В. А. Горькавый, Восстановление трехмерных подмногообразий евклидова пространства с большой коразмерностью по грассманову образу, *Матем. заметки*, 1997, том 62, выпуск 5, 694–699

DOI: 10.4213/mzm1656

Математические заметки

том 62 выпуск 5 ноябрь 1997

УДК 514

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ТРЕХМЕРНЫХ ПОДМНОГООБРАЗИЙ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА С БОЛЬШОЙ КОРАЗМЕРНОСТЬЮ ПО ГРАССМАНОВУ ОБРАЗУ

В. А. Горькавый

В статье указаны необходимые и достаточные условия, при которых регулярное трехмерное подмногообразие в многообразии Грассмана $G(m, m+3)$ является грассмановым образом регулярного трехмерного подмногообразия $(m+3)$-мерного евклидова пространства при $m>4$.

Библиография: 6 названий.

Введение. Рассмотрим трехмерную регулярную C^r-гладкую поверхность $F^3 \subset E^{m+3}$, $m \geqslant 5$, $r \geqslant 4$. Поставим в соответствие каждой точке P подмногообразия F^3 его нормальное пространство $N_P F$ в этой точке, рассматриваемое как m-мерное подпространство в E^{m+3}. Образом всей поверхности F^3 при таком соответствии будет множество Γ в многообразии Грассмана $G(m, m+3)$, это множество называется *грассмановым образом подмногообразия* $F^3 \subset E^{m+3}$. В общем случае Γ является C^{r-1}-гладким трехмерным регулярным подмногообразием в $G(m, m+3)$, хотя, вообще говоря, грассманов образ может быть нерегулярным подмногообразием и даже вырождаться в подмногообразие меньшей размерности. Основной целью заметки является рассмотрение следующего вопроса: по заданному грассманову образу $\Gamma \subset G(m, m+3)$ восстановить само подмногообразие $F^3 \subset E^{m+3}$. Эта задача была поставлена впервые Ю. А. Аминовым в [1] и вызвала определенный интерес, однако в настоящий момент она решена только для двумерных регулярных подмногообразий n-мерного евклидова пространства с регулярным двумерным грассмановым образом (см. обзор [2]), для регулярных подмногообразий $F^n \subset E^{m+n}$, $n, m > 1$, с вырожденным в гладкую линию $\Gamma^1 \subset G(m, m+n)$ грассмановым образом [3], [4] и для регулярных подмногообразий $F^n \subset E^{n+2}$, $n > 1$, у которых грассманов образ вырожден в регулярное двумерное подмногообразие $\Gamma^2 \subset G(2, n+2)$ [5]. Мы выясним необходимые и достаточные условия для того, чтобы регулярное трехмерное подмногообразие $\Gamma^3 \subset G(m, m+3)$ было грассмановым образом некоторого $F^3 \subset E^{m+3}$.

Пусть в E^{m+3} введен ортонормированный базис из векторов $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{m+3}$ и соответствующие декартовы координаты $x^1, \dots, x^{m+3}$. Будем считать, что подмногообразие $F^3 \subset E^{m+3}$ задано радиус-вектором $\vec{x} = \vec{x}(v^1, v^2, v^3)$. На многообразии $G(m, m+3)$ можно ввести локальные координаты специального вида. А именно, рассмотрим подпространство $E_0^m \subset E^{m+3}$, натянутое на векторы $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m$; любое подпространство

$E^m \subset E^{m+3}$, которое проектируется на $E_0^m \subset E^{m+3}$ без вырождения, обладает взаимно однозначно определенным базисом из векторов

$$\vec{\varepsilon}_\alpha = \vec{e}_\alpha + \sum_{i=1}^{3} z_\alpha^i \vec{e}_{m+i}, \qquad \alpha = \overline{1,m}.$$

Величины z_α^i как раз и представляют собой локальные координаты на $G(m, m+3)$. Мы будем представлять точку из $G(m, m+3)$ матрицей $z = \|z_\alpha^i\|$ размера $3 \times m$. Грассманов образ $\Gamma^3 \subset G(m, m+3)$ подмногообразия $F^3 \subset E^{m+3}$ описывается тогда в виде $z = z(v^1, v^2, v^3)$, где матричнозначная функция $z(v^1, v^2, v^3)$ является C^{r-1}-гладкой. Обозначая через ∂_i частную производную по v^i, введем в рассмотрение для каждой пары различных $i, j = \overline{1,3}$ матрицу Φ_{ij} размера $6 \times m$, составленную из строк матриц $\partial_i z$, $\partial_j z$.

Лемма 1 (первое необходимое условие на грассманов образ). *Для любой точки z грассманова образа $\Gamma^3 \subset G(m, m+3)$ ранги матриц Φ_{12}, Φ_{23}, Φ_{31} не превосходят 5.*

Обозначим вектор-строки матрицы z через $z^i = \|z_1^i, \dots, z_m^i\|$ и будем рассматривать их как векторы в E^m. Вследствие леммы 1 для любой точки $z \in \Gamma^3$ и для любых различных i, j шесть векторов $\partial_i z^1$, $\partial_i z^2$, $\partial_i z^3$, $\partial_j z^1$, $\partial_j z^2$, $\partial_j z^3$ принадлежат некоторому пятимерному пространству $E_{ij}^5(z) \subset E^m$. Пусть $p_{ij}^{\nu_1 \dots \nu_5}$ – плюккеровы координаты подпространства $E_{ij}^5(z) \subset E^m$. Определим следующие величины:

$$f_{ij}^k(v^1, v^2, v^3) = \sum_{1 \leqslant \nu_1 < \dots < \nu_5 \leqslant m} p_{ij}^{\nu_1 \dots \nu_5} \begin{vmatrix} \partial_i z_{\nu_1}^1 & \dots & \partial_i z_{\nu_5}^1 \\ \partial_i z_{\nu_1}^2 & \dots & \partial_i z_{\nu_5}^2 \\ \partial_i z_{\nu_1}^3 & \dots & \partial_j z_{\nu_5}^3 \\ \partial_j z_{\nu_1}^p & \dots & \partial_j z_{\nu_5}^p \\ \partial_j z_{\nu_1}^q & \dots & \partial_j z_{\nu_5}^q \end{vmatrix},$$

где $1 \leqslant p < q \leqslant 3$, $1 \leqslant i \neq j \leqslant 3$, $1 \leqslant k \leqslant 3$, $k \neq p, q$.

Лемма 2 (второе необходимое условие на грассманов образ). *Пусть в некоторой точке $z \in \Gamma^3$ ранги матриц Φ_{12}, Φ_{23}, Φ_{31} все равны 5. Тогда в данной точке матрица*

$$\Psi = \begin{Vmatrix} -f_{12}^1 & f_{21}^1 & 0 & -f_{12}^2 & f_{21}^2 & 0 & -f_{12}^3 & f_{21}^3 & 0 \\ 0 & -f_{23}^1 & f_{32}^1 & 0 & -f_{23}^2 & f_{32}^2 & 0 & -f_{23}^3 & f_{32}^3 \\ f_{13}^1 & 0 & -f_{31}^1 & f_{13}^2 & 0 & -f_{31}^2 & f_{13}^3 & 0 & -f_{31}^3 \end{Vmatrix}$$

имеет ранг, равный 2, при этом любые две ее строки линейно независимы.

Предположим, что ранги матриц Φ_{12}, Φ_{23}, Φ_{31} тождественно равны 5. Тогда в каждой точке $z \in \Gamma^3$ подпространство $E_{ij}^5(z) \subset E^m$ определено однозначно, и поэтому легко видеть, что все функции f_{ij}^k являются C^{r-2}-гладкими. Рассмотрим вектор-функции

$$\vec{H}_1 = \lambda_1 \|f_{12}^1, -f_{12}^2, f_{12}^3\|, \qquad \vec{H}_2 = \lambda_2 \|f_{23}^1, -f_{23}^2, f_{23}^3\|, \qquad \vec{H}_3 = \lambda_3 \|f_{31}^1, -f_{31}^2, f_{31}^3\|,$$

где

$$\|\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\| \Psi = 0, \qquad \sum_{i=1}^{3} (\lambda_i)^2 = 1.$$

Будем обозначать через '$\wedge$' внешнее произведение, а через $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ – скалярное произведение векторов в трехмерном евклидовом пространстве.

Лемма 3 (третье необходимое условие на грассманов образ). *Выполнено*

1) $(\partial_i\vec H_j-\partial_j\vec H_i)\wedge\vec H_i\wedge\vec H_j\equiv 0$, $1\leqslant i\neq j\leqslant 3$;
2) $\left(\dfrac{\vec H_i\wedge\vec H_j}{|\vec H_i\wedge\vec H_j|},\dfrac{\vec H_i\wedge(\partial_i\vec H_j-\partial_j\vec H_i)}{|\vec H_i\wedge\vec H_j|}\right)=\left(\dfrac{\vec H_i\wedge\vec H_k}{|\vec H_i\wedge\vec H_k|},\dfrac{\vec H_i\wedge(\partial_i\vec H_k-\partial_k\vec H_i)}{|\vec H_i\wedge\vec H_k|}\right)$, $1\leqslant i\neq j\neq k\leqslant 3$;
3) $\partial_i\left(\dfrac{\vec H_j\wedge\vec H_i}{|\vec H_j\wedge\vec H_i|},\dfrac{\vec H_j\wedge(\partial_j\vec H_i-\partial_i\vec H_j)}{|\vec H_j\wedge\vec H_i|}\right)=\partial_j\left(\dfrac{\vec H_i\wedge\vec H_j}{|\vec H_i\wedge\vec H_j|},\dfrac{\vec H_i\wedge(\partial_i\vec H_j-\partial_j\vec H_i)}{|\vec H_i\wedge\vec H_j|}\right)$, $1\leqslant i\neq j\leqslant 3$;
4) $\vec H_1\wedge\vec H_2\wedge\vec H_3$ *не обращается в* 0.

Теорема. *Пусть* C^r*-гладкое,* $r\geqslant 4$*, регулярное трехмерное подмногообразие* $\Gamma^3\subset G(m,m+3)$*, заданное в виде* $z=z(v^1,v^2,v^3)$*, удовлетворяет следующим условиям:*

1) *для любой точки* $z\in\Gamma^3$ *и для любых различных* i, j *ранг матрицы* Φ_{ij} *равен* 5*;*
2) *ранг матрицы* Ψ *тождественно равен* 2 *и любые две строки этой матрицы линейно независимы;*
3) *для вектор-функций* $\vec H_1$, $\vec H_2$, $\vec H_3$ *выполнены условия* 1)–4) *леммы* 3.

Тогда Γ^3 *является грассмановым образом* C^r*-гладкой регулярной поверхности* $F^3\subset E^{m+3}$*, определяемой однозначно с точностью до параллельного переноса и гомотетии в* E^{m+3}*.*

Доказательство утверждений. Докажем сначала необходимые условия на грассманов образ. Подмногообразие $\Gamma\subset G(m,m+3)$, заданное в виде $z=z(v^1,v^2,v^3)$, представляет собой грассманов образ подмногообразия $F^3\subset E^{m+3}$, заданного $\vec x=\vec x(v^1,v^2,v^3)$, тогда и только тогда, когда векторы

$$\vec\varepsilon_\alpha=\vec e_\alpha+\sum_{i=1}^{3}z^i_\alpha(v^1,v^2,v^3)\vec e_{m+i},\qquad \alpha=\overline{1,m},$$

являются нормалями для F^3 в точке с радиус-вектором $\vec x(v^1,v^2,v^3)$. Это эквивалентно тому, что выполняются уравнения

$$\partial_i x^\alpha=-\sum_{k=1}^{3}\partial_i x^{m+k}z^k_\alpha,\qquad i,j=\overline{1,3},\quad \alpha=\overline{1,m}. \tag{1}$$

Записывая условия равенства вторых смешанных производных функций $x^1,\dots,x^m$, получим $3m$ уравнений

$$\sum_{k=1}^{3}\partial_i x^{m+k}\partial_j z^k_\alpha=\sum_{k=1}^{3}\partial_j x^{m+k}\partial_i z^k_\alpha,\qquad i,j=\overline{1,3},\quad \alpha=\overline{1,m},$$

которые можно переписать в виде

$$\|\partial_i x^{m+1},\partial_i x^{m+2},\partial_i x^{m+3},-\partial_j x^{m+1},-\partial_j x^{m+2},-\partial_j x^{m+3}\|\cdot\begin{Vmatrix}\partial_j z^1\\ \partial_j z^2\\ \partial_j z^3\\ \partial_i z^1\\ \partial_i z^2\\ \partial_i z^3\end{Vmatrix}=0. \tag{2}$$

Условие регулярности $F^3 \subset E^{m+3}$ эквивалентно тому, что

$$\operatorname{Det} \begin{Vmatrix} \partial_1 x^{m+1} & \partial_1 x^{m+2} & \partial_1 x^{m+3} \\ \partial_2 x^{m+1} & \partial_2 x^{m+2} & \partial_2 x^{m+3} \\ \partial_3 x^{m+1} & \partial_3 x^{m+2} & \partial_3 x^{m+3} \end{Vmatrix} \neq 0. \tag{3}$$

Учитывая (2) и (3), не сложно получить утверждение леммы 1.

Предположим, что матрицы $\Phi_{12}, \Phi_{23}, \Phi_{31}$ имеют ранги, равные тождественно 5. Аналогично тому, как это было сделано Аминовым в [6], можно показать, что уравнения (2) разрешаются следующим способом: существуют функции $\Lambda_i(v^1, v^2, v^3)$, $i = \overline{1,3}$, такие, что

$$\begin{aligned} &\partial_1 x^{m+1} = \Lambda_1 f^1_{12} = \Lambda_3 f^1_{13}, \quad \partial_1 x^{m+2} = -\Lambda_1 f^2_{12} = -\Lambda_3 f^2_{13}, \quad \partial_1 x^{m+3} = \Lambda_1 f^3_{12} = \Lambda_3 f^3_{13}, \\ &\partial_2 x^{m+1} = \Lambda_1 f^1_{21} = \Lambda_2 f^1_{23}, \quad \partial_2 x^{m+2} = -\Lambda_1 f^2_{21} = -\Lambda_2 f^2_{23}, \quad \partial_2 x^{m+3} = \Lambda_1 f^3_{21} = \Lambda_2 f^3_{23}, \\ &\partial_3 x^{m+1} = \Lambda_2 f^1_{32} = \Lambda_3 f^1_{31}, \quad \partial_3 x^{m+2} = -\Lambda_2 f^2_{32} = -\Lambda_3 f^2_{31}, \quad \partial_3 x^{m+3} = \Lambda_2 f^3_{32} = \Lambda_3 f^3_{31}, \end{aligned} \tag{4}$$

откуда следует, что

$$\|\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3\| \Psi = 0.$$

Из предположения о том, что ранги матриц Φ_{12}, Φ_{23}, Φ_{31} равны 5, легко получить, что ранг матрицы Ψ не меньше 2. Вследствие (3) ни одна из функций Λ_i не обращается в 0, поэтому ранг матрицы Ψ тождественно равен 2 и любые две строки этой матрицы линейно независимы.

Введем следующие обозначения:

$$\Lambda = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} (\Lambda_i)^2}, \qquad \lambda_i = \frac{\Lambda_i}{\Lambda}.$$

Теперь можем переписать (4) в виде

$$\begin{gathered} \partial_1 \|x^{m+1}, x^{m+2}, x^{m+3}\| = \Lambda \vec{H}_1, \qquad \partial_2 \|x^{m+1}, x^{m+2}, x^{m+3}\| = \Lambda \vec{H}_2, \\ \partial_3 \|x^{m+1}, x^{m+2}, x^{m+3}\| = \Lambda \vec{H}_3. \end{gathered} \tag{5}$$

Так как $\Psi \in C^{r-2}$, очевидно, $\vec{H}_i$ можно считать C^{r-2}-гладкими вектор-функциями. Условие равенства смешанных производных функций x^{m+1}, x^{m+2}, x^{m+3} имеет вид

$$\partial_i \Lambda \vec{H}_j - \partial_j \Lambda \vec{H}_i + \Lambda(\partial_i \vec{H}_j - \partial_j \vec{H}_i) = 0, \qquad 1 \leqslant i \neq j \leqslant 3, \tag{6}$$

при этом условие регулярности (3) вследствие (5) эквивалентно следующему:

$$\vec{H}_1 \wedge \vec{H}_2 \wedge \vec{H}_3 \neq 0. \tag{7}$$

Из (6) следует, что

$$(\partial_i \vec{H}_j - \partial_j \vec{H}_i) \wedge \vec{H}_i \wedge \vec{H}_j \equiv 0, \qquad 1 \leqslant i \neq j \leqslant 3. \tag{8}$$

Разрешая (8) в виде

$$\partial_i\vec{H}_j - \partial_j\vec{H}_i = \vec{H}_i\left(\frac{\vec{H}_j\wedge\vec{H}_i}{|\vec{H}_j\wedge\vec{H}_i|}, \frac{\vec{H}_j\wedge(\partial_i\vec{H}_j - \partial_j\vec{H}_i)}{|\vec{H}_j\wedge\vec{H}_i|}\right) + \vec{H}_j\left(\frac{\vec{H}_i\wedge\vec{H}_j}{|\vec{H}_i\wedge\vec{H}_j|}, \frac{\vec{H}_i\wedge(\partial_i\vec{H}_j - \partial_j\vec{H}_i)}{|\vec{H}_i\wedge\vec{H}_j|}\right), \quad 1 \leqslant i \neq j \leqslant 3,$$

и подставляя это выражение в (6), получаем с учетом (7)

$$\partial_i\Lambda = -\Lambda\left(\frac{\vec{H}_i\wedge\vec{H}_j}{|\vec{H}_i\wedge\vec{H}_j|}, \frac{\vec{H}_i\wedge(\partial_i\vec{H}_j - \partial_j\vec{H}_i)}{|\vec{H}_i\wedge\vec{H}_j|}\right), \quad 1 \leqslant i \neq j \leqslant 3. \tag{9}$$

Из (9) немедленно следует, что

$$\left(\frac{\vec{H}_i\wedge\vec{H}_j}{|\vec{H}_i\wedge\vec{H}_j|}, \frac{\vec{H}_i\wedge(\partial_i\vec{H}_j - \partial_j\vec{H}_i)}{|\vec{H}_i\wedge\vec{H}_j|}\right) = \left(\frac{\vec{H}_i\wedge\vec{H}_k}{|\vec{H}_i\wedge\vec{H}_k|}, \frac{\vec{H}_i\wedge(\partial_i\vec{H}_k - \partial_k\vec{H}_i)}{|\vec{H}_i\wedge\vec{H}_k|}\right), \quad 1 \leqslant i \neq j \neq k \leqslant 3. \tag{10}$$

Приравнивая смешанные производные функции Λ, получаем

$$\partial_i\left(\frac{\vec{H}_j\wedge\vec{H}_i}{|\vec{H}_j\wedge\vec{H}_i|}, \frac{\vec{H}_j\wedge(\partial_j\vec{H}_i - \partial_i\vec{H}_j)}{|\vec{H}_j\wedge\vec{H}_i|}\right) = \partial_j\left(\frac{\vec{H}_i\wedge\vec{H}_j}{|\vec{H}_i\wedge\vec{H}_j|}, \frac{\vec{H}_i\wedge(\partial_i\vec{H}_j - \partial_j\vec{H}_i)}{|\vec{H}_i\wedge\vec{H}_j|}\right), \quad i,j = \overline{1,3}. \tag{11}$$

Условия (7), (8), (10), (11) и составляют содержание леммы 3.

Доказательство теоремы. Пусть имеется трехмерное C^r-гладкое, $r \geqslant 4$, регулярное подмногообразие $\Gamma^3 \subset G(m, m+3)$, заданное в виде $z = z(v^1, v^2, v^3)$. Для этого подмногообразия мы можем определить величины f^k_{ij}, Φ_{ij}, Ψ, $\vec{H}_i$, по предположению эти величины удовлетворяют условиям 1)–4) теоремы. Тогда имеют место (10), (11), а следовательно, система (9) совместна, и мы можем определить не обращающееся в 0 решение $\Lambda(v^1, v^2, v^3)$ этой системы однозначно с точностью до постоянного множителя. Подставим найденную функцию в (5). Так как условия (8), (9), а следовательно, и (6), выполнены, система (5) для нахождения функций x^{m+1}, x^{m+2}, x^{m+3} является совместной. Подставим решение $x^{m+1}(v^1, v^2, v^3)$, $x^{m+2}(v^1, v^2, v^3)$, $x^{m+3}(v^1, v^2, v^3)$ этой системы в (1), мы получим систему для нахождения функций $x^1, \ldots, x^m$. Она совместна, так как решение системы (5) является решением и системы (2), представляющей собой условие совместности системы (1). Возьмем некоторое решение $x^1(v^1, v^2, v^3), \ldots, x^m(v^1, v^2, v^3)$ системы (1) и образуем вектор-функцию $\vec{x}(v^1, v^2, v^3) = \|x^1, \ldots, x^{m+3}\|$. Тогда подмногообразие $F^3 \subset E^{m+3}$ с радиус-вектором $\vec{x} = \vec{x}(v^1, v^2, v^3)$ будет регулярным потому, что условие (7) выполнено по предположению и имеет место (5). Кроме того, Γ^3 является грассмановым образом $F^3 \subset E^{m+3}$ вследствие выполнения условия (1). Легко видеть, что при этом вектор-функция $\vec{x}(v^1, v^2, v^3)$ определяется с точностью до постоянного множителя и постоянного слагаемого, т.е. $F^3 \subset E^{m+3}$ определено своим грассмановым образом однозначно с точностью до гомотетии и параллельного переноса в E^{m+3}. Теорема доказана.

Замечание 1. Точечная коразмерность (размерность первого нормального пространства) трехмерного подмногообразия $(m+3)$-мерного евклидова пространства не превосходит $\min(6, m)$. Можно показать, что если точечная коразмерность подмногообразия $F^3 \subset E^{m+3}$, $m \geqslant 6$, в некоторой точке $\vec{x}(v^1, v^2, v^3)$ равна 6, то в соответствующей точке $z(v^1, v^2, v^3)$ грассманова образа $\Gamma^3 \subset G(m, m+3)$ ранги матриц Φ_{12}, Φ_{23}, Φ_{31} равны 5.

Замечание 2. Из предположения о том, что ранги матриц $\Phi_{12}, \Phi_{23}, \Phi_{31}$ тождественно равны 5, следует, что $\Gamma \subset G(m, m+3)$ является трехмерным регулярным подмногообразием.

Замечание 3. Полученные результаты обобщаются непосредственным повторением доказательств на случай n-мерных подмногообразий $(n+m)$-мерного евклидова пространства при $m > 2n-2$.

В заключение автор хотел бы выразить благодарность профессору Ю. А. Аминову (ФТИНТ НАН Украины, г. Харьков), под чьим руководством была выполнена эта работа, а также профессорам А. Буте де Монвель (Университет Париж 7) и Л. Буте де Монвелю (Университет Париж 6) за поддержку.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Аминов Ю. А. О грассмановом образе двумерной поверхности в четырехмерном евклидовом пространстве // Укр. геом. сб. 1980. Т. 23. С. 3–16.

[2] Борисенко А. А., Николаевский Ю. А. Многообразия Грассмана и грассманов образ подмногообразий // УМН. 1991. Т. 46. №2 (278). С. 41–83.

[3] Аминов Ю. А., Тарасова Т. Определение поверхности в E^4 по вырожденному грассманову образу // Укр. геом. сб. 1983. Т. 26. С. 6–13.

[4] Горькавый В. А. Восстановление подмногообразия евклидова пространства по вырожденному в линию грассманову образу // Матем. заметки. 1996. Т. 59. №5. С. 681–691.

[5] Горькавый В. А. Восстановление трехмерного подмногообразия пятимерного евклидова пространства по вырожденному двумерному грассманову образу // Матем. физика, анализ, геометрия. 1995. Т. 2. №1. С. 25–41.

[6] Аминов Ю. А. Восстановление двумерной поверхности в n-мерном евклидовом пространстве по ее грассманову образу // Матем. заметки. 1984. Т. 36. №2. С. 223–228.

Физико-технический институт
низких температур АН Украины, г. Харьков
E-mail: `gorkaviy@ilt.kharkov.ua`

Поступило
22.01.96
Исправленный вариант
24.06.97