УДК 515.12

Е. В. Моисеев

ПСЕВДОГРАНИЦЫ ПРОСТРАНСТВ λX, NX, GX, $\mathrm{Gr}\,X$

Для бикомпакта X пространством максимальных сцепленных систем λX, полных сцепленных систем NX, гиперпространств включения GX и роста GrX называются подпространства $\exp^2 X$ (в работе рассматриваются только хаусдорфовы пространства). Точками λX являются системы, максимальные относительно условия сцепленности [1]. Система называется сцепленной, если любые два ее элемента пересекаются. Точками NX будут сцепленные системы, удовлетворяющие дополнительно условию полноты: если $A \supset B \in \xi$, $\xi \in NX$, то $A \in \xi$ [2]. Точки GX — системы, удовлетворяющие только условию полноты [3]. Пространство $\mathrm{Gr}\,X$ образуют гиперпространства роста — системы, удовлетворяющие свойству: если $A \supset B \in \xi \in \mathrm{Gr}\,X$ и A всеми компонентами связности пересекается с B, то $A \in \xi$ [3]. Справедлива цепочка включений

$$X \subset \lambda X \subset NX \subset GX \subset \mathrm{Gr}\,X \subset \exp^2 X.$$

В работах [2—4] показано, что λX, NX, GX гомеоморфны гильбертову кирпичу Q тогда и только тогда, когда X — невырожденный метризуемый континуум, а $\mathrm{Gr}\,X$ гомеоморфно Q, когда X — невырожденный континуум Пеано. Ниже будут описаны подмножества этих пространств, которые с помощью гомеоморфизма переходят на псевдограницу куба

$$\mathrm{Bd}\,Q = \{x \in Q \mid \exists\, i \in N\colon |x_i| = 1\}.$$

Обозначения, используемые во всех теоремах: X — топологическое пространство; $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ — возрастающая последовательность замкнутых подмножеств X, $A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$; если $B \subset X$, то $B_\lambda^+ = \{\xi \in \lambda X \mid \exists\, F \in \xi,\ F \subset A\}$; соответственно определяются B_N^+, B_G^+, B_{Gr}^+; $B_N^- = \{\xi \in NX \mid F \in \xi \Rightarrow B \cap F \neq \varnothing\}$; аналогично определяются B_G^-, B_{Gr}^-. Заметим, что если $B \in \exp X$, то $B_\lambda^+ = B_\lambda^-$, $B_N^+ \subset B_N^-$.

Теорема 1. *Следующие условия эквивалентны:*

1. *X — невырожденный метризуемый континуум, A и $X \setminus A$ плотны в X;*

2. $\left(\lambda X,\ \bigcup\limits_{i=1}^{\infty},\ A_{i\lambda}^+\right) \cong (Q,\ \mathrm{Bd}\,Q)$;

3. $\left(NX,\ \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_{iN}^+\right) \cong (Q,\ \mathrm{Bd}\,Q)$;

4. $\left(GX,\ \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_{iG}^+\right) \cong (Q,\ \mathrm{Bd}\,Q)$;

5. $\left(NX,\ \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_{iN}^-\right) \cong (Q,\ \mathrm{Bd}\,Q)$;

6. $\left(GX,\ \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_{iG}^-\right) \cong (Q,\ \mathrm{Bd}\,Q)$.

Теорема 2. *Следующие условия эквивалентны:*

1. *X — невырожденный континуум Пеано, A и $X\setminus A$ плотны в X;*

2. $\left(\operatorname{Gr} X, \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A^{+}_{i\,\mathrm{Gr}}\right) \cong (Q, \operatorname{Bd} Q)$;

3. $\left(\operatorname{Gr} X, \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A^{-}_{i\,\mathrm{Gr}}\right) \cong (Q, \operatorname{Bd} Q)$.

Доказательство теорем.

Импликации $2\Rightarrow 1$, $3\Rightarrow 1$ обеих теорем и импликации $4\Rightarrow 1$, $5\Rightarrow 1$ теоремы 1 доказываются следующим образом.

а. Пусть A не плотно в X, т. е. существует непустое открытое множество $O\subset X\setminus A$. Положим

$$O^{+}=\{\eta\in \exp^2 X \mid F\in\eta \Rightarrow F\cap O\neq\varnothing\},\quad O^{-}=\{\eta\in\exp^2 X \mid \exists\, F\in\eta : F\subset O\}.$$

Это открытые подмножества второй экспоненты. Так как $O^{+}\cap\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A^{+}_{i\,\mathrm{Gr}}\right)=\varnothing$ и $O^{-}\cap\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A^{-}_{i\,\mathrm{Gr}}\right)=\varnothing$, а $O^{+}\cap O^{-}\cap\lambda X\neq\varnothing$, то соответствующие объединения не плотны в соответствующих пространствах (например, $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A^{-}_{iN}$ не плотно в NX).

б. Пусть A имеет непустую внутренность, тогда найдется номер n и открытое в X непустое множество $O\subset A_n$. Очевидным образом будут верны следующие соотношения:

1. $O^{+}\cap\lambda X\subset A^{+}_{n\lambda}$,
2. $O^{+}\cap NX\subset A^{+}_{nN}$,
3. $O^{+}\cap GX\subset A^{+}_{nG}$,
4. $O^{+}\cap \operatorname{Gr} X\subset A^{+}_{n\,\mathrm{Gr}}$,
5. $O^{-}\cap NX\subset A^{-}_{nN}$,
6. $O^{-}\cap GX\subset A^{-}_{nG}$,
7. $O^{-}\cap \operatorname{Gr} X\subset A^{-}_{n\,\mathrm{Gr}}$,

где все пересечения не пусты.

Следовательно, соответствующие объединения будут иметь непустую внутренность (например, $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A^{-}_{iN}$ в NX).

Таким образом, в одну сторону импликации проверены.

В доказательствах импликаций $1\rightleftarrows 2$, $1\rightleftarrows 3$ теорем 1 и 2 и импликаций $1\Rightarrow 4$, $1\Rightarrow 5$, $1\Rightarrow 6$ теоремы 1 существенную роль играет следующая

Лемма (Круненберг [5]). *Предположим, что M — σ-компактное подмножество Q, такое, что*

1) *для любого $\varepsilon>0$ существует непрерывное отображение $h: Q\to Q\setminus M$, такое, что $d(h, \mathrm{id}_Q)<\varepsilon$;*

2) *M является объединением компактных подмножеств $M_1\subset M_2\subset\ldots$, таких, что каждое M_i гомеоморфно Q; M_i является Z-множеством в M_{i+1} и для любого $\varepsilon>0$ существуют номер i и непрерывное отображение $h: Q\to M_i$, такие, что $d(h, \mathrm{id}_Q)<\varepsilon$.*

Тогда существует автогомеоморфизм Q, который переводит M на $\operatorname{Bd} Q$.

Ниже будет приведено подробное доказательство импликации $1\Rightarrow 2$ теоремы 1; доказательства других импликаций идейно повторяют данное, а технически даже проще.

Предложение 1. *Для любого* $\varepsilon>0$ *существует непрерывное отображение* $h:\lambda X\to\lambda X\setminus\bigcup_{i=1}^{\infty}A_{i\lambda}^{+}$, *такое, что* $d(h, \mathrm{id}_{\lambda X})<\varepsilon$.

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon>0$ и выберем в X конечную ε-сеть E, не пересекающуюся с A. Тогда в качестве h можно использовать отображение ближайшей точки ван де Вэла [6], которое в данном случае определяется так:

произвольной системе $\xi\in\lambda X$ соответствует система $\eta\in\lambda X$, которая содержит E и все $F\in\xi$, такие, что $F\cap E\neq\varnothing$.

Система η определена однозначно, а отображение h непрерывно (см. [6]). Используя метрику Хаусдорфа второй экспоненты на λX, легко показать, что $d(h, id_{\lambda X})<\varepsilon$. Предложение 1 доказано.

Если A_i — не одноточечное подмножество X, то $A_{i\lambda}^{+}$ гомеоморфно Q по теореме ван де Вэла [7].

Предложение 2. *Если* $A_i\neq A_{i+1}$, *то* $A_{i\lambda}^{+}$ *является* Z*-множеством в* $A^{+}_{i+1\lambda}$.

Доказательство. Пусть A_i удовлетворяют условиям теоремы, тогда найдется для любого $\varepsilon>0$ конечная ε-сеть в X (обозначим ее E), такая, что $E\cap A_i=\varnothing$, $E\cap A_{i+1}\neq\varnothing$. Отображение ближайшей точки h (см. предложение 1) переводит $A^{+}_{i+1\lambda}$ в $A^{+}_{i+1\lambda}\setminus A^{+}_{i\lambda}$ и $d(h, \mathrm{id}_{\lambda X})<\varepsilon$. Предложение 2 доказано.

Если A плотно в X, то конечные ε-сети можно выбирать как подмножества подходящих A_i, тогда соответствующие отображения ближайшей точки будут ε-сдвигами, переводящими λX в $A_{i\lambda}^{+}$.

Таким образом, все условия леммы, а следовательно, и импликация $1\Rightarrow 2$ теоремы 1 проверены.

В заключение выражаю благодарность научному руководителю профессору В. В. Федорчуку за помощь в написании этой работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Verbeek A. Superextensions of topological spaces//MC tract. N 41. Amsterdam, 1972.
2. Иванов А. В. О пространстве полных сцепленных систем//Сиб. матем. журн. 1986. **27**, № 6. 95—110.
3. Моисеев Е. В. О пространствах замкнутых гиперпространств роста и включения//Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1988. № 3. 54—57.
4. Mill J. van. Superextensions of metrizable continua are Hilbert cube//Fund. Math. 1980. **107**. 201—218.
5. Kroonenberg N. Pseudo-interiors of hyperspaces//Compos. math. 1976. **32**. 113—131.
6. Vel M. van de. The fixed point property of superextensions//General Topol. and Relat. Modern. Analys. and Algebra: Proc. 4th Prague Topol. Symp. 1976. Part B. Prague, 1977. 477—480.
7. Vel M. van de. Convex Hilbert cubes in superextensions//Topol. Appl. 1986. **22**, N 3. 255—266.

Поступила в редакцию
04.07.88