стоящих не в верхнем ряду, в нужных местах, разложить прямую сумму $\Sigma_{i \in J'_x} V'_i$ в сумму $\Sigma_{j \in J_x} V'_j$ с неразложимыми слагаемыми, причем $\operatorname{rank} V_j=l_j$ для всех $j \in J_x$. Таким образом,

$$W=U+\sum_{2 \leqslant x<t_1}\Bigl(\sum_{i \in J'_x} V'_i\Bigr)=\sum_{j \in J} V_j+\sum_{2 \leqslant x<t_1}\Bigl(\sum_{j \in J_x} V_j\Bigr),$$

и группа W разложена в прямую сумму групп рангов $l_1, l_2, \ldots, l_t$.

§ 8. Разложение W в прямую сумму групп рангов $r_1, r_2, \ldots, r_s$

Сначала индукцией по x докажем следующее утверждение.

Л е м м а 5. *Пусть $1 \leqslant x \leqslant f$. При подходящем выборе почти произвольных первых индексов Г-групп $U'_1, V'_2, \ldots, V'_{t_1-1}$ прямая сумма групп, стоящих* *в первых x строках таблицы* (**), *равна прямой сумме неразложимых групп* $U_{s_1}, \ldots, U_{s_{x-1}}$ *рангов* $r_{s_1}, \ldots, r_{s_{x-1}}$ *и неразложимых* Γ-*групп* $U_1^{(x)}, V_2^{(x)}, \ldots, V_{t_1-1}^{(x)}$, *каркасы которых такие же, как каркасы групп* $U_1', V_2', \ldots, V_{t_1-1}'$, *а первые индексы снова почти произвольны.*

Доказательство. Случай $x=1$ тривиален, поэтому предположим, что группы $U_{s_2}, \ldots, U_{s_{x-2}}, U_1^{(x-)}, V_2^{(x-1)}, \ldots, V_{t_1-1}^{(x-1)}$ уже построены. Их первые индексы почти произвольны, а прямая сумма раскладывается в прямую сумму цветкообразной группы X ранга $r_1'-1=r_1$ и группы Z типа $\langle h^{-\infty}a\rangle$, имеющей ранг 1. Определяющие индексы группы X (которые совпадают с первыми индексами групп $U_1^{(x-1)}, V_2^{(x-1)}, \ldots, V_{t_1-1}^{(x-1)}$ и потому почти произвольны) и вспомогательные индексы (которые тоже произвольны) выберем так, чтобы к X и группам x-й строки таблицы (**) можно было применить один из случаев предложения 4 (случай а)), если среди групп x-й строки нет групп ранга 1, кроме, быть может, U_{s_x-1}'; случай б), если такая группа есть и число групп в x-й строке равно 2; случай в), если число групп в строке больше 2 и среди них есть отличная от U_{s_x-1}' группа ранга 1). По этому предложению прямая сумма X и групп x-й строки раскладывается в прямую сумму неразложимой группы $U_{s_{x-1}}$ ранга $r_{s_{x-1}}'=r_{s_{x-1}}$ и цветкообразной группы X' с такой же сердцевиной и лепестками, что и X, и с почти произвольными определяющими индексами. Но по определению цветкообразной группы X' с сердцевиной типа $\langle p^{-\infty}a\rangle$ прямая сумма $X'+Z=X'+\langle p^{-\infty}a\rangle$ снова рассыпается в прямую сумму Γ-групп $U_1^{(x)}, V_2^{(x)}, \ldots, V_{t_1-1}^{(x)}$ с теми же каркасами, что и у групп $U_1^{(x-1)}, V_2^{(x-1)}, \ldots, V_{t_1-1}^{(x-1)}$, и первыми индексами, совпадающими с определяющими индексами группы X', т. е. почти произвольными. Лемма доказана.

Применим лемму при $x=f$. Мы получим неразложимые группы $U_{s_2}, \ldots, U_{s_{f-1}}$ рангов $r_{s_2}, \ldots, r_{s_{f-1}}$ и группы $U_1^{(f)}, V_2^{(f)}, \ldots, V_{t_1-1}^{(f)}$ с почти произвольными первыми индексами. Прямую сумму $U_1^{(f)}, V_2^{(f)}, \ldots, V_{t_1-1}^{(f)}$ снова представим в виде суммы цветкообразной группы X ранга r_1 и группы $Z=\langle h^{-\infty}a\rangle$ ранга 1. Рассмотрим все возможные случаи.

1) $r_s'=0$, т. е. $r_s=1$. Положим $U_1=X$, $U_s=Z$.

2) $r_s'>0$, $s\neq s_f$. По предложению 4, б) группа $X+U_s'+Z$ изоморфна прямой сумме цветкообразной группы $X'=U_1$ ранга r_1 и неразложимой группы U_s ранга $r_s'+1=r_s$.

3) $r_s'>0$, $s=s_f$. В этом случае можно применить предложение 4, а) к сумме $X+U_{s_f}'+V_{t_f+1}'+\ldots+V_{g-1}'+(V_g'+Z)$, если последняя строка таблицы (**) состоит более чем из одной группы, или предложение 4, б) (если последняя строка состоит лишь из группы U_s') к сумме $X+(U_s'+Z)$; мы получим разложение этой суммы в сумму неразложимых групп $X'=U_1$ ранга r_1 и U_s ранга $r_s'+1=r_s$.

Итак, прямая сумма всех групп таблицы (**) представлена в виде прямой суммы неразложимых групп $U_1, U_{s_1}, \ldots, U_{s_f}, U_s$ (последняя группа есть только в случае $s\neq s_f$) рангов $r_1, r_{s_1}, \ldots, r_{s_f}, r_s$. Для некритического индекса $i\neq s$ положим $U_i=U_i'$, где U_i' — группа, построенная в лемме 4 и имеющая ранг $r_i'=r_i$. Поскольку, очевидно, группа W является прямой суммой групп из таблицы (**) и групп $U_i=U_i'$ с некритическими индексами $i<s$, мы получили ее разложение в сумму неразложимых слагаемых $U_1, U_2, \ldots, U_s$ рангов $r_1, r_2, \ldots, r_s$.

Достаточность условий теоремы, сформулированной в начале работы, доказана.

§ 9. Прямые суммы цветкообразных групп и Γ-групп

Нам осталось доказать предложение 4. Как часто бывает, удобным оказывается обобщить задачу и доказывать наше утверждение не для групп специального вида, а для произвольных цветкообразных групп, как они определены в [4]. Это усложняет формулировки, но упрощает изложение доказательства. Следующие ниже предложения 5, 6, 7 представляют и самостоятельный интерес.

Напомним общее определение цветкообразной группы из [4].

Лемма 6. *Пусть h — простое число, V — группа, порожденная вполне характеристической подгруппой U, сервантной подгруппой $\langle h^{-\infty}a\rangle$ и элементом b таким, что для некоторого $Q>1$, не делящегося на h, и некоторого элемента $u \in U$ выполняется соотношение $Qb=a+u$. Если не существует ненулевых гомоморфизмов из $\langle h^{-\infty}a\rangle$ в U, то группа V неразложима, подгруппа $\langle h^{-\infty}a\rangle$ вполне характеристична в V и элемент u не делится в V ни на один простой делитель Q.*

Это — лемма 5 из [4]; она будет полезна и здесь.

Пусть теперь имеется набор групп V_i таких, как в лемме 6, $1 \leqslant i \leqslant t$; каждая из них порождается сервантной подгруппой $\langle h^{-\infty}a_i\rangle$, вполне характеристической подгруппой U_i и элементом b_i таким, что для некоторого $u_i \in U_i$ выполняется соотношение $Q_ib_i=a_i+u_i$, где $Q_i>1$ — не делящееся на h натуральное число. Предположим, что числа $Q_1, Q_2, \ldots, Q_t$ взаимно просты в совокупности, а $g_1, g_2, \ldots, g_t$ — такие числа, что $Q_1g_1, Q_2g_2, \ldots, Q_tg_t$ по-прежнему взаимно просты в совокупности. Обозначим через V прямую сумму $V_1+V_2+\ldots+V_t$, а через a элемент $g_1a_1+g_2a_2+\ldots+g_ta_t$. В [4] показано, что подгруппа $\langle h^{-\infty}a\rangle$ выделяется в V прямым слагаемым; дополнительное прямое слагаемое B называется цветкообразной группой с лепестками (U_i, u_i), сердцевиной

$$B_0=B\cap(\langle h^{-\infty}a_1\rangle+\langle h^{-\infty}a_2\rangle+\cdots+\langle h^{-\infty}a_t\rangle)$$

типа $\langle h^{-\infty}a\rangle$, определяющими индексами $Q_1, Q_2, \ldots, Q_t$ и вспомогательными индексами $g_1, g_2, \ldots, g_t$. Как показано в [4], группа B неразложима, если выполнены два условия: 1) любое собственное подмножество множества $Q_1, Q_2, \ldots, Q_t$ определяющих индексов имеет нетривиальный общий делитель; 2) если C, D — любые различные из групп $\langle h^{-\infty}a\rangle, U_1, \ldots, U_t$, то $\operatorname{Hom}(C, D)=0$.

Полезно рассматривать цветкообразную группу и с другой точки зрения. Это группа без кручения, порожденная подгруппами $V_1, V_2, \ldots, V_t$, на элементы которых наложено единственное соотношение

$$g_1a_1+g_2a_2+\cdots+g_ta_t=0.$$

В дальнейшем из технических соображений мы ограничиваемся случаем $g_1=-1$, так что соотношение принимает вид

$$a_1=g_2a_2+\cdots+g_ta_t.$$

Не при любых $g_2, \ldots, g_t$ наложение предыдущего соотношения приводит к цветкообразной группе: для того чтобы это было так, необходимо и достаточно, чтобы числа $Q_1, Q_2g_2, \ldots, Q_tg_t$ были взаимно просты в совокупности.

Введем еще одно определение. Пусть U, $\bar U$ — группы, а u, $\bar u$ — элементы из них. Пары (U, u), $(\bar U, \bar u)$ будем называть однотипными с модулем однотипности $(P, \bar P)$, если для любых целых чисел x, y, z, t таких, что $xt-yz=1$, y делится на P, z делится на $\bar P$, существуют подгруппы U', $\bar U'$ прямой суммы $U+\bar U$, обладающие свойствами: U и U' изоморфны, $\bar U$ и $\bar U'$ изоморфны, $U+\bar U=U'+\bar U'$, $xu+y\bar u \in U'$, $zu+t\bar u \in \bar U'$.

В следующих предложениях 5, 6, 7 h — простое число, U_i, $\bar U_i$ $(1 \leqslant i \leqslant t)$ — неразложимые группы, $u_i \in U_i$, $\bar u_i \in \bar U_i$, причем пары (U_i, u_i), $(\bar U_i, \bar u_i)$ однотипны с модулем однотипности $(P_i, \bar P_i)$; V_i — группа, порожденная сервантной подгруппой $\langle h^{-\infty}a_i\rangle$, вполне характеристической подгруппой U_i и элементом b_i таким, что $Q_ib_i=a_i+u_i$; аналогично $\bar V_i$ — группа, порожденная сервантной подгруппой $\langle h^{-\infty}\bar a_i\rangle$, вполне характеристической подгруппой $\bar U_i$ и элементом $\bar b_i$ таким, что $\bar Q_i\bar b_i=\bar a_i+\bar u_i$. При этом предполагается, что числа $Q_1, Q_2, \ldots, Q_t$

взаимно просты в совокупности, но каждое собственное подмножество этого множества имеет нетривиальный общий делитель, а числа $\bar{Q}_i$ попарно взаимно просты и не обязательно отличны от 1. Пусть, наконец, B — цветкообразная группа, порожденная подгруппами $V_1, V_2, \ldots, V_t$, на элементы которых наложено единственное соотношение

$$a_1 = g_2 a_2 + \ldots + g_t a_t \tag{9.1}$$

(здесь $g_2, \ldots, g_t$ таковы, что числа $Q_1, Q_2 g_2, \ldots, Q_t g_t$ взаимно просты в совокупности).

Будем считать также, что выполнены следующие условия:

1) если C, D — любые две различные из групп $\langle h^{-\infty} a\rangle, U_1, \ldots, U_t$ или любые две различные из групп $\langle h^{-\infty} a\rangle, \bar{U}_1, \ldots, \bar{U}_t$, то $\mathrm{Hom}(C, D) = 0$.

2) числа $Q_1 Q_2 \ldots Q_t$, $\bar{Q}_1 \bar{Q}_2 \ldots \bar{Q}_t$, $P_1 P_2 \ldots P_t$, $\bar{P}_1 \bar{P}_2 \ldots \bar{P}_t$, h попарно взаимно просты.

Предложение 5. *Пусть $2 \leqslant s \leqslant t$ и числа $Q_1, \ldots, Q_s$ допускают такие разложения в произведения $Q_i = q_i Q'_i$, что*

а) *любое подмножество множества $Q'_1, \ldots, Q'_s, Q_{s+1}, \ldots, Q_t$ по-прежнему имеет нетривиальный общий делитель;*

б) *числа $q_1, q_2, \ldots, q_s$ (а значит, и числа $\bar{Q}'_1 = q_1$, $\bar{Q}'_2 = q_2\bar{Q}_2, \ldots, \bar{Q}'_s = q_s\bar{Q}_s$) взаимно просты в совокупности, но каждое собственное подмножество множества этих чисел имеет нетривиальный общий делитель;*

в) *$g_{s+1}, \ldots, g_t$ делятся на q_1;*

г) *$q_1 q_2 \ldots q_s$ взаимно просто с $Q'_1 Q'_2 \ldots Q'_s Q_{s+1} \ldots Q_t$. Тогда группа $B + \bar{U}_1 + \bar{V}_2 + \ldots + \bar{V}_s$ раскладывается в прямую сумму двух неразложимых цветкообразных групп B' и $\bar{B}'$, причем лепестки B' такие же, как у B (т. е. изоморфны группам $U_1, \ldots, U_t$), а лепестки $\bar{B}'$ изоморфны группам $\bar{U}_1, \ldots, \bar{U}_s$, так что $\operatorname{rank} B' = \operatorname{rank} B$, $\operatorname{rank} \bar{B}' = \operatorname{rank} \bar{U}_1 + \operatorname{rank} \bar{V}_2 + \ldots + \operatorname{rank} \bar{V}_s$.*

Предложение 6. *Пусть Q_2 допускает такое разложение на множители $Q_2 = q_2 Q'_2$, что любое подмножество множества $Q_1, Q'_2, Q_3, \ldots, Q_t$ по-прежнему имеет нетривиальный общий делитель, а $q_2 > 1$ и взаимно просто с $Q_1 Q'_2 Q_3 \ldots Q_t$. Тогда группа $B + \langle h^{-\infty} a_2\rangle + \bar{U}_2$ раскладывается в прямую сумму неразложимой цветкообразной группы B' с такими же лепестками, как у B, и неразложимой группы $\bar{B}$, так что $\operatorname{rank} B' = \operatorname{rank} B$, $\operatorname{rank} \bar{B} = 1 + \operatorname{rank} \bar{U}_2$.*

Предложение 7. *Пусть $2 < s \leqslant t$ и числа $Q_1, \ldots, Q_s$ допускают такие разложения на множители $Q_i = q_i Q'_i$, что*

а) *числа $q_1, \ldots, q_{s-1}$ взаимно просты в совокупности, но каждое подмножество этого множества имеет нетривиальный общий делитель;*

б) *числа $q_1 q_2 \ldots q_{s-1}$, q_s взаимно просты;*

в) *любое подмножество множества $Q'_1, \ldots, Q'_s, Q_{s+1}, \ldots, Q_t$ имеет нетривиальный общий делитель;*

г) *числа $q_1 q_2 \ldots q_{s-1} q_s$, $Q'_1 Q'_2 \ldots Q'_s Q_{s+1} \ldots Q_t$ взаимно просты;*

д) *$g_s, \ldots, g_t$ делятся на q_1. Тогда группа $B + \bar{U}_1 + \bar{V}_2 + \ldots + \bar{V}_{s-2} + \langle h^{-\infty} a\rangle + \bar{U}_{s-1} + \bar{U}_s$ раскладывается в прямую сумму неразложимой цветкообразной группы B' с такими же лепестками, как у B, и некоторой неразложимой группы $\bar{B}'$, так что $\operatorname{rank} B' = \operatorname{rank} B$, $\operatorname{rank} \bar{B}' = \operatorname{rank} \bar{U}_1 + \operatorname{rank} \bar{V}_2 + \ldots + \operatorname{rank} \bar{V}_s - 1$.*

Замечание. Даже если вспомогательные индексы $g_1, g_2, \ldots, g_t$ цветкообразной группы B все были равны 1, то, как будет видно из доказательств, для цветкообразных групп, получающихся в результате применения предложений 5, 6, 7, это уже не так. Именно поэтому мы не могли ограничиться в определении цветкообразной группы случаем тривиальных вспомогательных индексов.

Сначала докажем две леммы.

Лемма 7. *Пусть x', y', z', t' — такие целые числа, что x' и t' взаимно просты с y' и z'. Тогда существуют такие целые числа x, y, z, t, что x делится на x', y делится на y', z делится на z', t делится на t' и $xt - yz = 1$. При этом числа можно выбрать так, что $t = t'$.*

Доказательство. Числа $x't'$ и $y'z'$ взаимно просты, и потому существуют такие целые числа u, v, что $x't'u + y'z'v = 1$. Достаточно положить $x = x'u$, $y = -y'$, $z = z'v$, $t = t'$.

Лемма 8. *Пусть группы V_i, $\bar{V}_i$ и числа Q_i, $\bar{Q}_i$, Q'_i, $\bar{Q}'_i$ удовлетворяют условиям предложения 5. Тогда в прямой сумме $V_i + \bar{V}_i$ $(2 \leqslant i \leqslant s)$ существуют подгруппа U'_i, изоморфная U_i, подгруппа $\bar{U}'_i$, изоморфная $\bar{U}_i$, и элементы $u'_i \in U'_i$, $\bar{u}'_i \in \bar{U}'_i$, b'_i, $\bar{b}'_i$, такие, что $V_i + \bar{V}_i = V'_i + \bar{V}'_i$, где V'_i — неразложимая группа, порожденная подгруппами $\langle h^{-\infty}a'_i\rangle$, U'_i и элементом b'_i; $\bar{V}'_i$ — неразложимая группа, порожденная подгруппами $\langle h^{-\infty}\bar{a}'_i\rangle$, $\bar{U}'_i$ и элементом $\bar{b}'_i$, причем $Q'_i b'_i = a'_i + u'_i$, $\bar{Q}'_i \bar{b}'_i = \bar{a}'_i + \bar{u}'_i$.*

Доказательство. Воспользуемся леммой 7, положив $x' = q_i$, $y' = P_i\bar{Q}_i$, $z' = \bar{P}_i Q'_i$, $t' = 1$. Тогда для $2 \leqslant i \leqslant s$ существуют целочисленные матрицы

$$A_i = \begin{pmatrix} \tilde{x}_i, & \tilde{y}_i \\ \tilde{z}_i, & \tilde{t}_i \end{pmatrix},$$

определители которых равны 1, такие что $\tilde{x}_i \equiv 0 \pmod{q_i}$, $\tilde{y}_i \equiv 0 \pmod{P_i\bar{Q}_i}$, $\tilde{z}_i \equiv 0 \pmod{\bar{P}_i Q'_i}$. Определим элементы b'_i и $\bar{b}'_i$ следующим образом:

$$\begin{pmatrix} b'_i \\ \bar{b}'_i \end{pmatrix} = A_i \begin{pmatrix} b_i \\ \bar{b}_i \end{pmatrix}.$$

Тогда очевидно, что

$$\begin{pmatrix} b_i \\ \bar{b}_i \end{pmatrix} = A_i^{-1} \begin{pmatrix} b'_i \\ \bar{b}'_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{t}_i & -\tilde{y}_i \\ -\tilde{z}_i & \tilde{x}_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b'_i \\ \bar{b}'_i \end{pmatrix}.$$

Обозначим через x_i, y_i, z_i, t_i следующие числа:

$$x_i = \frac{\tilde{x}_i}{q_i}, \quad y_i = \frac{\tilde{y}_i Q_i}{\bar{Q}'_i}, \quad z_i = \frac{\tilde{z}_i \bar{Q}'_i}{Q_i}, \quad t_i = q_i \tilde{t}_i. \tag{9.2}$$

Из определения чисел $\tilde{x}_i$, $\tilde{y}_i$, $\tilde{z}_i$, $\tilde{t}_i$ следует, что числа (9.2) целые. Имеем теперь

$$Q'_i b'_i = x_i Q_i b_i + y_i \bar{Q}_i \bar{b}_i = (x_i a_i + y_i \bar{a}_i) + (x_i u_i + y_i \bar{u}_i),$$
$$\bar{Q}'_i \bar{b}'_i = z_i Q_i b_i + t_i \bar{Q}_i \bar{b}_i = (z_i a_i + t_i \bar{a}_i) + (z_i u_i + t_i \bar{u}_i).$$

Положим

$$\begin{pmatrix} a'_i \\ \bar{a}'_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i & y_i \\ z_i & t_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_i \\ \bar{a}_i \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} u'_i \\ \bar{u}'_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i & y_i \\ z_i & t_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i \\ \bar{u}_i \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$Q'_i b'_i = a'_i + u'_i, \tag{9.3}$$
$$\bar{Q}'_i \bar{b}'_i = \bar{a}'_i + \bar{u}'_i. \tag{9.4}$$

Поскольку $x_i t_i - y_i z_i = \tilde{x}_i \tilde{t}_i - \tilde{y}_i \tilde{z}_i = 1$, элементы a_i, $\bar{a}_i$ также являются целочисленными линейными комбинациями a'_i, $\bar{a}'_i$:

$$\begin{pmatrix} a_i \\ \bar{a}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_i & -y_i \\ -z_i & x_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'_i \\ \bar{a}'_i \end{pmatrix}. \tag{9.5}$$

Наконец, y_i делится на P_i, а z_i — на $\bar{P}_i$, поэтому из однотипности по модулю $(P_i, \bar{P}_i)$ пар (U_i, u_i), $(\bar{U}_i, \bar{u}_i)$ следует существование таких групп U'_i (изоморфной U_i) и $\bar{U}'_i$ (изоморфной $\bar{U}_i$), что $U_i + \bar{U}_i = U'_i + \bar{U}'_i$ и $u'_i \in U'_i$, $\bar{u}'_i \in \bar{U}'_i$. Ясно, что $V_i + \bar{V}_i = V'_i + \bar{V}'_i$, где V'_i — группа, порожденная подгруппами U'_i, $\langle h^{-\infty}a'_i\rangle$ и элементом b'_i, удовлетворяющим соотношению (9.3), а $\bar{V}'_i$ — группа, порожденная подгруппами $\bar{U}'_i$, $\langle h^{-\infty}\bar{a}'_i\rangle$ и элементом $\bar{b}'_i$, удовлетворяющим соотношению (4). Неразложимость V'_i и $\bar{V}'_i$ следует из леммы 6. Лемма 8 доказана.

Замечание. Ввиду условия г) предложения 5 можно считать, что числа $\tilde{x}_i$, $\tilde{y}_i$, $\tilde{z}_i$, $\tilde{t}_i$, используемые в доказательстве леммы 8, удовлетворяют более сильным ограничениям:

$$\tilde{x}_i \equiv 0 \pmod{q_i}, \ \tilde{y}_i \equiv 0 \pmod{P_i\bar{Q}_iQ'_1},$$
$$\tilde{z}_i \equiv 0 \pmod{\bar{P}_iQ'_iQ'_1}, \ t_i \equiv 0 \pmod{\bar{Q}'_1}.$$

Доказательство предложения 5. По лемме 7 существуют целые числа $\tilde{x}_1 \equiv 0 \pmod{q_1}$, $\tilde{y}_1 \equiv 0 \pmod{P_1}$, $\tilde{z}_1 \equiv 0 \pmod{Q'_1\bar{P}_1}$ такие, что определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 & \tilde{y}_1 \\ \tilde{z}_1 & \tilde{t}_1 \end{pmatrix}$$

равен 1. Определим элементы b_1^*, $\bar{b}_1^*$:

$$\begin{pmatrix} b_1^* \\ \bar{b}_1^* \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} b_1 \\ \bar{u}_1 \end{pmatrix}.$$

Обозначим через x_1, y_1, z_1, t_1 следующие числа (целые, как следует из определения $\tilde{x}_1$, $\tilde{y}_1$, $\tilde{z}_1$, $\tilde{t}_1$):

$$x_1 = \frac{\tilde{x}_1}{q_1}, \quad y_1 = Q'_1\tilde{y}_1, \quad z_1 = \frac{\tilde{z}_1}{Q'_1}, \quad t_1 = q_1\tilde{t}_1 \tag{9.6}$$

(ясно, что $x_1t_1 - y_1z_1 = \tilde{x}_1\tilde{t}_1 - \tilde{y}_1\tilde{z}_1 = 1$). Тогда

$$Q'_1b_1^* = x_1Q_1b_1 + y_1\bar{u}_1 = x_1a_1 + (x_1u_1 + y_1\bar{u}_1),$$
$$\bar{Q}'_1\bar{b}_1^* = z_1Q_1b_1 + t_1\bar{u}_1 = z_1a_1 + (z_1u_1 + t_1\bar{u}_1).$$

Положим $u'_1 = x_1u_1 + y_1\bar{u}_1$, $\bar{u}'_1 = z_1u_1 + t_1\bar{u}_1$. Из однотипности по модулю $(P_1, \bar{P}_1)$ пар (U_1, u_1), $(\bar{U}_1, \bar{u}_1)$ и того, что y_1 делится на P_1, а z_1 делится на $\bar{P}_1$, как и при доказательстве леммы 8 получаем, что существуют такие группы U'_1, $\bar{U}'_1$, изоморфные соответственно U_1 и $\bar{U}_1$, что $U'_1 + \bar{U}'_1 = U_1 + \bar{U}_1$ и $u'_1 \in U'_1$, $\bar{u}'_1 \in \bar{U}'_1$. Далее, из (9.1) и (9.5) получаем

$$a_1 = g_2a_2 + \ldots + g_sa_s + g_{s+1}a_{s+1} + \ldots + g_ta_t = g_2(t_2a'_2 - y_2\bar{a}'_2) + \ldots$$
$$\ldots + g_s(t_sa'_s - y_s\bar{a}'_s) + g_{s+1}a_{s+1} + \ldots + g_ta_t =$$
$$= (g_2t_2a'_2 + \ldots + g_st_sa'_s + g_{s+1}a_{s+1} + \ldots + g_ta_t) -$$
$$-(g_2y_2\bar{a}'_2 + \ldots + g_sy_s\bar{a}'_s) = a'_1/x_1 + \bar{a}'_1/z_1,$$

где

$$a'_1 = x_1g_2t_2a'_2 + \ldots + x_1g_st_sa'_s + x_1g_{s+1}a_{s+1} + \ldots + x_1g_ta_t, \tag{9.7}$$
$$\bar{a}'_1 = -z_1g_2y_2\bar{a}'_2 - \ldots - z_1g_sy_s\bar{a}'_s. \tag{9.8}$$

Будем считать, что числа $\tilde{x}_i$, $\tilde{y}_i$, $\tilde{z}_i$, $\tilde{t}_i$ $(2 \leqslant i \leqslant s)$ удовлетворяют условиям, сформулированным в замечании после леммы 8. Тогда из (9.2) следует, что $y_2, \ldots, y_s$ делятся на Q'_1, а $t_2, \ldots, t_s$ делятся на $\bar{Q}'_1 = q_1$. Отсюда и из условия в) доказываемого предложения немедленно получаем, что все коэффициенты в выражении (9.7) для a'_1 делятся на $\bar{Q}'_1$, а все коэффициенты в выражении (9.8) для $\bar{a}'_1$ делятся на Q'_1. Положим

$$b'_1 = b^*_1 - \frac{x_1\bar{a}'_1}{z_1\bar{Q}'_1}, \quad \bar{b}'_1 = \bar{b}^*_1 - \frac{z_1a'_1}{x_1\bar{Q}'_1}.$$

Из того, что

$$a_1 = \frac{a'_1}{x_1} + \frac{\bar{a}'_1}{z_1},$$

следует

$$Q'_1b'_1 = Q'_1b^*_1 - x_1\frac{\bar{a}'_1}{z_1} = x_1a_1 - \frac{x_1\bar{a}'_1}{z_1} + u'_1 = a'_1 + u'_1,$$

$$\bar{Q}'_1\bar{b}'_1 = \bar{Q}'_1\bar{b}^*_1 - z_1\frac{a'_1}{x_1} = z_1a_1 - \frac{z_1a'_1}{x_1} + \bar{u}'_1 = \bar{a}'_1 + \bar{u}'_1.$$

Обозначим через V'_1 группу, порожденную подгруппами U'_1, $\langle h^{-\infty}a'_1\rangle$ и элементом b'_1 таким, что $Q'_1b'_1 = a'_1 + u'_1$. Аналогично через $\bar{V}'_1$ обозначим группу, порожденную подгруппами $\bar{U}'_1$, $\langle h^{-\infty}\bar{a}'_1\rangle$ и элементом $\bar{b}'_1$, для которого выполнено соотношение $\bar{Q}'_1\bar{b}'_1 = \bar{a}'_1 + \bar{u}'_1$. Далее, через B' обозначим группу, порожденную всеми подгруппами $V'_1, \ldots, V'_s, V_{s+1}, \ldots, V_t$, а через $\bar{B}'$ — группу, порожденную подгруппами $\bar{V}'_1, \ldots, \bar{V}'_s$. Ясно, что

$$B + \bar{U}_1 + \bar{V}_2 + \ldots + \bar{V}_s = B' + \bar{B}'.$$

Покажем, что B' и $\bar{B}'$ — цветкообразные группы. Для этого достаточно проверить, что коэффициенты $x_1g_2t_2, \ldots, x_1g_st_s, x_1g_{s+1}, \ldots, x_1g_t$ в единственном соотношении (9.7) между элементами групп $V'_1, \ldots, V'_s, V_{s+1}, \ldots, V_t$ таковы, что $Q'_1, x_1g_2t_2Q'_2, \ldots, x_1g_st_sQ'_s, x_1g_{s+1}Q_{s+1}, \ldots, x_1g_tQ_t$ взаимно просты в совокупности, и аналогичное утверждение выполняется для коэффициентов единственного соотношения (9.8) между элементами групп $\bar{V}'_1, \ldots, \bar{V}'_s$: надо, чтобы числа $\bar{Q}'_1$, $z_1g_2y_2\bar{Q}_2, \ldots, z_1g_sy_sQ'_s$ были взаимно просты в совокупности.

Проверим первое утверждение. Пусть p — простой делитель Q'_1. Из равенства $\tilde{x}_1\tilde{t}_1 - \tilde{y}_1\tilde{z}_1 = 1$ и того, что $\tilde{z}$ делится на Q'_1, следует, что $\tilde{x}_1$, а значит и $x_1 = \tilde{x}_1/q_1$ не делится на p. Далее, из равенства $x_it_i - y_iz_i = 1$ и того, что $\tilde{z}_i$, а значит и $z_i = \tilde{z}_i\bar{Q}'_i/Q_i$ делится на Q'_1, следует, что t_i не делится на p $(2 \leqslant i \leqslant s)$. Поскольку среди чисел $g_2, \ldots, g_t$ хотя бы одно не делится на p, то хотя бы одно из чисел $x_1g_2t_2, \ldots, x_1g_st_s, x_1g_{s+1}, \ldots, x_1g_t$ не делится на p. Этим заканчивается проверка первого утверждения, так как p является делителем Q_1, Q'_i является делителем Q_i $(2 \leqslant i \leqslant s)$, а числа $Q_1, g_2Q_2, \ldots, g_tQ_t$ взаимно просты в совокупности по условию (смотри текст перед формулировкой предложения 5).

Второе утверждение проверяется аналогично. Пусть p — простой делитель $q_1 = \bar{Q}'_1$. Поскольку $g_{s+1}, \ldots, g_t$ делятся на q_1, получаем, что среди чисел $g_2, \ldots, g_s$ найдется не делящееся на p. Далее, из того, что $\tilde{x}_1\tilde{t}_1 - \tilde{y}_1\tilde{z}_1 = 1$ и $\tilde{x}_1$ делятся на q_1, вытекает, что число $\tilde{z}_1$, а с ним и $z_1 = \tilde{z}_1/Q'_1$ не делятся на p. Из равенства $x_it_i - y_iz_i = 1$ и того, что t_i делится на $Q'_1 = q_1$, следует, что y_i не делится на p $(z \leqslant i \leqslant s)$. Значит, если g_i не делится на p, то и $z_1g_iy_i$ тоже не делится на p. Из условия 3 и того, что p делит Q_1, q_i делит Q_i, а Q_i взаимно просто с Q_1 (см. условие 2), сразу получаем, что второе утверждение также верно.

Цветкообразные группы B', $\bar{B}'$ неразложимы, так как по предположениям предложения 5 любые собственные подмножества множеств их определяющих индексов $Q'_1, \ldots, Q'_s, Q_{s+1}, \ldots, Q_t$ и $\bar{Q}'_1, \ldots, \bar{Q}'_s$ имеют нетривиальный общий делитель. Предложение 5 доказано.

Замечание. Условие $t_i \equiv 0 \pmod{q_1}$ использовалось дважды — для обеспечения делимости на q_1 всех коэффициентов в выражении для a'_1 и при доказательстве цветкообразности группы $\bar{B}'$. Если $s>2$, то для t_s это условие можно заменить на условие $g_s\equiv 0 \pmod{q_1}$. В самом деле, в выражении (9.7) соответствующий коэффициент $x_1g_st_s$, очевидно, будет делиться на q_1. Доказательство неразложимости сохранится с той лишь оговоркой, что число $z_1g_iy_i\bar{Q}'_i$, не делящееся на p (p — простой делитель q_1), найдется среди чисел $z_1g_2y_2\bar{Q}'_2, \ldots$ $\ldots, z_1g_{s-1}y_{s-1}\bar{Q}'_{s-1}$, поскольку $g_s, g_{s+1}, \ldots, g_t$ окажутся делящимися на p. Более того, в этом случае (при $s>2$) по лемме 7 можем считать, что $\tilde{t}_s=1$, $t_s=q_s$. Аналогично для других $i>2$ можем считать, что $\tilde{t}_i=q_1$, $t_i=q_1q_i$.

Доказательство предложения 6. Построение групп B', $\bar{B}'$ и доказательство цветкообразности B' осуществляется рассуждениями доказательства предложения 5, в которых, считая $\bar{U}_1$ нулевой группой, надо положить $s=2$, $\bar{Q}_2=1$, $q_1=1$, $\tilde{x}_1=\tilde{t}_1=1$, $\tilde{y}_1=\tilde{z}_1=0$. Получившаяся группа $\bar{B}'$ совпадает с $\bar{V}'_2$, которая неразложима по лемме 6.

Доказательство предложения 7. Выберем числа x_i, y_i, z_i, t_i так же, как при доказательстве предложения 5, с единственным отличием — мы считаем $t_s=q_s$, $t_{s-1}=q_{s-1}q_1$ (см. замечание к доказательству предложения 5). Тогда t_{s-1}, t_s взаимно просты, и t_s, $\bar{Q}_{s-1}$ также взаимно просты по условию. Поэтому найдутся такие d, l, r, что числа $z_{s-1}+\bar{Q}_{s-1}t_{s-1}l$, $z_s-\bar{Q}_{s-1}t_{s-1}r$, $1+\bar{Q}_{s-1}t_{s-1}d$ делятся на t_s; соответствующие частные обозначим l_1, r_1, d_1. Построение групп B', $\bar{B}'$ и доказательство того, что B' — цветкообразная неразложимая группа, осуществляются рассуждениями доказательства предложения 5, в которых надо положить $\bar{Q}_s=1$, $\bar{a}_s=l_1a_{s-1}-r_1a_s+d_1\bar{a}_{s-1}$, а вместо элемента $\bar{a}_{s-1}$ использовать элемент $\tilde{a}_{s-1}=\bar{a}_{s-1}+(la_{s-1}+ra_s+d\bar{a}_{s-1})\bar{Q}_{s-1}\equiv\bar{a}_{s-1} \pmod{\bar{Q}_{s-1}}$. Тогда оказывается, что $\bar{a}'_s=\tilde{a}'_{s-1}$ (по равенству (9.5)), и группа $\bar{B}'$ получается из группы, построенной в предложении 5, наложением соотношения $\bar{a}'_s=\tilde{a}'_{s-1}$.

Докажем неразложимость $\bar{B}'$. Группа $\bar{B}'$ содержит вполне характеристическую неразложимую подгруппу $\bar{U}'_s$, фактор-группа по которой — неразложимая цветкообразная группа, получающаяся по предложению 5 как второе слагаемое в разложении группы $B+\bar{U}_1+V_2+\ldots+V_{s-1}$ в прямую сумму двух неразложимых цветкообразных групп, если в качестве $\bar{a}_{s-1}$ взять элемент $\tilde{a}_{s-1}$. Поэтому в любом нетривиальном разложении $\bar{B}'$ в прямую сумму неразложимых групп одно из слагаемых равно $\bar{U}'_s$. Но по лемме 6 группа $\bar{U}'_s$ не выделяется прямым слагаемым даже из подгруппы $\bar{V}'_s\subset\bar{B}'$. Предложение 7 доказано.

Мы получим предложение 4, если в предложениях 5, 6, 7 считать, что все лепестки цветкообразных групп являются ЛГ-группами, и заметить, что две ЛГ-группы с одинаковыми первыми вершинами и индексами вполне характеристических разложимых подгрупп, равными соответственно Q, Q', как лепестки однотипны с модулем однотипности (Q, Q').

На этом доказательство достаточности условий теоремы, сформулированной во введении, завершается.

Литература

[1] **Благовещенская Е. А.** О прямых разложениях абелевых групп без кручения конечного ранга // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. **1983**. Т. 132. С. 17—25.

[2] **Благовещенская Е. А., Яковлев А. В.** О прямых разложениях абелевой группы конечного ранга без кручения // Тез. сообщ. XVIII Всесоюзн. алгебр. конф. Ч. 1. Кишинев, 1985. С. 55.

[3] **Фукс Л.** Бесконечные абелевы группы. М.: Мир, **1974**. Т. 1. 335 с.; **1977**. Т. 2. 416 с.

[4] **Яковлев А. В.** О прямых разложениях абелевых групп конечного ранга без кручения // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. **1987**. Т. 160. С. 272—285.

Политехнический институт
им. М. И. Калинина
Ленинград

Ленинградский государственный
университет

Поступила 27 июня 1988 г.