П. Г. Юров, Сингулярный интеграл с логарифмическим весом,
Матем. заметки, 1979, том 26, выпуск 1, 61–70

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 26, № 1 (1979)

СИНГУЛЯРНЫЙ ИНТЕГРАЛ С ЛОГАРИФМИЧЕСКИМ ВЕСОМ

П. Г. Юров

В теории интегральных уравнений (см. [1], [2]) изучаются сингулярные интегралы вида

$$(S_m\varphi)(x) = \int_a^b \ln^m \frac{b-t}{t-a} \cdot \frac{\varphi(t)}{t-x}\,\mathrm{d}t \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots). \tag{1}$$

В опубликованной недавно работе [3] для интеграла (1) при $\varphi(t) \equiv 1$ указываются рекуррентные соотношения. В настоящей статье уточняются результаты, полученные в работах [4] — [6] на основе теории, построенной А. О. Гельфондом [7, гл. V, § 7], и приводятся явные выражения некоторых интегралов типа (1).

1. В пп. 1—3 описывается аналитический аппарат, используемый для решения поставленной задачи.

Пусть степенной ряд

$$f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (w - w_0)^n \tag{2}$$

определяет целую функцию $f(w)$; положим

$$w = (2\pi i)^{-1} \ln u,$$
$$w_0 = (2\pi i)^{-1} \ln r \qquad (0 < r < 1/2, \quad r/2 \leqslant u \leqslant 3r/2) \tag{3}$$

(имеются в виду вещественные значения $\ln u$ и $\ln r$).

ЛЕММА 1. *Для целой функции $f(w)$, удовлетворяющей условию*

$$|f(x+iy)| \leqslant M_1 e^{\nu|y|}$$

$$(0 \leqslant \nu < 2\pi, \quad |x| \leqslant (\ln 2)/\pi, \qquad -\infty < y < +\infty), \tag{4}$$

где $M_1 = \mathrm{const}$, *справедлива оценка*

$$\left|\frac{f((\ln u)/(2\pi i)) - f((\ln r)/(2\pi i))}{u - r}\right| = \\ = O\left(\frac{1}{r^{\lambda+1}}\right) \quad (r \to 0,\ 0 \leqslant \lambda < 1), \qquad (5)$$

в которой $\lambda = (2\pi)^{-1}\cdot\nu$.

Доказательство. Учитывая (4), оценим рост функции $f(w)$ при $r \to 0$ в круге

$$D_\rho = \{z\colon |z - w_0| \leqslant \rho\},$$

где $\rho = (\ln 2)/\pi$:

$$|f(z)| = f(w_0 + \rho e^{i\varphi})| \leqslant \\ \leqslant M_1 \exp\{(\nu/(2\pi))\, |\ln(1/r) + 2\pi\rho\sin\varphi|\} \leqslant 4M_1 r^{-\lambda}$$

$(0 \leqslant \lambda < 1)$. Применяя теперь к коэффициентам ряда (2) неравенство Коши, получим

$$|c_k| \leqslant M(\rho)\rho^{-k} \leqslant 4M_1 r^{-\lambda}\cdot\rho^{-k} \quad (k = 1, 2, \ldots), \qquad (6)$$

где обозначено

$$M(\rho) = \max |f(z)|, \qquad z \in \partial D_\rho.$$

Принимая во внимание (3) и (6), приходим к неравенству

$$\left|f\left(\frac{\ln u}{2\pi i}\right) - f\left(\frac{\ln r}{2\pi i}\right)\right| \leqslant \\ \leqslant \left|\ln\frac{u}{r}\right| \frac{4M_1}{2\pi\rho r^{\lambda}} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{|\ln(u/r)|}{2\pi\rho}\right)^{k-1} \leqslant \\ \leqslant \frac{4M_1}{\ln 2}\cdot r^{-\lambda}\cdot\left|\ln\frac{u}{r}\right|,$$

откуда

$$\left|\frac{f(w) - f(w_0)}{u - r}\right| \leqslant \left|\frac{\ln(1 + (u - r)/r)}{u - r}\right| \frac{4M_1}{\ln 2} r^{-\lambda} = M_2 r^{-\lambda_1-1},$$

где M_2 не зависит от u и r. Лемма доказана.

2. Пусть K_σ^2 — класс $\{f(z)\}$ целых функций конечной степени σ, подчиненных условиям

$$h[(-1)^k\pi/2] = \mu_k < 2\pi \quad (k = 1, 2), \qquad (7)$$

где $h(\theta)$ — индикатор целой функции $f(z)$ [8, стр. 72]:

$$h(\theta) = \varlimsup_{r\to+\infty} r^{-1}\ln|f(re^{i\theta})|.$$

Условия (7) выполняются, например, для любой целой функции $f(z)$ степени $\sigma < 2\pi$.

Как известно, для $f(z) \in K_\sigma^2$, $f(z) \not\equiv 0$,

$$\max\{\mu_1,\ \mu_2\} \equiv \mu \geqslant 0. \tag{8}$$

Далее везде предполагается, что $f(z) \not\equiv 0$.

Замечание 1. Если $f(z) \in K_\sigma^2$ $(0 \leqslant \sigma < \infty)$, то, как показано в [6], из ограничений (7), наложенных на рост $f(z)$ вдоль мнимой оси, т. е. при $x = 0$, вытекает неравенство (4) для любых вещественных x, $|x| \leqslant a < < \infty$.

Обозначим через L луч $\{(x,\ y)\colon 0 \leqslant x \leqslant \infty,\ y = 0\}$ и через D — открытую область плоскости z с границей L. Полагая

$$\tilde{f}(x) = f(\ln x / (2\pi i)) \qquad (0 < x < \infty,\ -\infty < \ln x < \infty), \tag{9}$$

рассмотрим интеграл типа Коши

$$\Phi(z) \equiv \frac{z - z_0}{2\pi i} \int_0^\infty \frac{\tilde{f}(z)}{(x - z_0)(x - z)}\, \mathrm{d}x \qquad (z \in D) \tag{10}$$

$(z_0 = \mathrm{const},\ z_0 \in D)$. Если $z = t \in L$ $(0 < t < \infty)$, то сингулярный интеграл (10) понимается в смысле главного значения по Коши. Получим сначала грубую оценку для $\Phi(z)$, исходя из соотношения (8).

ЛЕММА 2. *Если* $f(z) \in K_\sigma^2$, *то для интеграла* (10) *верна оценка*

$$\Phi(z) = \begin{cases} O(|z|^{-\lambda}), & z \to 0, \\ O(|z|^{\lambda}), & z \to \infty, \end{cases} \tag{11}$$

где $\lambda = \mathrm{const},\ 0 < \lambda < 1$.

Доказательство. Пусть $2\pi > \nu > \mu$, где μ — число, указанное в (8). Из (7) следует, что при всех $x > 0$ таких, что $|\ln x| \geqslant R(\nu)$, будет

$$|\tilde{f}(x)| = |f((\ln x) / (2\pi i))| < e^{\lambda|\ln x|}$$
$$(\lambda = \nu/(2\pi),\ 0 < \lambda < 1). \tag{12}$$

Таким образом, несобственный интеграл (10) сходится при всех z, $z \neq 0,\ \infty$.

Исследуем сначала поведение $\Phi(z)$ при $z \to 0$ ($z = re^{i\theta}$, $|\theta| \leqslant \delta$)[1]. Запишем интеграл (10) в виде

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{\tilde{f}(x)\,dx}{x-z} - \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{\tilde{f}(x)\,dx}{x-z_0} + \frac{z-z_0}{2\pi i}\int_1^\infty \frac{\hat{f}(x)\,dx}{(x-z)(x-z_0)}.$$

Так как два последних слагаемых ограничены при $z \to 0$, остается оценить интеграл

$$\int_0^1 \frac{\tilde{f}(x)\,dx}{x-z} = \left\{\int_0^{0,5r} + \int_{0,5r}^{1,5r} + \int_{1,5r}^1\right\}\frac{\tilde{f}(x)}{x-z}\,dx \equiv \omega_1(z) + \omega_2(z) + \omega_3(z).$$

Считая $r = |z|$ настолько малым, что при $0 < x \leqslant r/2$ выполняется (12), найдем, что

$$|\omega_1(z)| \leqslant \int_0^{0,5r} |\tilde{f}(x)/(x-z)|\,dx \leqslant \leqslant (2/r)\int_0^{0,5r} x^{-\lambda}\,dx = 2^\lambda/(1-\lambda)\cdot r^{-\lambda}. \quad (13)$$

Поскольку $|\tilde{f}(x)| \leqslant Ax^{-\lambda}$ при $3r/2 \leqslant x \leqslant 1$ ($A = \text{const}$), то, полагая $x = ur$, преобразуем $\omega_3(z)$ так:

$$|\omega_3(z)| \leqslant A\int_{1,5r}^1 \frac{dx}{x^\lambda|x-re^{i\theta}|} \leqslant \frac{A}{r^\lambda}\int_{1,5}^\infty \frac{du}{u^\lambda|u-e^{i\theta}|} = A_1 r^{-\lambda}. \quad (14)$$

($A_1 = \text{const}$). Представляя $\omega_2(z)$ в виде

$$\omega_2(z) = \int_{0,5r}^{1,5r}(\tilde{f}(x) - \tilde{f}(r))\,dx/(x-z) + \tilde{f}(r)\int_{0,5r}^{1,5r} dx/(x-z) \equiv I_1(z) + I_2(z),$$

установим в соответствии с (7), что

$$|I_2(z)| = |\tilde{f}(r)|\,|\ln((1,5-e^{i\theta})/(0,5-e^{i\theta}))| \leqslant \leqslant A_2 r^{-\lambda}\ (A_2 = \text{const}). \quad (15)$$

Для интеграла $I_1(z)$ на основании леммы 1 и замечания 1

---

[1] При $z \to 0$ и $0 < \delta \leqslant \arg z \leqslant 2\pi - \delta$ оценка интеграла (10) не вызывает затруднений.

будем иметь

$$|I_1(z)| \leqslant \int_{0,5r}^{1,5r} |\tilde{f}(x) - \tilde{f}(r)|\, \mathrm{d}x / |x - r| \leqslant$$

$$\leqslant M_2 r^{-\lambda-1} \int_{0,5r}^{1,5r} \mathrm{d}x = M_2 r^{-\lambda}. \quad (16)$$

Из неравенств (13) — (16) вытекает утверждение леммы для $z \to 0$.

Если $z \to \infty$, то, заменяя переменные по формулам

$$x = u^{-1}, \quad z = w^{-1}, \quad z_0 = w_0^{-1},$$

получим

$$\frac{z - z_0}{2\pi i} \int_1^\infty \frac{\tilde{f}(x)\, \mathrm{d}x}{(x - z_0)(x - z)} = -\frac{w - w_0}{2\pi i} \int_0^1 \frac{f[-(\ln u)/(2\pi i)]}{(u - w_0)(u - w)} \mathrm{d}u;$$

тем самым этот случай сводится к уже рассмотренному. Лемма доказана.

С помощью грубой оценки (11) далее (в теореме 1) будут найдены точные представления для $\Phi(z)$.

3. Проведя разрез вдоль L, фиксируем непрерывную в области D (п. 2) ветвь $\ln z$, считая, что $\arg z = 0$ на верхнем берегу разреза. Предположим, что $f(w)$ — заданная целая функция класса K_σ^2. Введем аналитическую в D функцию

$$\tilde{f}(z) = f((\ln z) / (2\pi i)) \qquad (z \in D), \quad (17)$$

граничным значением которой на верхнем берегу L является функция $\tilde{f}(x)$, указанная в (9).

Как и в [4] — [6], поставим вопрос о чахождении представления для интеграла (10). Лемма 2 позволяет устранить излишнее предположение о поведении $\Phi(z)$ в окрестностях концов контура, сделанное в работах [4] — [6], и сформулировать теорему 1 из [6] следующим образом.

ТЕОРЕМА 1. *Если* $f(z) \in K_\sigma^2$, $F(z) \in K_\sigma^2$ *и удовлетворяют разностному уравнению*

$$F(z + 1) - F(z) = f(z), \quad (18)$$

то при $z_0 \in D$ *справедливы равенства*

$$\frac{z - z_0}{2\pi i} \int_0^\infty \frac{\tilde{f}(x)\, \mathrm{d}x}{(x - z_0)(x - z)} = -F\left(\frac{\ln z}{2\pi i}\right) + F\left(\frac{\ln z_0}{2\pi i}\right) \quad (z \in D), \quad (19)$$

$$\frac{t-z_0}{2\pi i}\int_0^{\infty}\frac{\tilde{f}(x)\,\mathrm{d}x}{(x-z_0)(x-t)}=$$
$$=-\frac{1}{2}f\left(\frac{\ln t}{2\pi i}\right)-F\left(\frac{\ln t}{2\pi i}\right)+F\left(\frac{\ln z_0}{2\pi i}\right)\quad (t\in L,\ t\neq 0,\ \infty). \tag{20}$$

Теорема 1 доказана в [6] (при более общих предположениях относительно контура L).

Отметим частные случаи формул (19), (20).

1) Если $z_0=re^{i\varphi}$, $0<\varphi\leqslant\pi$, $z=\bar{z}_0$, то

$$\frac{r\sin\varphi}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\tilde{f}(x)\,\mathrm{d}x}{x^2-2xr\cos\varphi+r^2}=F\left(\frac{\ln z_0}{2\pi i}+\frac{\pi-\varphi}{\pi}\right)-F\left(\frac{\ln z_0}{2\pi i}\right), \tag{21}$$

или, в других обозначениях ($z_0=x+iy$, $z=x-iy$, $y>0$),

$$\frac{y}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\tilde{f}(u)\,\mathrm{d}u}{(u-x)^2+y^2}=F\left[\frac{\ln(x-iy)}{2\pi i}\right]-F\left[\frac{\ln(x+iy)}{2\pi i}\right]; \tag{22}$$

отсюда, при $\varphi=\pi/2$ (или $x=0$, $y>0$),

$$\frac{r}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\tilde{f}(x)\,\mathrm{d}x}{x^2+r^2}=F\left(\frac{\ln r}{2\pi i}+\frac{3}{4}\right)-F\left(\frac{\ln r}{2\pi i}+\frac{1}{4}\right). \tag{23}$$

2) Если $z=t$, $t\in L$ $(0<t<\infty)$, а $z_0=-t$, то, поскольку $\ln(-1)=\pi i$,

$$\frac{t}{\pi i}\int_0^{\infty}\frac{\tilde{f}(x)\,\mathrm{d}x}{x^2-t^2}=F\left(\frac{\ln t}{2\pi i}+\frac{1}{2}\right)-F\left(\frac{\ln t}{2\pi i}\right)-\frac{1}{2}f\left(\frac{\ln t}{2\pi i}\right). \tag{24}$$

З а м е ч а н и е. 2. Обратим внимание на то, что при доказательстве леммы 2 фактически не было использовано допущение $\sigma<\infty$. Это дает возможность ввести вместо K_σ^2 $(0\leqslant\sigma<\infty)$ более широкий класс целых функций.

Однако уже функция $f(z)=e^{2\pi iz}$ (степени $\sigma=2\pi$) не удовлетворяет условию (7) на луче $\arg z=-\pi/2$, т. е. $e^{2\pi iz}\notin K_{2\pi}^2$ (и интеграл (10) оказывается расходящимся). Для таких функций (как, впрочем, и для $f(z)\in K_\sigma^2$) рассматривают интеграл (см. [9], [10])

$$\Phi_q(z)=\frac{(z-z_0)^{q+1}}{2\pi i}\int_0^{\infty}\frac{f\left[(2\pi i)^{-1}\ln x\right]}{(x-z_0)^{q+1}(x-z)}\,\mathrm{d}x$$
$$([\sigma/2\pi]\leqslant q<\infty), \tag{25}$$

где q — целое неотрицательное число, а $[\sigma]$ — целая часть σ. Можно показать, что если $F(z)$ — решение уравнения (18), то при некоторых ограничениях функция

$$P_q(z) \equiv \Phi_q(z) + F((\ln z)/(2\pi i))$$

является целой. Мы не будем здесь на этом останавливаться, так как ниже понадобится только случай $q = 0$, когда, в силу теоремы 1, целая функция

$$P_0(z) \equiv \text{const} = F[(2\pi i)^{-1} \ln z_0].$$

4. Нам потребуются некоторые следствия теоремы 1. Простейшие разностные уравнения

$$F(z+1) - F(z) = (m+1) z^m, \quad \Psi(z+1) - \Psi(z) = e^{\pm \pi i z} z^m \quad (26)$$

удовлетворяются при натуральном m целыми функциями

$$F(z) = B_{m+1}(z), \quad \Psi(z) = -(1/2)E_m(z) \cdot e^{\pm \pi i z}; \quad (27)$$

здесь $B_{m+1}(z)$ — многочлен Бернулли [11, стр. 335] и $E_m(z)$ — многочлен Эйлера [11, стр. 363]. Знаки в показателе берутся или только верхние, или только нижние.

Легко проверить, что условия теоремы 1 выполняются. Поэтому справедливы следующие предложения.

Следствие 1. *Если m — натуральное число и $z_0 \in D$, то для $z \in D$*

$$\frac{z - z_0}{2\pi i} \int_0^\infty \frac{\ln^m x \, dx}{(x - z_0)(x - z)} = -\frac{(2\pi i)^m}{m+1} \left\{ B_{m+1}\left(\frac{\ln z}{2\pi i}\right) - B_{m+1}\left(\frac{\ln z_0}{2\pi i}\right) \right\}, \quad (28)$$

а для $t \in L$ $(0 < t < \infty)$

$$\frac{t - z_0}{2\pi i} \int_0^\infty \frac{\ln^m x \, dx}{(x - z_0)(x - t)} = -\frac{(2\pi i)^m}{m+1} \cdot \left\{ B^*_{m+1}\left(\frac{\ln t}{2\pi i}\right) - B_{m+1}\left(\frac{\ln z_0}{2\pi i}\right) \right\}, \quad (29)$$

где

$$B^*_{m+1}(w) \equiv B_{m+1}(w) + (1/2)(m+1) w^m. \quad (30)$$

Последнее означает, что многочлен $B^*_{m+1}(w)$ получается путем отбрасывания у многочлена Бернулли $B_{m+1}(w)$ члена степени m.

Дифференцирование по z тождества (28) приводит к равенству

$$\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty \frac{\ln^m x}{(x-z)^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{(2\pi i)^{m-1}}{z}\cdot B_m\left(\frac{\ln z}{2\pi i}\right),$$

откуда, при $z = -1$,

$$\int_0^\infty \frac{\ln^m x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = (2\pi i)^m B_m\left(\frac{1}{2}\right). \tag{31}$$

Заметим, что $B_m\,(1/2) = 0$ при нечетном m.

Следствие 2. *Если* $m \in \mathbf{N}$, $z_0 \in D$ *и* $t \in L$ $(0 < t < \infty)$, *то*

$$\frac{t-z_0}{2\pi i}\int_0^\infty \frac{x^{\pm 1/2}\ln^m x}{(x-z_0)(x-t)}\,\mathrm{d}x = \frac{(2\pi i)^m}{2}\left\{t^{\pm 1/2}\cdot E_m^*\left(\frac{\ln t}{2\pi i}\right) - z_0^{\pm 1/2}E_m\left(\frac{\ln z_0}{2\pi i}\right)\right\}, \tag{32}$$

где

$$E_m^*\,(w) \equiv E_m\,(w) - w^m. \tag{33}$$

Укажем еще интегральное представление натуральной степени логарифма:

$$\left(\frac{\ln t}{2\pi i}\right)^m = \frac{t+1}{2\pi i}\int_0^\infty \frac{E_m^*\,[(2\pi i)^{-1}\ln x]}{(x+1)(x-t)}\,\mathrm{d}x + E_m\left(\frac{1}{2}\right).$$

Это непосредственно следует из свойств многочленов $E_m\,(z)$.

5. Перейдем к конечному контуру — отрезку $[a,\ b]$ вещественной оси и найдем явные выражения сингулярного интеграла (1) в следующих случаях:

$$\varphi\,(t) \equiv 1;\quad \varphi\,(t) \equiv ((b-t)/(t-a))^{\pm 1/2};$$

$$\varphi\,(t) = [(b-t)(t-a)]^{-1/2};\quad \varphi\,(t) = ((b-t)/(t-a))^{\rho}.$$

ТЕОРЕМА 2. *Если* $m \in \mathbf{N}$ *и* $a < x < b$, *то*

$$\int_a^b \ln^m\frac{b-t}{t-a}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{t-x} = \frac{(2\pi i)^{m+1}}{m+1}\cdot\left\{B_{m+1}^*\left(\frac{\ln((b-x)/(x-a))}{2\pi i}\right) - B_{m+1}\left(\frac{1}{2}\right)\right\}, \tag{34}$$

где $B_{m+1}^*\,(w)$ — *многочлен, определенный в* (30).

Доказательство. Положим в равенстве (29) $z_0 = -1$, тогда

$$\frac{t+1}{2\pi i}\int_0^\infty \frac{\ln^m x\,\mathrm{d}x}{(x+1)(x-t)} = -\frac{(2\pi i)^m}{m+1}\cdot\left[B^*_{m+1}\left(\frac{\ln t}{2\pi i}\right) - B_{m+1}\left(\frac{1}{2}\right)\right].$$

Проводя здесь замену переменных

$$x(u-a) = b-u,\ t(v-a) = b-v \quad (a<u<b,\ a<v<b),$$

придем к (34). Теорема доказана.

Подчеркнем, что значения логарифма $\ln[(b-u)\cdot(u-a)^{-1}]$ $(a<u<b)$ вещественны.

Получим еще одну полезную формулу, сделав подстановку $(u-a)x = b-u$ в интеграле из (31):

$$\int_a^b \ln^m((b-x)/(x-a))\,\mathrm{d}x = (2\pi i)^m(b-a)B_m(1/2).$$

Аналогично (с использованием (32)) доказывается

ТЕОРЕМА 3. *Если* $m\in\mathbf{N}$ *и* $a<x<b$, *то*

$$\int_a^b \left(\frac{b-t}{t-a}\right)^{\pm 1/2}\cdot\ln^m\frac{b-t}{t-a}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{t-x} = -\frac{(2\pi i)^{m+1}}{2}\left\{\left(\frac{b-x}{x-a}\right)^{\pm 1/2}\cdot E^*_m\left(\frac{\ln((b-x)/(x-a))}{2\pi i}\right) - (-1)^{\pm 1/2}E_m\left(\frac{1}{2}\right)\right\}, \quad (35)$$

где $E^*_m(w)$ — *многочлен, определенный в* (33).

Следствие 3. *Если* $m\in\mathbf{N}$ *и* $a<x<b$, *то*

$$\int_a^b \frac{\ln^m\frac{b-t}{t-a}}{\sqrt{(b-t)(t-a)}}\frac{\mathrm{d}t}{t-x} = -\frac{(2\pi i)^{m+1}}{2\sqrt{(b-x)(x-a)}}E^*_m\left(\frac{1}{2\pi i}\ln\frac{b-x}{x-a}\right). \quad (36)$$

Действительно, достаточно сложить почленно равенства (35), отвечающие знаку «+» или знаку «—» в показателе.

ТЕОРЕМА 4. *Если* $m \in \mathrm{N}$, $|\operatorname{Re}\rho| < 1$, $\rho \neq 0, \pm 1/2$; $a < x < b$, *то*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_a^b \left(\frac{b-t}{t-a}\right)^{\rho} \ln^m\left(\frac{b-t}{t-a}\right)\frac{\mathrm{d}t}{t-x} = \frac{1}{2}\left(\frac{b-x}{x-a}\right)^{\rho}\ln^m\frac{b-x}{x-a} +$$

$$+\frac{(2\pi i)^m\, \mathrm{e}^{-i\pi\rho}}{2i\sin\pi\rho}\left\{\left(\frac{b-x}{x-a}\right)^{\rho}\sum_{n=0}^{m} C_m^n H_n(q)\cdot\left(\frac{1}{2\pi i}\ln\frac{b-x}{x-a}\right)^{m-n} -\right.$$

$$\left. - \mathrm{e}^{i\pi\rho}\sum_{n=0}^{m} C_m^n H_n(q)\cdot 2^{n-m}\right\}, \qquad (37)$$

где C_m^n — *биномиальные коэффициенты*, $q = \exp(-2\pi i\rho)$,

$$H_0(q) \equiv 1, \quad H_n(q) = (q-1)^{-n}(A_{n,1} + A_{n,2}q + \ldots$$

$$\ldots + A_{n,n}q^{n-1})$$

и $A_{n,k}$ — *числа Эйлера* [12, стр. 254].

Доказательство. Соответствующее этому случаю разностное уравнение решено в [4].

Новочеркасский политехнический институт

Поступило 12.VII.1977

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Гахов Ф. Д., Краевые задачи, М., «Наука», 1977.

[2] Мусхелишвили Н. И., Сингулярные интегральные уравнения, М., Физматгиз, 1968.

[3] Килбас А. А., Дифференцирование особых интегралов и вычисление определенных интегралов, Вестник БГУ, Сер. I, 1 (1977), 78—80.

[4] Юров П. Г., Интегралы типа Коши и уравнения в конечных разностях, Изв. АН БССР, Сер. физ.-матем. наук, № 3 (1967), 67—74.

[5] Юров П. Г., О представлении интегралов типа Коши, Матем. заметки, 6, № 1 (1969), 55—63.

[6] Юров П. Г., О несобственном интеграле типа Коши, Изв. Сев.-Кав. научн. центра высш. шк., Сер. естеств. наук, № 4 (1975), 108—109.

[7] Гельфонд А. О., Исчисление конечных разностей, М., «Наука», 1967.

[8] Левин Б. Я., Распределение корней целых функций, М., Гостехиздат, 1956.

[9] Говоров Н. В., Об ограниченных решениях однородной краевой задачи Римана с бесконечным индексом степенного порядка, Теор. функц., функц. анализ и их прилож., № 11 (1970), 3—34.

[10] Гольдберг А. А., Островский И. В., Распределение значений мероморфных функций, М., «Наука», 1970.

[11] Математический анализ. Функции, пределы, ряды, цепные дроби. Справочная математическая библиотека, М., Физматгиз, 1961.

[12] Риордан Дж., Введение в комбинаторный анализ, М., ИЛ, 1963.