МАЙ 1985 г., ТОМ XXI, № 5

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.927.4

С. А. БЕСПАЛОВА, Ю. А. КЛОКОВ

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ВСТРЕЧАЮЩЕЙСЯ В БИОХИМИИ

1. Рассмотрим краевую задачу

$$D_1x_1''=-\Phi(t,\ x_1,\ x_2,\ x_1',\ x_2'), \tag{1}$$

$$D_2x_2''=\Phi(t,\ x_1,\ x_2,\ x_1',\ x_2'), \tag{2}$$

$$x_1(0)=A,\quad x(\tau)=B, \tag{3}$$

$$x_2'(0)=0,\quad x_2'(\tau)=0, \tag{4}$$

где $A,\ B\in R,\ D_1,\ D_2>0$ постоянные, и $\Phi\in C(I\times R^4),\ I=[0,\ \tau]$. Задачи такого типа возникают в биохимии [1].

Теорема 1. *Пусть функция Φ удовлетворяет следующим условиям:*

(A_0) Для некоторых постоянных $h_2,\ H_2$ $(-\infty<h_2<H_2<\infty)$ справедливы неравенства

$$\Phi(t,\ x_1,\ H_2,\ x_1',\ 0)\geqslant 0, \tag{5}$$

$$\Phi(t,\ x_1,\ h_2,\ x_1',\ 0)\leqslant 0 \tag{6}$$

для $\forall t\in I$ и $\forall x_1,\ x_1'\in R$.

$(Б_0)$ Для любого $M>0$ существует постоянная $B(M)$ такая, что

$$|\Phi(t,\ x_1,\ x_2,\ x_1',\ x_2')|\leqslant B(M)(1+x_1'^2+x_2'^2), \tag{7}$$

$$\forall (t,\ x_1',\ x_2')\in I\times R^2,\ |x_1|+|x_2|\leqslant M.$$

Тогда решение задачи (1)—(4) существует для любых A и B.

Доказательство. Определим функцию $f\in C(I\times R^4)$ равенством

$$f(t,\ x_1,\ x_2,\ x_1',\ x_2')=\begin{cases}\Phi(t,\ x_1,\ H_2,\ x_1',\ x_2')+x_2-H_2, & x_2\geqslant H_2,\\ \Phi(t,\ x_1,\ x_2,\ x_1',\ x_2'), & h_2\leqslant x_2\leqslant H_2,\\ \Phi(t,\ x_1,\ h_2,\ x_1',\ x_2')-h_2+x_2, & x_2\leqslant h_2,\end{cases} \tag{8}$$

где $(t,\ x_1,\ x_2,\ x_1',\ x_2')\in I\times R^4$. Очевидно, что $f\in C(I\times R^4)$ и удовлетворяет условию $(Б_0)$. Кроме того, для любого $t\in I$ и $x_1,\ x_2,\ x_1'\in R$ имеем

$$f(t,\ x_1,\ x_2,\ x_1',\ 0)>0,\quad x_2>H_2, \tag{9}$$

$$f(t,\ x_1,\ x_2,\ x_1',\ 0)<0,\quad x_2<h_2. \tag{10}$$

Вместо системы (1), (2) рассмотрим систему

$$D_1x_1''=-f(t,\ x_1,\ x_2,\ x_1',\ x_2'), \tag{11}$$

$$D_2x_2''=f(t,\ x_1,\ x_2,\ x_1',\ x_2') \tag{12}$$

и докажем, что решение задачи (11), (12), (3), (4) существует.

Найдем прежде всего априорные оценки решения этой задачи. Пусть $x_1(t)$, $x_2(t)$ есть решение задачи (11), (12), (3), (4). Покажем, что

$$h_2 \leqslant x_2(t) \leqslant H_2 \quad \forall t \in I. \tag{13}$$

Установим прежде всего, что $x_2(0) \leqslant H_2$. Предположим противное, пусть $x_2(0) > H_2$. Так как $x_2'(0) = 0$, то из (12), (9) следует, что $x_2'(t) > 0$, $t > 0$, а тогда условие $x_2'(\tau) = 0$ не будет выполнено. Значит, $x_2(0) \leqslant H_2$. Аналогично доказывается, что $x_2(\tau) \leqslant H_2$. Теперь покажем, что $x_2(t) \leqslant H_2$ $\forall t \in I$. Предположим противное. Так как $x_2(0) \leqslant H_2$, $x_2(\tau) \leqslant H_2$, то при некотором $t = t_* \in (0, \tau)$ существует точка максимума, где $x_2(t_*) > H_2$, $x_2'(t_*) = 0$, $x_2''(t_*) \leqslant 0$. Но это противоречит (12), (9). Значит, $x_2(t) \leqslant H_2$ $\forall t \in I$. Аналогично доказывается неравенство $h_2 \leqslant x_2(t)$ $\forall t \in I$.

Обозначим $M_2 = \max(|h_2|, |H_2|)$. Тогда

$$|x_2(t)| \leqslant M \quad \forall t \in I. \tag{14}$$

Найдем априорную оценку для $x_1(t)$. Обозначим $V = \frac{1}{2}(D_1 x_1 + D_2 x_2)^2$. Тогда

$$V' = (D_1 x_1 + D_2 x_2)(D_1 x_1' + D_2 x_2'),$$

$$V'' = (D_1 x_1' + D_2 x_2')^2 + (D_1 x_1 + D_2 x_2)(D_1 x_1'' + D_2 x_2'').$$

Из (11), (12) найдем $D_1 x_1'' + D_2 x_2'' = 0$ $\forall t \in I$. Следовательно,

$$V'' = (D_1 x_1' + D_2 x_2')^2 \geqslant 0 \quad \forall t \in I. \tag{15}$$

Обозначим $M_0 = D_1 \max(|A|, |B|) + D_2 M_2$. Тогда, очевидно, $V(0) \leqslant \frac{1}{2} M_0^2$, $V(\tau) \leqslant \frac{1}{2} M_0^2$ и из (15) следует $V(t) \leqslant \frac{1}{2} M_0^2$ $\forall t \in I$. Теперь для $\forall t \in I$ находим

$$|x_1(t)| = D_1^{-1} |D_1 x_1 + D_2 x_2 - D_2 x_2| \leqslant D_1^{-1} |D_1 x_1 + D_2 x_2| + D_1^{-1} D_2 |x_2| \leqslant$$
$$\leqslant D_1^{-1} \sqrt{2V(t)} + D_1^{-1} D_2 |x_2| \leqslant \max(|A|, |B|) + 2 D_1^{-1} D_2 M_2.$$

Обозначим $M_1 = \max(|A|, |B|) + 2 D_1^{-1} D_2 M_2$. Тогда

$$|x_1(t)| \leqslant M_1 \quad \forall t \in I. \tag{16}$$

Покажем, что из (14), (16) и условия (Б$_0$) следуют априорные оценки для x_1', x_2'. Обозначим $v(t) = D_1 x_1 + D_2 x_2$. Тогда из (11), (12) получаем $v''(t) = 0$. Следовательно,

$$v' = D_1 x_1' + D_2 x_2' = C, \quad v = D_1 x_1 + D_2 x_2 = Ct + D, \tag{17}$$

где $D = v(0)$ и $C = (v(\tau) - v(0))\tau^{-1}$.

Из (14), (16) находим

$$|D| \leqslant D_1 M_1 + D_2 M_2, \quad |C| \leqslant 2\tau^{-1}(D_1 M_1 + D_2 M_2).$$

Теперь из (17) имеем $x_2' = D_2^{-1}(C - D_1 x_1')$. Подставляя в (11) и используя условие (Б$_0$) при $M = M_1 + M_2$, получаем

$$|x_1''| = D_1^{-1} |f(t, x_1, x_2, x_1', D_2^{-1}(C - D_1 x_1'))| \leqslant$$
$$\leqslant D_1^{-1} B(M)(1 + x_1'^2 + D_2^{-2}(C - D_1 x_1')^2) \leqslant b(1 + x_1'^2), \tag{18}$$

где $b > 0$ есть некоторая постоянная. Из оценок (16), (18) следует существование постоянной $N_1 > 0$ такой, что для любого решения задачи (11), (12), (3), (4) справедлива оценка

$$|x_1'(t)| \leqslant N_1 \quad \forall t \in I \tag{19}$$

(см. [2, с. 503; 3, с. 39]).

Аналогично получается оценка

$$|x_2'(t)|\leqslant N_2 \quad \forall t\in I. \tag{20}$$

Введем обозначения

$$N=N_1+N_2,\quad r(z)=\begin{cases}1, & 0\leqslant z\leqslant 1,\\ 2-z, & 1<z\leqslant 2,\\ 0, & z>2,\end{cases}\qquad s(z)=\begin{cases}-1, & z<-1,\\ z, & -1\leqslant z\leqslant 1,\\ 1, & z>1,\end{cases}$$

$$F_1(t,\ x_1,\ x_2,\ x_1',\ x_2')=r\left(\frac{|x_1|+|x_2|+|x_1'|+|x_2'|}{M+N}\right)f(t,\ x_1,\ x_2,\ x_1',\ x_2'),$$

$$F_2(t,\ x_1,\ x_2,\ x_1',\ x_2')=F_1(t,\ x_1,\ x_2,\ x_1',\ x_2')-$$
$$-s\left(\frac{2x_2-H_2-h_2}{H_2-h_2}\right)-\frac{H_2+h_2}{H_2-h_2}.$$

Рассмотрим вместо системы (11), (12) следующую систему:

$$D_1x_1''=-F_1(t,\ x_1,\ x_2,\ x_1',\ x_2'), \tag{21}$$

$$D_2x_2''=\frac{2x_2}{H_2-h_2}+F_2(t,\ x_1,\ x_2,\ x_1',\ x_2'). \tag{22}$$

Так как задача

$$D_1x_1''=0,\quad x_1(0)=x_1(\tau)=0,\quad D_2x_2''=\frac{2}{H_2-h_2}x_2,\quad x_2'(0)=x_2'(\tau)=0$$

имеет только нулевое решение $x_1(t)\equiv 0$, $x_2(t)\equiv 0$ $\forall t\in I$, и так как существуют постоянные $F_{i0}>0$ $(i=1,\ 2)$ такие, что

$$|F_i(t,\ x_1,\ x_2,\ x_1',\ x_2')|<F_{i0}\quad \forall(t,\ x_1,\ x_2,\ x_1',\ x_2')\in I\times R^4\quad (i=1,\ 2),$$

то решение задачи (21), (22), (3), (4) существует (см. [3, с. 24—25]). Обозначим его через $x_1(t)$, $x_2(t)$, $t\in I$. Далее обозначим через $F_3(t,\ x_1,\ x_2,\ x_1',\ x_2')$ всю правую часть уравнения (22). Тогда из определения функции F_2 следует, что для $\forall t\in I$ и $\forall x_1,\ x_1'\in R$

$$F_3(t,\ x_1,\ x_2,\ x_1',\ 0)>0,\quad x_2>H_2,\quad F_3(t,\ x_1,\ x_2,\ x_1',\ 0)<0,\quad x_2<h_2.$$

Ввиду этого, как и прежде, получаем, что

$$h_2\leqslant x_2(t)\leqslant H_2\quad \forall t\in I. \tag{23}$$

Но при выполнении оценки (23)

$$F_3(t,\ x_1(t),\ x_2(t),\ x_1'(t),\ x_2'(t))=F_1(t,\ x_1(t),\ x_2(t),\ x_1'(t),\ x_2'(t))$$

$\forall t\in I$, и поэтому система (21), (22) запишется в виде

$$D_1x_1''=-r\left(\frac{|x_1|+|x_2|+|x_1'|+|x_2'|}{M+N}\right)f(t,\ x_1,\ x_2,\ x_1',\ x_2'),$$

$$D_2x_2''=r\left(\frac{|x_1|+|x_2|+|x_1'|+|x_2'|}{M+N}\right)f(t,\ x_1,\ x_2,\ x_1',\ x_2'),$$

откуда находим $(D_1x_1+D_2x_2)''=0$ и, следовательно, как и выше, получаем те же самые оценки

$$|x_1(t)|\leqslant M_1,\quad |x_1'(t)|\leqslant N_1,\quad |x_2'(t)|\leqslant N_2\quad \forall t\in I. \tag{24}$$

При выполнении оценок (23), (24) $r((|x_1|+|x_2|+|x_1'|+|x_2'|)(M+$ $+N)^{-1})\equiv 1$ и $f=\Phi$. Поэтому решение $x_1(t)$, $x_2(t)$ задачи (21), (22), (3), (4) есть также решение задачи (1)—(4). Тем самым теорема 1 доказана.

Замечание 1. Если в условии ($А_0$) $h_2=H_2=H$, то тогда очевидно $\Phi(t, x_1, H, x'_1, 0)\equiv 0$ $\forall t, x_1, x'_1 \in I\times R^2$, и решение задачи в этом случае есть

$$x_1=A+(B-A)t\tau^{-1},\quad x_2=H,\quad t\in I.$$

Замечание 2. Условие ($Б_0$) может быть ослаблено следующим образом.

Для любых $M>0$ и $C_0>0$ существует непрерывная функция $\psi(s)>0$, $s\geqslant 0$, такая, что $\int\limits_0^\infty \frac{sds}{\psi(s)}=\infty$ и $|f(t, x_1, x_2, s, C-D_1D_2^{-1}s)|\leqslant\psi(s)$, $|x_1|+|x_2|\leqslant M$ $\forall C\in[-C_0, C_0]$, $\forall s\in R$, $\forall t\in I$.

Замечание 3. Анализ доказательства теоремы 1 показывает, что если постоянные A и B в условии (3) фиксированы, то условие (A_0) должно выполняться не для всех $x_1\in R$, а только для

$$|x_1|\leqslant M_1=\max(|A|, |B|)+2D_1^{-1}D_2\max(|h_2|, |H_2|), \tag{25}$$

причем $|x'_1|\leqslant N_1$, где N_1 находится из условия ($Б_0$).

Из этого замечания следует теорема.

Замечание 4. Рассмотрим систему

$$x''_i=f_i(t, x_1, x_2, x'_1, x'_2)\quad (i=1, 2), \tag{*}$$

где $f_i\in C'(I\times R^4)$ $(i=1, 2)$ и каждая из функций f_1, f_2 удовлетворяет условию ($Б_0$) теоремы 1. Предположим, далее, что функция f_2 удовлетворяет условию (A_0) теоремы 1, и существуют постоянные d_1, d_2, d такие, что

$$|d_1f_1+d_2f_2|\leqslant d\quad \forall x_2\in[h_2, H_2]\ \text{ и }\ \forall(t, x_1, x'_1, x'_2)\in I\times R^3.$$

Тогда решение задачи (*), (3), (4) существует. Это предположение доказывается точно так же, как и теорема 1 (которая получается, если $d=0$).

Теорема 2. *Пусть функция Φ удовлетворяет условию ($Б_0$) и пусть для заданных A, B найдутся h_2, $H_2\in R$ ($h_2<H_2$) такие, что условие (A_0) выполняется для $\forall x_1\in[-M_1, M_1]$, $\forall x'_1\in[-N_1, N_1]$, где M_1 определяется равенством (25), а N_1 находится из условия ($Б_0$).*

Тогда задача (1)—(4) разрешима для любых $x_1(0)=A_1$, $x_1(\tau)=B_1$ таких, что $|A_1|\leqslant|A|$, $|B_1|\leqslant|B|$.

С помощью этой теоремы легко получается следующий результат.

Пусть в (1), (2) функция Φ имеет вид

$$\Phi=\left(\frac{x_1^2}{a_1^2}-\frac{x_2^2}{a_2^2}+p\right)q,$$

где p, $q\in C(I\times R^4)$, $q\geqslant 0$ (либо $q\leqslant 0$), $p\geqslant 0$, a_1, $a_2\in R$, a_1, $a_2>0$ для $\forall(t, x_1, x_2, x'_1, x'_2)\in I\times R^4$, функция q удовлетворяет условию ($Б_0$) и существует постоянная $p_0>0$ такая, что $p<p_0$ для $\forall(t, x_1, x_2, x'_1, x'_2)\in I\times R^4$. Предположим, наконец, что $a_1D_1>a_2D_2$. Тогда для любых A, $B\in R$ решение задачи (1)—(4) существует.

Теорема 3. *Пусть неубывающая функция $\alpha(x_1)$, $\alpha\in C(R)$ такова, что для любых $(t, x_1, x_2, x'_1, x'_2)\in I\times R^4$ выполняются условия*

$$\Phi(t, x_1, \alpha(x_1), x'_1, x'_2)=0, \tag{26}$$

$$\Phi(t, x_1, x_2, x'_1, x'_2)>0,\quad x_2>\alpha(x_1), \tag{27}$$

$$\Phi(t, x_1, x_2, x'_1, x'_2)<0,\quad x_2<\alpha(x_1). \tag{28}$$

Предположим также, что Φ удовлетворяет условию ($Б_0$) теоремы 1. Тогда решение задачи (1)—(4) существует для любых A, $B \in R$.

Доказательство. Пусть $A=B$, тогда решение задачи (1)—(4) есть $x_1(t)=A$, $x_2(t)=\alpha(A)$. Поэтому предположим, что $A \neq B$ и для определенности будем считать, что $A<B$ (случай $A>B$ рассматривается аналогично). Если при этом $\alpha(A)=\alpha(B)=H$, то

$$\Phi(t, x_1, H, x_1', x_2')=0 \quad \forall x_1 \in [A, B], \; x_1', \; x_2' \in R,$$

и в этом случае решение имеет вид

$$x_1(t)=A+(B-A)\tau^{-1}t, \quad x_2(t)\equiv H, \quad t \in I.$$

Ввиду этого рассмотрим случай, когда $\alpha(A)<\alpha(B)$. Обозначим $h_2=\alpha(A)$, $H_2=\alpha(B)$ и определим функцию f равенством

$$f(t, x_1, x_2, x_1', x_2')=\Phi(t, x_1, \gamma(x_1, x_2), x_1', x_2'), \tag{29}$$

где

$$\gamma(x_1, x_2)=\begin{cases} x_2-H_2+\alpha(x_1), & x_1>B, \\ x_2, & A \leqslant x_1 \leqslant B, \\ x_2-h_2+\alpha(x_1), & x_1<A, \end{cases} \tag{30}$$

для $\forall x_2 \in R$. Легко видно, что $f \in C(I \times R^4)$ и что f удовлетворяет всем условиям теоремы 1, где $h_2=\alpha(A)$ и $H_2=\alpha(B)$. Следовательно, решение задачи (11), (12), (3), (4), где функция f определяется равенствами (29), (30), существует, причем, как и прежде, получаем $h_2 \leqslant x_2(t) \leqslant H_2$ $\forall t \in I$. Покажем, что, кроме того,

$$A \leqslant x_1(t) \leqslant B \quad \forall t \in I. \tag{31}$$

Пусть, например, неравенство $x_1(t) \leqslant B$ $\forall t \in I$ не выполняется. Тогда в некоторой точке $t_0 \in (0, \tau)$ будет максимум функции $x_1(t)$, т. е. $x_1(t_0)>B$, $x_1'(t_0)=0$, $x_1''(t_0) \leqslant 0$.

Если $x_1''(t_0)<0$, то из (28), (29), (30) следует, что в этой точке $f<0$, а из (11) находим $x_1''>0$. Получили противоречие.

Если $x_1''(t_0)=0$, то в достаточно малой окрестности точки t_0 найдется точка t_1, где $x_1''(t_1)<0$. Но в этой точке из (28)—(30) и (11) опять получаем $x_1''(t_1)>0$.

Полученное противоречие доказывает правую часть соотношения (31). Аналогично доказывается справедливость левой части. Но при выполнении (31) $\gamma(x_1, x_2)=x_2$ и функция f совпадает с функцией Φ. Следовательно, решение задачи (11), (12), (3), (4) будет также и решением задачи (1)—(4). Тем самым теорема 3 доказана.

Замечание 1. Несколько более сложными рассуждениями можно доказать теорему 3 предполагая, что неравенства (27), (28) являются нестрогими.

Замечание 2. Если $\alpha(x_1)$ есть произвольная непрерывная функция, заданная на некотором интервале $a<x_1<b$, то для любого отрезка $[a_0, b_0] \in (a, b)$, где α не убывает и где для любого $x_1 \in [a_0, b_0]$ выполняются условия теоремы 3, можно доказать существование решения задачи (1)—(4), если A, $B \in [a_0, b_0]$. При этом для $\forall t \in I$

$$\begin{gathered} \min(A, B) \leqslant x_1(t) \leqslant \max(A, B), \\ \alpha(\min(A, B)) \leqslant x_2(t) \leqslant \alpha(\max(A, B)). \end{gathered} \tag{32}$$

Заметим также, что если неравенства (27), (28) заменить на обратные, то теорема 3 становится ошибочной. Точно так же теорема ошибочна, если $\alpha(x_1)$ есть монотонно убывающая функция. Соответствующие примеры легко построить.

З а м е ч а н и е 3. В биохимии [1] встречается задача (1)—(4), где

$$\Phi = -k_1 x_1 (c_p - x_2) + k_2 x_2 \tag{33}$$

и k_1, k_2, $c_p > 0$ постоянные, D_1, $D_2 > 0$ — коэффициенты диффузии. Здесь x_1, x_2 есть концентрации веществ в растворе и по смыслу задачи величины неотрицательные. В указанной статье посредством численных расчетов исследуется влияние физических параметров (k_1, k_2, c_p) на протекание процесса.

Покажем, что решение задачи (1)—(4), (33) существует и при этом $x_i(t) \geq 0$ $(i = 1, 2)$ $\forall t \in I$, если A, $B \geq 0$.

Из уравнения $\Phi(x_1, x_2) = 0$, которое называется уравнением химического равновесия, находим

$$x_2 = \alpha(x_1) = c_p \frac{k_1 x_1}{k_1 x_1 + k_2}, \quad \frac{-k_2}{k_1} < x_1 < \infty.$$

Следовательно, $\alpha(x_1)$ есть неубывающая функция. Кроме того, для $\forall x_1 \in (-k_1^{-1} \cdot k_2, \infty)$ имеем

$$\Phi(x_1, \alpha(x_1)) = 0,$$

$$\Phi(x_1, x_2) > 0, \quad x_2 > \alpha(x_1), \quad \Phi(x_1, x_2) < 0, \quad x_2 < \alpha(x_1).$$

Поэтому из теоремы 3 и замечания 2 следует существование решения задачи (1)—(4) для A, $B \in (-k_1^{-1} \cdot k_2, \infty)$.

Если A, $B \geq 0$, то $x_1(t) \geq 0$, $x_2(t) \geq 0$, $\forall t \in I$. Это следует из (32) и определения функции $\alpha(x_1)$. Заметим также, что из определения функции $\alpha(x_1)$ имеем $\alpha(x_1) < c_p$, $x_1 \geq 0$, и поэтому из (32) находим, что для $\forall t \in I$

$$\alpha(\min(A, B)) \leq x_2(t) \leq \alpha(\max(A, B)) < c_p. \tag{34}$$

Последнее неравенство понадобится нам в дальнейшем.

2. Единственность решения. Докажем следующую теорему единственности.

Т е о р е м а 4. *Пусть в задаче (1)—(4) функция Φ имеет непрерывные частные производные, причем для $\forall x_1$, x_2, x_1', $x_2' \in R$ и $\forall t \in I$ выполняются условия*

$$\Phi_{x_1} \leq 0, \quad \Phi_{x_2} > 0, \quad \Phi_{x_1'} \leq 0. \tag{35}$$

Тогда решение задачи (1)—(4) единственно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что существуют два решения задачи (1)—(4), $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ и $\bar{\bar{x}}_1$, $\bar{\bar{x}}_2$. Тогда их разность $u_1 = \bar{x}_1 - \bar{\bar{x}}_1$, $u_2 = \bar{x}_2 - \bar{\bar{x}}_2$ будет удовлетворять линейной системе

$$D_1 u_1'' = -(a_1 u_1 + a_2 u_2 + b_1 u_1' + b_2 u_2'), \tag{36}$$

$$D_2 u_2'' = (a_1 u_1 + a_2 u_2 + b_1 u_1' + b_2 u_2') \tag{37}$$

и краевым условиям

$$u_1(0) = u_1(\tau) = 0, \quad u_2'(0) = u_2'(\tau) = 0, \tag{38}$$

где

$$a_1(t) = \int_0^1 \Phi_{x_1}(t, (1-s)\bar{x}_1(t) + s\bar{\bar{x}}_1(t), \bar{x}_2(t), \bar{x}_1'(t), \bar{x}_2'(t))\, ds =$$

$$= \frac{\Phi(t, \bar{x}_1(t), \bar{x}_2(t), \bar{x}_1'(t), \bar{x}_2'(t)) - \Phi(t, \bar{\bar{x}}_1(t), \bar{x}_2(t), \bar{x}_1'(t), \bar{x}_2'(t))}{\bar{x}_1(t) - \bar{\bar{x}}_1(t)}. \tag{39}$$

Последнее выражение имеет смысл при тех $t \in I$, при которых знаменатель не равен нулю. Аналогичные выражения получаются для других коэффициентов. Из интегральных представлений следует, что $a_i, b_i \in C(I)$ $(i=1,2)$ и с учетом (35) получаем

$$a_1(t) \leqslant 0, \quad a_2(t) > 0, \quad b_1(t) \leqslant 0 \quad \forall t \in I. \tag{40}$$

Из (36)—(38) следуют равенства

$$D_1 u_1'' + D_2 u_2'' = 0, \tag{41}$$

$$D_1 u_1 + D_2 u_2 = c_1 t + c_2. \tag{42}$$

Определяя постоянные c_1, c_2 в (42), из условий

$$(D_1 u_1 + D_2 u_2)\,|_{t=0} = D_2 u_2(0), \quad (D_1 u_1 + D_2 u_2)\,|_{t=\tau} = D_2 u_2(\tau)$$

получим

$$D_1 u_1 + D_2 u_2 = D_2 u_2(0) + D_2(u_2(\tau) - u_2(0))\tau^{-1} t. \tag{43}$$

Таким образом,

$$D_1 u_1' + D_2 u_2' = D_2 \tau^{-1}(u_2(\tau) - u_2(0)). \tag{44}$$

Теперь докажем, что задача (36)—(38) при условиях (40) имеет только нулевое решение.

Предположим противное и рассмотрим два основных случая:

$$1) \ |u_2(0)| + |u_2(\tau)| > 0 \ \text{ и } \ 2) \ u_2(0) = u_2(\tau) = 0.$$

В первом случае, не уменьшая общности, можем считать, что $u_2(0) \geqslant 0$ и в соответствии с этим рассмотрим три возможности.

1.1. $u_2(0) > 0$, $u_2(\tau) - u_2(0) \leqslant 0$. Из (44) следует $u_1'(0) \leqslant 0$. Из (37) и условий (38), (40) получим $u_2''(0) > 0$. Поэтому при достаточно малых $t > 0$ из (44) имеем $u_2''(t) > 0$, $u_1(t) < 0$.

Из (37) находим интегральное представление для $u_2'(t)$. Именно

$$u_2'(t) = \exp(B_2(t)) \int_0^t \exp(-B_2(s))\,[a_1(s) u_1(s) + \\ + a_2(s) u_2(s) + b_1(s) u_1'(s)]\,ds, \tag{45}$$

где $B_2(t) = \int_0^t b_2(s)\,ds$. Откуда с учетом (44) находим, что $u_2'(t) > 0$, $u_2(t) > 0$, $u_1'(t) < 0$, $u_1(t) < 0$ при $\forall t \in (0, \tau]$. При $t = \tau$ получаем противоречие с условиями (38). Таким образом, случай 1.1 невозможен.

1.2. $u_2(0) > 0$, $u_2(\tau) - u_2(0) > 0$. Тогда из (44) находим $u_1'(0) = u_1'(\tau) > 0$. Следовательно, внутри I существует точка t_0, где $u_1(t_0) = 0$, $u_1'(t_0) \leqslant 0$.

Из (43), (44) находим $u_2(t_0) > 0$, $u_2'(t_0) > 0$. Теперь из (45), как и в случае 1.1, находим $u_1(t) < 0$, $u_1'(t) < 0$, $u_2(t) > 0$, $u_2'(t) > 0$, $\forall t \in (t_0, \tau]$. При $t = \tau$ снова получаем противоречие. Поэтому случай 1.2 также невозможен.

1.3. $u_2(0) = 0$. Не уменьшая общности, можем считать, что $u_2(\tau) > 0$. Тогда из (44) находим $u_1'(0) = u_1'(\tau) > 0$ и, как в случае 1.2, получаем противоречие.

Значит, первого основного случая $|u_2(0)| + |u_2(\tau)| > 0$ быть не может.

Рассмотрим второй основной случай: $u_2(0) = u_2(\tau) = 0$. Из (43) находим

$$u_2(t) = -D_1 D_2^{-1} u_1(t). \tag{46}$$

Подставляя (46) в (36), получим

$$u_1'' = a(t) u_1 + b(t) u_1', \tag{47}$$

где

$$a(t)=D_1^{-1}(-a_1(t)+D_1D_2^{-1}a_2(t))>0,$$
$$b(t)=D_1^{-1}(-b_1(t)+D_1D_2^{-1}b_2(t)). \tag{48}$$

Пусть $u_1(t)\not\equiv 0$. Тогда, не уменьшая общности, можем считать, что существует точка t_0, где $u_1(t)$ достигает положительного максимума, т. е. $u_1(t_0)>0$, $u_1'(t_0)=0$, $u_1''(t_0)\leqslant 0$. Но из (47), (48) следует $u_1''(t_0)>>0$. Полученное противоречие доказывает, что $u_1(t)\equiv 0$ $\forall t\in I$. Из (46) находим $u_2(t)\equiv 0$. Тем самым единственность доказана.

Замечание 1. В теореме 4 требуется, чтобы условия (35) выполнялись для $\forall x_1, x_2, x_1', x_2'\in R$ и для $\forall t\in I$. Однако в теоремах 1—3 найдены априорные оценки для решений задачи (1)—(4). Следовательно, для единственности решения, находящегося в области, определяемой этими оценками, достаточно, чтобы условия (35) выполнялись только в этой области.

Замечание 2. В теореме 4 вместо существования непрерывных частных производных можно потребовать, чтобы Φ имела по каждой переменной соответствующую монотонность и удовлетворяла локальному условию Липшица по переменным x_1', x_2'. На примерах можно показать существенность всех затребованных условий для единственности решения задачи (1)—(4).

Замечание 3. Из теоремы 4 следует, что решение задачи (1)—(4), (33) при $A, B\geqslant 0$ единственно. Действительно, из (34) находим $x_2(t)<c_p$ $\forall(t)\in I$. Тогда

$$\Phi_{x_1}=-k_1(c_p-x_2)<0\ \ \forall x_2<c_p,\ \ \Phi_{x_2}=k_1x_1+k_2>0,\ \ x_1\geqslant 0.$$

Следовательно, решение единственно.

3. Изложенная выше методика позволяет получить также следующие результаты. Рассмотрим задачу

$$x_i''=f_i(t, x_1, x_2, x_1', x_2')\quad (i=1, 2), \tag{49}$$

$$x_1(0)-ax_1'(0)=A,\quad x_1(\tau)+bx_1'(\tau)=B, \tag{50}$$

$$x_2'(0)=x_2'(\tau)=0\quad (a, b\geqslant 0). \tag{51}$$

Теорема 5. *Пусть $f_i\in C(I\times R^4)$ $(i=1, 2)$ и существуют постоянные h_2, H_2 $(h_2\leqslant H_2)$ d_1, d_2 $(d_1\neq 0)$, p, $q\geqslant 0$ такие, что f_2 удовлетворяет условию (A_0) теоремы 1 и, кроме того, для $\forall x_2\in[h_2, H_2]$, $\forall(t, x_1, x_1', x_2')\in\in I\times R^3$ справедливо неравенство*

$$(\mathrm{A}^1)\quad (d_1x_1'+d_2x_2')^2+(d_1f_1+d_2f_2)(d_1x_1+d_2x_2)\geqslant -\frac{p^2}{2}(d_1x_1+d_2x_2)^2-q,$$

причем $0\leqslant p<p_0$, где p_0 — наименьший положительный корень уравнения $\Delta(p)=0$,

$$\Delta(p)=\frac{a+b}{2}\cos p\tau+\left(1-\frac{abp^2}{4}\right)\frac{\sin p\tau}{p}. \tag{52}$$

Предположим, далее, что для любого $M>0$ существуют постоянные $B>0$, $\varepsilon>0$ такие, что

$$(Б_\varepsilon)\quad |f_i(t, x_1, x_2, x_1', x_2')|\leqslant B(M)(1+x_1'^2+x_2'^2)^{1-\varepsilon},$$
$$|x_1|+|x_2|\leqslant M\ \ \forall t\in I,\ \ \forall x_1', x_2'\in R\ \ (i=1, 2).$$

Тогда решение задачи (49)—(51) существует для любых A, B.

Замечание 1. Пусть существуют постоянные d_1, d_2, d такие, что $|d_1f_1+d_2f_2|\leqslant d$ $\forall x_2\in[h_2, H_2]$, $\forall(t, x_1, x_1', x_2')\in I\times R^3$. Тогда условие (A_1) теоремы 5 выполняется с постоянной $p>0$, которую можно считать сколь угодно малой. Если для функций f_1, f_2 выполняются и остальные условия теоремы 5, то решение задачи (49)—(51) существует для любых A, B. Более того, в этом случае в условии ($Б_\varepsilon$) можно положить $\varepsilon=0$.

Замечание 2. Вместо условий (51) можно рассмотреть условия

$$x_2(0)=V_0, \quad x_2(\tau)=V_1. \tag{53}$$

Тогда при условиях теоремы 5 решение задачи (49), (50), (53) существует для любых A, B, если $V_i \in [h_2, H_2]$ $(i=0,1)$.

Теорема 6. *Пусть в системе (49) $f_i \in C(I \times R^4)$ $(i=1,2)$ и каждая из функций f_1, f_2 удовлетворяет условию ($Б_\varepsilon$) теоремы 5. Предположим, далее, что как функция — f_1, так и функция f_2 удовлетворяют условиям (26), (27), (28) теоремы 3 (с одной и той же функцией $\alpha(x_1)$).*

Тогда решение задачи (49)—(51) существует для любых A, B. Решение задачи (49), (50), (53) существует для любых A, B, если

$$V_i \in [\alpha(\min(A, B)), \alpha(\max(A, B))] \quad (i=0, 1). \tag{54}$$

Замечание. Для решений этих задач справедливы оценки (32).

Теорема 7. *Пусть функция Φ в системе (1), (2) удовлетворяет условиям (35) теоремы 4. Тогда решение задачи (1), (2), (50), (51) единственно для любых A, B.*

Если в системе (1), (2) функция Φ не зависит от переменных x_1', x_2' и удовлетворяет условиям (35) теоремы 4, то решение задачи (1), (2), (50), (53) единственно для любых A, B, V_0, V_1.

Заметим, что указанные задачи встречаются при изучении некоторых диффузионных процессов. Так в [2] эти задачи изучаются в случае, когда

$$f_1=-\alpha_0\beta(x_2-\gamma(1-x_2)x_1), \quad f_2=\alpha_0(x_2-\gamma(1-x_2)x_1), \tag{55}$$

причем постоянные α_0, β, γ, A, B, V_0, $V_1>0$.

Из теорем 6, 7 следует существование и единственность решения этих задач при всех рассматриваемых значениях параметров. Параметры V_i $(i=0,1)$ должны удовлетворять условию $V_i \in [h_2, H_2]$ в случае задачи (1), (2), (50), (51) и условию (54) в случае задачи (1), (2), (50), (53), т. е. если $A<B$, то

$$V_i \in \left[\frac{\gamma A}{1+\gamma A}, \frac{\gamma B}{1+\gamma B}\right].$$

В работе [4] теоремы существования и единственности решения этих задач для функций (55) доказаны при весьма жестких ограничениях на эти параметры другим методом, чем тот, который использован в этой статье.

Литература

1. Gonzales-Fernandes J. M. and Atta S. F.— Mathematical Biosciences, 1981, vol. 54, N 3—4, p. 265—290.
2. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения.— М.: Мир, 1970.— 720 с.
3. Васильев Н. И., Клоков Ю. А. Основы теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений.— Рига: Зинатне, 1978.—184 с.
4. Ruth E., Hanna and J. B. Garner. Mathematical Biosciences, 1981, vol. 63, N 1, p. 9—20.

ВЦ Латвийского государственного университета им. П. Стучки

Поступила в редакцию 27 декабря 1983 г.