Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

S. Ya. Al'per, On the best mean first-degree approximation of analytic functions on circles, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1963, Volume 153, Number 3, 503–506

https://www.mathnet.ru/eng/dan28837

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
https://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 18.97.14.81
January 16, 2026, 04:09:32

Доклады Академии наук СССР
1963. Том 153, № 3

МАТЕМАТИКА

С. Я. АЛЬПЕР

О НАИЛУЧШЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В СРЕДНЕМ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ НА ОКРУЖНОСТИ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 6 V 1963)

1°. Мы рассмотрим вопрос об определении точного и асимптотического значений для наилучшего приближения в метрике L на окружности $|z=1|$ аналитических функций $\frac{1}{z-a}$, $\ln(z-a)$, $(z-a)^s$ и других функций полиномами степени n. Для наилучшего приближения указанных функций в метрике L на отрезке $[-1, +1]$ вещественной оси при вещественном a такой вопрос изучался в работах С. М. Никольского ([1]), Н. И. Ахиезера ([2]) и др. Наилучшее приближение в метрике L функции $f(z) \in L$ на окружности $|z| = r$, $0 < r \leqslant 1$, будем обозначать $\rho_n^{(1)}[f, r]$:

$$\rho_n^{(1)}[f, r] = \inf \int\limits_{|z|=r} |f(z) - Q_n(z)| \cdot |dz|$$

по всевозможным полиномам $Q_n(z)$ степени n; $\rho_n^{(1)}[f, 1] = \rho_n^{(1)}[f]$.

Мы будем пользоваться следующим критерием:

Для того чтобы $P_n(z)$ был полиномом наилучшего в метрике L_p, $p \geqslant 1$, приближения степени n функции $f(z) \in L_p$ на спрямляемой кривой Γ *, достаточно и (при $p = 1$ и случае, если разность $f(z) - P_n(z)$ почти всюду на Γ отлична от нуля) необходимо, чтобы для любого полинома $Q_n(z)$ степени n выполнялось равенство

$$\int\limits_{\Gamma} |f(z) - P_n(z)|^{p-1} \operatorname{Re}\{Q_n(z) \operatorname{sign}[\overline{f(z) - P_n(z)}]\}\, dz = 0,$$

где $\operatorname{sign} w = w/|w|$ при $w \neq 0$ и $\operatorname{sign} w = 0$ при $w = 0$.

В случае, когда Γ — отрезок $[-1, +1]$, $f(z)$ — вещественная функция и $p = 1$, этот критерий установлен С. М. Никольским ([3]).

В общем случае этот критерий представляет аналог критерия, установленного А. Ф. Тиманом ([4]) с метрикой L_p, определяемой интегралом по области. В случае, когда $p = 1$ и Γ представляет окружность $|z| = 1$, полином $P_n(z)$ степени n осуществляет наилучшее приближение, если выполняется равенство

$$\int\limits_{|z|=1} \bar{z}^m \frac{f(z) - P_n(z)}{|f(z) - P_n(z)|} |dz| = 0 \tag{1}$$

для всех $m = 0, 1, 2, \ldots, n$.

2°. Исходным пунктом является определение величины $\rho_n^{(1)}\left[\frac{1}{z-a}\right]$, $a| \neq 1$.

Рассмотрим тождество

$$\frac{1}{z-a} - P_n(z) = M \frac{1 + \bar{a}z + \bar{a}^2 z^2 + \ldots + \bar{a}^{n+1} z^{n+1}}{z-a}, \tag{2}$$

---

* Условие $f(x) \in L_p$ на Γ означает, что $\int\limits_{\Gamma} |f(z)|^p |dz| < \infty$.

в котором $P_n(z)$ — полином степени n и число M определяется из условия, что вычет правой части в точке $z = a$ равен 1, $M = (|a|^2 - 1)(|a|^{2n+4} - 1)^{-1}$. Покажем, что $P_n(z)$ — полином наилучшего в метрике L приближения на окружности $|z| = 1$ для функции $\frac{1}{z-a}$. Умножая числитель и знаменатель правой части (2) на $\bar{z} - \bar{a}$, где $|z| = 1$, представим эту формулу в виде

$$\frac{1}{z-a} - P_n(z) = M \frac{\bar{z} - \bar{a}^{n+2} z^{n+1}}{1 - 2|a|\cos(\vartheta - \alpha) + |a|^2},$$

где $z = e^{i\vartheta}$, $a = |a| e^{i\alpha}$. Отсюда находим

$$\left|\frac{1}{z-a} - P_n(z)\right| = M \frac{\sqrt{1 - 2|a|^{n+2}\cos(n+2)(\vartheta - \alpha) + |a|^{2n+4}}}{1 - 2|a|\cos(\vartheta - \alpha) + |a|^2}.$$

Согласно условию (1) достаточно показать, что интеграл

$$\int_0^{2\pi} \frac{\bar{z}^{n+1} - \bar{a}^{n+2} z^{n+1-m}}{\sqrt{1 - 2|a|^{n+2}\cos(n+2)(\vartheta - \alpha) + |a|^{2n+1}}} d\vartheta \tag{3}$$

обращается в нуль для всех $m = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Заметим, что для $k = 1, 2, \ldots, n+1$ выполняется равенство

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos k\varphi}{\sqrt{1 - 2c\cos(n+2)\varphi + c^2}} d\varphi = 0, \tag{4}$$

где c — любое число > 0 и $\neq 1$. Действительно, это следует из разложения в ряд Фурье

$$(1 - 2c\cos\varphi + c^2)^{-1/2} = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \cos m\varphi,$$

в котором φ заменено величиной $(n+2)\varphi$. Из (4) следует обращение в нуль интеграла (3) при $m = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Таким образом, $P_n(z)$ — полином наилучшего приближения и справедлива при $|a| \neq 1$ формула

$$\rho_n^{(1)}\left[\frac{1}{z-a}\right] = \frac{|a|^2 - 1}{|a|^{2n+4} - 1} = \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{1 - 2|a|^{n+2}\cos(n+2)\vartheta + |a|^{2n+4}}}{1 - 2|a|\cos\vartheta + |a|^2} d\vartheta. \tag{5}$$

Из формулы (5) при $|a| > 1$ вытекает асимптотическая формула

$$\rho_n^{(1)}\left[\frac{1}{z-a}\right] \sim \frac{2\pi}{|a|^{n+2}}. \tag{6}$$

При $|a| < 1$ из (5) следует

$$\lim_{n\to\infty} \rho_n^{(1)}\left[\frac{1}{z-a}\right] = 2\pi. \tag{7}$$

В частности, $\rho_n^{(1)}[z^{-1}] = 2\pi$, а полиномом наилучшего приближения в среднем 1-й степени является тождественный нуль.

3°. Аналогичным методом можно найти $\rho_n^{(1)}\left[\frac{z}{z^p - a^p}\right]$, где p — натуральное число > 1, s равно одному из чисел $0, 1, 2, \ldots, p-1$ и $|a| \neq 1$.

С этой целью доказывается тождество

$$\frac{z^s}{z^p - a^p} - Q_n(z) = \frac{|a|^{2p} - 1}{|a|^{2p(k+2)} - 1} H(z), \tag{8}$$

в котором $Q_n(z)$ — некоторый полином степени n; n — любое число вида $kp+s$ (k — целое $\geqslant 0$) и

$$H(z)=\frac{z^s[1+\bar{a}^p z^p+\bar{a}^{2p}z^{2p}+\ldots+\bar{a}^{(k+1)p}z^{(k+1)p}]}{z^p-a^p}.$$

Из тождества (8) получается формула

$$\rho_n^{(1)}\left[\frac{z^s}{z^p-a^p}\right]=\frac{|a|^{2p}-1}{|a|^{2p(k+2)}-1}\int_0^{2\pi}\frac{\sqrt{1-2|a|^{p(k+2)}\cos(k+2)p\vartheta+|a|^{2p(k+2)}}}{1-2|a|^p\cos p\vartheta+|a|^{2p}}d\vartheta, \quad (9)$$

справедливая для числа $n=kp+s$, а также для $kp+s+1,\ldots$ $\ldots, kp+s+p-1$; $Q_n(z)$ будет полиномом наилучшего приближения в среднем степени $n, n+1,\ldots, n+p-1$. При $|a|>1$ из (9) получается асимптотическая формула

$$\rho_n^{(1)}\left[\frac{z^s}{z^p-a^p}\right]\sim\frac{2\pi}{|a|^{p(k+2)}}$$

при $k\to\infty$ и $n=kp+s, kp+s+1,\ldots, kp+s+p-1$. При $|a|<1$ получим

$$\lim_{n\to\infty}\rho_n^{(1)}\left[\frac{z^s}{z^p-a^p}\right]=2\pi.$$

В частности, при $a=0$, $s=0$ будем иметь $\rho_n^{(1)}[1/z^p]=2\pi$.

4°. Исходя из тождества (2), с помощью интегрирования по параметру a (считая сначала a вещественным, $a>1$), можно получить асимптотическую формулу

$$\rho_n^{(1)}[\ln(z-a)]\sim\frac{2\pi}{n|a|^{n+1}}, \quad (10)$$

верную для любого комплексного a с условием $|a|>1$.

5°. Если $f(z)=(a-z)^s$ при вещественном s и $a>1$, то построим полином $P_n(z)$ степени n, совпадающий с $f(z)$ в корнях полинома $R(z)=$ $=1+az+a^2z^2+\ldots+a^{n+1}z^{n+1}$. Тогда

$$(a-z)^s-P_n(z)=\frac{R(z)}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r}\frac{(a-\zeta)^s}{(\zeta-z)R(\zeta)}d\zeta,$$

где $1<r<a$. Считая сначала $s>-1$ и деформируя соответствующим образом контур интегрирования, получим

$$(a-z)^s-P_n(z)=-\frac{(1-a^{n+2}z^{n+2})\sin\pi s}{(1-az)\pi}\int_a^\infty\frac{(x-a)^s(1-ax)}{(x-z)(1-a^{n+2}x^{n+2})}dx.$$

Оценивая интеграл с помощью асимптотической формулы С. Н. Бернштейна ([5]) и используя результат из 2°, получим

$$\rho_n^{(1)}[(z-a^s)]\sim\frac{2\Gamma(s+1)|\sin\pi s|}{n^{s+1}|a|^{n-s+1}}. \quad (11)$$

Эта формула верна при любом комплексном a, $|a|>1$, и любом вещественном s, отличном от нуля и целого положительного числа. Ее можно, полагая $s=-p$, представить в виде

$$\rho_n^{(1)}\left[\frac{1}{(z-a)^p}\right]\sim\frac{2\pi n^{p-1}}{\Gamma(p)|a|^{n+p+1}}. \quad (12)$$

Если

$$f(z) = \sum_{m=1}^{k} \frac{A_m}{(z-a)^m} + \varphi(z),$$

где $|a| > 1$, $A_k \neq 0$ и $\varphi(z)$ аналитична в круге с центром $z = 0$ и радиусом $> |a|$, то

$$\rho_n^{(1)}[f] \sim |A_k| \frac{2\pi n^{k-1}}{(k-1)!\,|a|^{n+k+1}}.$$

Заметим, что предельный переход при $a \to 1$ в формуле (11) (для $s > -1$) или в формуле (10) не может быть выполнен, так как из доказательства этих формул не следует их равномерности по a.

6⁰. Имеет место следующий аналог формулы С. Н. Бернштейна ([7]), доказанной им для равномерного приближения на отрезке $[-1, +1]$:

$$\rho_n^{(1)}[(z-a)^s \Phi(z)] \sim |\Phi(a)|\, \rho_n^{(1)}[(z-a)^s], \tag{13}$$

где $|a| > 1$, s не равно 0 и целому положительному числу и $\Phi(z)$ — аналитическая функция в некотором круге $|z| < R$, $R > |a|$, с условием $\Phi(a) \neq 0$.

7⁰. Пусть $H_1^{(s)}$ обозначает класс всех аналитических в круге $|z| < 1$ функций, для которых

$$\lim_{\rho \to 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f^{(s)}(\rho e^{i\vartheta})|\, d\vartheta \leqslant 1,$$

где s — целое число $\geqslant 0$, $H_1^{(0)} = H_1$. Используя результаты К. И. Бабенко ([7]), можно получить точную формулу для наилучшего приближения в среднем функций класса $H_1^{(s)}$.

Теорема. *Для $0 < r \leqslant 1$ при $n \geqslant s$ справедлива формула*

$$\sup_{f \in H_1^{(s)}} \rho_{n-1}^{(2)}[f, r] = 2\pi r^{n+1} \alpha_{n,s},$$

где

$$\alpha_{n,s} = \frac{1}{n(n-1)\ldots(n-s+1)}$$

при $s > 0$ и $\alpha_{n,0} = 1$.

При $s = 0$ можно получить асимптотическую формулу для величины, фигурирующей в теореме, и $0 < r < 1$, не опираясь на результаты К. И. Бабенко, а используя интегральную формулу Коши и вытекающую из формулы (6) оценку

$$\int_{|z|=r} \left| \frac{1}{\zeta - z} - Q_{n-1}(z, \zeta) \right| \cdot |dz| < 2\pi r^{n+1}(1 + \varepsilon_n)$$

для любого ζ, $|\zeta| = 1$, где $Q_{n-1}(z, \zeta)$ — некоторый полином степени $n-1$ от z, $\varepsilon_n > 0$ и $\lim \varepsilon_n = 0$.

Поступило
3 V 1963

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. М. Никольский, Изв. АН СССР, сер. матем., 11, 139 (1947). [2] Н. И. Ахиезер, Лекции по теории аппроксимации, 1947. [3] С. М. Никольский, Изв. АН СССР, сер. матем., 10, 207 (1946). [4] А. Ф. Тиман, РЖМат, № 4, реф. 2854 (1958). [5] С. Н. Бернштейн, Экстремальные свойства полиномов, 1937. [6] С. Н. Бернштейн, Собр. соч., 2, 1954, стр. 88. [7] К. И. Бабенко, Изв. АН СССР, сер. матем., 22, № 5 (1958).