

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. А. Изобов, Р. А. Прохорова, О решениях дифференциальной системы с неустойчивым линейным приближением Кошеля–Конти,
Дифференц. уравнения, 2005, том 41, номер 1, 61–72

<https://www.mathnet.ru/de11210>

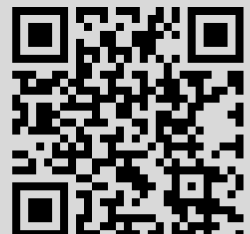
Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.87

17 мая 2025 г., 00:10:05



══════ ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ══════

УДК 517.936

О РЕШЕНИЯХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С НЕУСТОЙЧИВЫМ ЛИНЕЙНЫМ ПРИБЛИЖЕНИЕМ КОППЕЛЯ–КОНТИ

© 2005 г. Н. А. Изобов, Р. А. Прохорова

Рассматриваем системы

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in R^n, \quad t \geq 0, \quad (1_A)$$

линейного приближения с кусочно-непрерывными, вообще говоря, неограниченными на полуоси $[0, +\infty)$ (и ограниченными на всяком конечном промежутке $[0, t_0]$) коэффициентами и матрицами Коши $X_A(t, \tau)$. Как и ранее, будем отождествлять систему (1_A) с ее матрицей коэффициентов и записывать принадлежность системы (1_A) некоторому множеству систем M включением $A \in M$.

Определение 1 [1, с. 131; 2–4]. Будем говорить, что система (1_A) принадлежит множеству $L^p N$ с числом $p \in (0, +\infty)$, и обозначать это включением $A \in L^p N$, если для матрицы Коши $X_A(t, \tau)$ этой системы выполнено условие

$$\int_t^{+\infty} \|X_A(t, \tau)\|^p d\tau \leq C_p(A) = \text{const} < +\infty, \quad t \geq 0. \quad (2)$$

Замечание 1. В предыдущих наших работах это множество $L^p N$ обозначалось через $M^p S$ по аналогии со множеством Коппеля–Конти [1, с. 131; 2; 4–6] $L^p S$ линейных систем, матрицы Коши которых удовлетворяют неравенству

$$\int_0^t \|X_A(t, \tau)\|^p \leq d_p(A) = \text{const} < +\infty, \quad t \geq 0.$$

Новое обозначение $L^p N$ представляется нам более предпочтительным и несет следующую смысловую нагрузку: L^p – линейность системы и суммируемость ее матрицы Коши со степенью $p > 0$, N – неустойчивость системы.

Роль множеств $L^p N$ при $p \geq 1$ в задаче об ограниченности решений линейной неоднородной системы

$$\dot{y} = A(t)y + f(t), \quad y \in R^n, \quad t \geq 0, \quad (3)$$

устанавливает следующая

Теорема Коппеля–Конти ($p = 1$ см. в [1, с. 131–134; $p > 1$ см. в [2]). Для любой вектор-функции $f \in L_q(R_+)$, $1 < q \leq +\infty$ ($L_\infty(R_+) \equiv C(R_+)$), тогда и только тогда существует и притом единственное ограниченное на полуоси $R_+ \equiv [0, +\infty)$ решение системы (3), когда $A \in L^p N$ с числом p , сопряженным с q .

Ранее мы установили [3, см. также 4], что множество $L^p N$ открыто во всем множестве линейных систем (1_A) тогда и только тогда, когда $p \geq 1$. Тем самым, в частности, для всякой системы $A \in L^p N$ при $p \geq 1$ существует такое $\varepsilon(A) > 0$, что и система $A + Q$ с любой кусочно-непрерывной матрицей Q , удовлетворяющей условию $\|Q(t)\| < \varepsilon(A)$, $t \geq 0$, также принадлежит множеству $L^p N$. Это означает, что всякая линейная система, достаточно близкая к системе $A \in L^p N$ при $p \geq 1$, наследует все свойства решений системы (1_A) .

Хорошо известно [1, с. 74], что всякое нетривиальное решение системы $A \in L^p N$ с параметром $p \in (0, +\infty)$ является неограниченным на полуоси $[0, +\infty)$. Возникает вопрос, в каком виде это свойство решений исходной системы (1_A) наследуют решения возмущенной системы

$$\dot{y} = A(t)y + f(t, y), \quad y \in R^n, \quad t \geq 0, \quad (4)$$

с достаточно малыми в том или ином смысле нелинейными возмущениями, в частности, возмущениями f высшего порядка малости, которые и будут рассматриваться в настоящей работе.

Через F_m , $m > 1$, будем обозначать множество кусочно-непрерывных по $t \geq 0$ и непрерывных по $y \in U_{\rho(f)} \equiv \{x \in R^n : \|x\| < \rho(f)\} \subset R^n$ n -мерных вектор-функций $f : [0, +\infty) \times U_{\rho(f)} \rightarrow R^n$, удовлетворяющих неравенству

$$\|f(t, y)\| \leq C_f \|y\|^m, \quad \forall (t, y) \in [0, +\infty) \times U_{\rho(f)}, \quad C_f = \text{const} > 0, \quad m > 1. \quad (5)$$

Всякую такую вектор-функцию f будем называть, следуя [7], m -возмущением.

Определение 2. Введем в рассмотрение множество $L^p N_1$, $p > 0$, всех тех линейных систем (1_A) из $L^p N$, для каждой из которых и всякого кусочно-непрерывного по $t \in [0, +\infty)$ и непрерывного по $y \in U_{\rho(f)}$ m -возмущения $f : [0, +\infty) \times U_{\rho(f)} \rightarrow R^n$, $f \in F_m$, $m > 1$, существует такая окрестность $U_{\varepsilon(A, f)} \subset U_{\rho(f)}$ начала координат радиуса $\varepsilon(A, f) > 0$, что любое нетривиальное решение возмущенной системы (4) с этим m -возмущением, принадлежащее окрестности $U_{\varepsilon(A, f)}$ в начальный момент времени $t = 0$, за конечное время выходит на границу $\partial U_{\varepsilon(A, f)}$ этой окрестности.

Описанию этого множества, важного в исследовании по линейному приближению неустойчивости дифференциальных систем с возмущениями высшего порядка малости, посвящена следующая

Теорема. $L^p N_1 = L^p N \Leftrightarrow p \geq 1$.

Доказательство. Достаточность: $p \geq 1 \Rightarrow L^p N_1 = L^p N$. Покажем, что всякая система $A \in L^p N$ принадлежит множеству $L^p N_1$. Возьмем произвольное m -возмущение $f \in F_m$ и предположим противное: у системы (4) с этими A и f для всякого $\varepsilon > 0$ на бесконечном промежутке $[0, +\infty)$ существует решение $y_\varepsilon(t)$, удовлетворяющее условию $\|y_\varepsilon(t)\| < \varepsilon$ для всех $t \in [0, +\infty)$. Считая $X_A(0) = E$, представим это решение по формуле Коши

$$y_\varepsilon(t) = X_A(t) \left[y_\varepsilon(0) + \int_0^t X_A^{-1}(\tau) f[\tau, y_\varepsilon(\tau)] d\tau \right], \quad t \in [0, +\infty). \quad (6)$$

В силу установленной в [3] сужаемости множества $L^p N$ с возрастанием $p > 0$ справедливо включение $A \in L^1 N$. Для m -возмущения f выполнено условие (5). Поэтому вектор-функция $f[\tau, y_\varepsilon(\tau)]$ на полуоси $[0, +\infty)$ и для $\varepsilon \in (0, \rho(f))$ является ограниченной:

$$\|f[\tau, y_\varepsilon(\tau)]\| \leq C_f \|y_\varepsilon(\tau)\|^m < C_f \varepsilon^m, \quad \tau \in [0, +\infty).$$

Тем самым из условия (2) при $p = 1$ и $t = 0$ следует сходимость интеграла $\int_0^{+\infty} X_A^{-1}(\tau) \times f[\tau, y_\varepsilon(\tau)] d\tau$. Это позволяет на основании равенства (6) получить для решения $y_\varepsilon(t)$ представление

$$\begin{aligned} y_\varepsilon(t) &= X_A(t) \left[C_0 - \int_t^{+\infty} X_A^{-1}(\tau) f[\tau, y_\varepsilon(\tau)] d\tau \right] = \\ &= X_A(t) C_0 - \int_t^{+\infty} X_A(t, \tau) f[\tau, y_\varepsilon(\tau)] d\tau \equiv X_A(t) C_0 + z(t), \quad t \in [0, +\infty), \end{aligned} \quad (7)$$

с ограниченной на полуоси $[0, +\infty)$ функцией $z(t)$. В случае 1) $C_0 \neq 0$ вектор-функция $X_A(t) C_0$ как решение системы (1_A) с $A \in L^1 N$ является неограниченной. Поэтому из представления (7) получаем также и неограниченность вектор-функции $y_\varepsilon(t)$, что вступает в противоречие с неравенством $\|y_\varepsilon(\tau)\| < \varepsilon$, $t \in [0, +\infty)$.

В случае 2) $C_0 = 0$ имеем равенство $y_\varepsilon(t) = z(t)$ и два возможных подслучая:

2₁) $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|y_\varepsilon(t)\| \equiv \varepsilon_0 = 0$; 2₂) $0 < \varepsilon_0 \leq \varepsilon$.

В первом подслучае 2₁), очевидно, существует такой момент $t_0 \in (0, +\infty)$, для которого выполнены неравенства $0 \neq \|y_\varepsilon(t_0)\| \geq \|y_\varepsilon(t)\|$ для всех $t \geq t_0$. Тогда из равенства $y_\varepsilon(t) = z(t)$ и оценок (2) и (5) имеем противоречивые неравенства

$$0 \neq \|y_\varepsilon(t_0)\| \leq \int_{t_0}^{+\infty} \|X(t_0, \tau)\| C_f \|y_\varepsilon(\tau)\|^m d\tau \leq C_f C_1 \varepsilon^{m-1} \|y_\varepsilon(t_0)\| < \|y_\varepsilon(t_0)\|/2 \quad (8)$$

для всех ε , удовлетворяющих условию $0 < C_f C_1 \varepsilon^{m-1} < 2^{-1}$.

Замечание 2. Для начала координат $O \in U_{\rho(f)}$ и всякой отличной от него точки $y \in U_{\rho(f)}$ для m -возмущения f в силу (5) выполнено условие Липшица

$$\|f(t, y) - f(t, 0)\| = \|f(t, y)\| \leq C_f [\rho(f)]^{m-1} \|y - 0\|, \quad t \geq 0.$$

Поэтому нулевое решение $y = 0$ системы (4) обладает свойством единственности, хотя другие ее решения этим свойством могут и не обладать (см. [8]). Тем самым для решения $y_\varepsilon(t)$ с начальным значением $y_\varepsilon(0) \neq 0$ неравенство $\|y_\varepsilon(t)\| > 0$ выполнено в любой момент $t \geq 0$.

Во втором подслучае 2₂) найдется такой, вообще говоря, достаточно большой момент $t = t_0 > 0$, что будет выполнено неравенство $0 \neq 2\|y_\varepsilon(t_0)\| \geq \|y_\varepsilon(t)\|$ для всех $t > t_0$. Оно, как и в (8), позволяет получить следующие противоречивые неравенства:

$$0 \neq \|y_\varepsilon(t_0)\| \leq C_f C_1 \cdot 2^m \varepsilon^{m-1} \|y_\varepsilon(t_0)\| < \|y_\varepsilon(t_0)\|/2$$

для всех удовлетворяющих условию $0 < C_f C_1 \varepsilon^{m-1} < 2^{-1-m}$ чисел ε .

Таким образом, наше предположение о существовании у системы (4) на промежутке $[0, +\infty)$ для всякого $\varepsilon > 0$ нетривиального решения $y_\varepsilon(t)$ (с начальным значением $y_\varepsilon(0) \neq 0$), удовлетворяющего на этом промежутке оценке $\|y_\varepsilon(t)\| < \varepsilon$ для всех $t \geq 0$, неверно. Достаточность теоремы доказана.

Доказательство необходимости $L^p N_1 = L^p N \Rightarrow p \geq 1$ содержит

Лемма. Для любых чисел $p \in (0, 1)$ и $m \in (1, +\infty)$ существует двумерная система $A_p = A \in L^p N$ с кусочно-непрерывными на полуоси $[0, +\infty)$ коэффициентами и такое кусочно-непрерывное по t и бесконечно-дифференцируемое по переменным y_1 и y_2 в области $(0, +\infty) \times R^2$ (с ограниченными на множестве $[0, t_0] \times R^2$ с любым $t_0 \in (0, +\infty)$ частными производными любого конечного порядка) m -возмущение $f_{pm} = f : [0, +\infty) \times R^2 \rightarrow R^2$, что двумерная система

$$\dot{y} = A(t)y + f(t, y), \quad y \in R^2, \quad t \geq 0, \quad (9)$$

имеет счетное число бесконечно продолжимых вправо решений $y^{(n)}(t)$, $n \in N$, убывающих при $t \rightarrow +\infty$ быстрее всякой отрицательной экспоненты (с равными $-\infty$ характеристическими показателями Ляпунова) и равномерно на полуоси $[0, +\infty)$ сходящихся к ее нулевому решению $y = 0$ ($y^{(n)}(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, t \in [0, +\infty)$).

Доказательство леммы. 1. Построение линейной системы. Необходимую двумерную линейную систему (1_A) будем строить в диагональном виде

$$\dot{x} = \text{diag}[a_1(t), a_2(t)]x \equiv D(t)x, \quad x \in R^2, \quad t \geq 0. \quad (1D)$$

Ее коэффициенты определим равенствами: $a_1(t) = a_2(t) = 0$ при $t \in [0, 2)$,

$$a_1(t) = \begin{cases} 1 + (-1)^i p^{-1} \psi_k \ln \psi_k \equiv \alpha_i(k), & t \in [1 + k - (4 - i)\psi_k^{-1}, 1 + k - (3 - i)\psi_k^{-1}) \equiv \\ & \equiv [\tau_i(k), \tau_{i+1}(k)), \quad i = 1, 2, \quad 2 \leq k \in N, \\ 1 & \text{для остальных } t \geq 2, \end{cases}$$

$$a_2(t) = 1 \quad \text{для } t \in [2, 2 + \psi_2^{-1}), \quad a_2(t) = a_1(t - \psi_k^{-1}) \quad \text{для } t \in [k, k + 1), \quad k \geq 2,$$

в которых $\psi_k \equiv \exp[k^2/(1 - p)]$.

Докажем включение $D \in L^p N$, $p \in (0, 1)$. Из представления

$$X_D(t, \tau) = \text{diag} \left[\exp \int_{\tau}^t a_1(\xi) d\xi, \exp \int_{\tau}^t a_2(\xi) d\xi \right]$$

матрицы Коши $X_D(t, \tau)$ диагональной системы (1_D) имеем равенство

$$\|X_D(t, \tau)\| = \max_i \exp \int_{\tau}^t a_i(\xi) d\xi \quad (10)$$

при всяких фиксированных t и τ . Для фиксированного $t \in [0, +\infty)$ через $T_i(t)$, $i = 1, 2$, обозначим принадлежащее промежутку $[t, +\infty)$ множество тех τ (больших или равных t), для которых реализуется равенство (10). Тогда для интеграла

$$J_D(t, +\infty) \equiv \int_t^{+\infty} \|X_D(t, \tau)\|^p d\tau, \quad t \in [0, +\infty), \quad p > 0,$$

имеем соотношения

$$J_D(t, +\infty) = \sum_{i=1}^2 \int_{T_i(t)}^t \exp \int_{\tau}^t p a_i(\xi) d\xi d\tau < \sum_{i=1}^2 \int_t^{+\infty} \exp \int_{\tau}^t p a_i(\xi) d\xi d\tau. \quad (11)$$

Поэтому для доказательства необходимого включения достаточно доказать включения $a_i \in L^p N$, $i = 1, 2$, т.е. установить ограниченность интегралов

$$J_{a_i}(t, \theta) \equiv \int_t^{\theta} \exp \int_{\tau}^t p a_i(\xi) d\xi d\tau, \quad 0 \leq t \leq \theta < +\infty, \quad i = 1, 2.$$

Докажем вначале неравенства

$$J_{a_i}(t, \theta) \leq e, \quad 2 \leq \tau_0(k) \equiv k \leq t \leq \theta < k + 1, \quad i = 1, 2. \quad (12)$$

Если $\theta \leq \tau_1(k)$, то очевидны неравенства $J_{a_i}(t, \theta) < 1$, $i = 1, 2$. Рассмотрим случай $\theta \in [\tau_1(k), k + 1]$. Если при этом $t \geq \tau_2(k)$, то справедливы неравенство $a_1(\tau) \geq 1$ при $\tau \in [t, \theta]$ и оценка $J_{a_1}(t, \theta) < 1$. Если же $t \in [\tau_1(k), \tau_2(k))$, то имеем оценки

$$\begin{aligned} J_{a_1}(t, \theta) &\leq J_{a_1}(\tau_1, \theta) \leq J_{a_1}(\tau_1, k + 1) = J_{a_1}(\tau_1, \tau_2) + \int_{\tau_2}^{k+1} \exp \int_{\tau}^{\tau_1} p a_1(\xi) d\xi d\tau \leq \\ &\leq \int_{\tau_1}^{\tau_2} \exp \int_{\tau_2}^{\tau_1} [p - \psi_k \ln \psi_k] d\xi d\tau + \exp \left(-p \int_{\tau_1}^{\tau_2} a_1(\xi) d\xi \right) \int_{\tau_2}^{k+1} \exp \left(- \int_{\tau}^{\tau_2} p a_1(\xi) d\xi \right) d\tau \leq \\ &\leq 1 + \psi_k \left[\int_{\tau_2}^{\tau_3} \exp \left(- \int_{\tau}^{\tau_2} p a_1(\xi) d\xi \right) d\tau + \int_{\tau_3}^{k+1} \exp \left(- \int_{\tau}^{\tau_2} p a_1(\xi) d\xi \right) d\tau \right] \leq \\ &\leq 1 + \psi(k) \left[\tau_3 - \tau_2 + \exp \left(- \int_{\tau_2}^{\tau_3} p a_1(\xi) d\xi \right) \cdot \int_{\tau_3}^{k+1} \exp \left(- \int_{\tau}^{\tau_2} p a_1(\xi) d\xi \right) d\tau \right] \leq \end{aligned}$$

$$\leq 2 + \int_{\tau_3}^{k+1} e^{-p(\tau-\tau_3)} d\tau < 2 + \psi_k^{-1} < e, \quad \tau_i = \tau_i(k), \quad k \geq 2.$$

Оценка (12) при $i = 1$ доказана. Аналогично устанавливается справедливость этой оценки и в случае $i = 2$. Неравенство (11) доказано.

По определению функций $a_i(t)$ справедливы соотношения

$$p \int_k^{k+1} a_i(\xi) d\xi = p, \quad -p \int_t^{k+1} a_i(\xi) d\xi \leq p(t - k - 1), \quad t \in [k, k + 1], \quad k \geq 2.$$

Поэтому имеют место неравенства

$$\begin{aligned} J_{a_i}(t, l) &= J_{a_i}(t, k + 1) + \sum_{q=k+1}^{l-1} \exp \int_q^t p a_i(\xi) d\xi \cdot J_{a_i}(q, q + 1) \leq \\ &\leq e + e^{p(t-k-1)} \sum_{q=k+1}^{l-1} e^{k+1-q} J_{a_i}(q, q + 1) \leq e \left(1 + \sum_{q=0}^{\infty} e^{-q} \right) = \\ &= e(2e - 1)/(e - 1) < 2e^2, \quad \forall t \in [k, k + 1], \quad \forall l > 1 + k, \quad k \geq 2, \quad i = 1, 2, \end{aligned}$$

из которых вытекают оценки $J_{a_i}(t, +\infty) \leq e^3, t \geq 0$.

Таким образом, доказаны включения $a_i \in L^p N, p \in (0, 1), i = 1, 2$, а тем самым в силу неравенства (11) и включение $D \in L^p N$.

2. Построение возмущенной системы и ее базового решения. Это возмущение $f(t, y)$ будем строить так, чтобы область $[0, +\infty) \times R^2$ допускала разбиение на счетное число подобластей, в каждой из которых возмущенная система (9) была бы треугольной (в частности, диагональной и совпадающей с исходной линейной системой (1_D)), а в целом во всей этой области – как нижне-, так и верхне-треугольной системой. Одна из возникающих здесь трудностей – обеспечение единой для всех рассматриваемых подобластей постоянной $C_f > 0$, осуществляющей оценку (5) во всей области $[0, +\infty) \times R^2$.

Сначала на произвольном промежутке $[k, k + 1), k \geq 2$, построим вспомогательную систему

$$\dot{y} = \text{diag}[a_1(t), a_2(t)]y + g^{(k)}(t, y), \quad y \in R^2, \quad t \in [k, k + 1), \quad (13)$$

с допустимым m -возмущением $g^{(k)} : [k, k + 1] \times R^2 \rightarrow R^2$, имеющую удовлетворяющее крайнему условию

$$y(k) = ((\ln \psi_k \cdot \psi_k^{(p-1)/p})^{1/(m^2-1)}, 0) \equiv (\varphi_k, 0) \in R_+^2, \quad y(k + 1) = (\varphi_{k+1}, 0) \quad (14)$$

решение $y(t)$. При этом для монотонно убывающих величин φ_k выполнены оценки

$$0 < \varphi_{k+1}/\varphi_k < \begin{cases} \exp(-4m^{-2}) < 1, & k \geq 2, \\ \exp \frac{2k}{p(1-m^2)} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0, & k \geq 2. \end{cases} \quad (14i)$$

Затем, распространив это построение на все промежутки $[k, k + 1] \subset [2, +\infty)$, получим вспомогательную систему

$$\dot{y} = \text{diag}[a_1(t), a_2(t)]y + g(t, y), \quad y \in R^2, \quad t \in [0, +\infty), \quad (15)$$

с кусочно-непрерывной по $t \geq 0$ и непрерывной по $y \in R^2$ двумерной вектор-функцией $g(t, y)$, являющейся m -возмущением в области $[0, +\infty) \times R^2$ и совпадающей в области $[k, k + 1] \times R^2$

с вектор-функцией $g^{(k)}(t, y)$, имеющую базовое решение $y(t)$ с показателем Ляпунова $\lambda[y] = -\infty$ и удовлетворяющее краевому условию (14) при всяком $2 \leq k \in N$.

На промежутке $[\tau_0, \tau_1] \equiv [\tau_0(k), \tau_1(k))$ рассмотрим треугольную систему

$$\dot{y}_1 = y_1, \quad \dot{y}_2 = y_2 - C_0(k)|y_1|^m, \quad y = (y_1, y_2) \in R^2, \quad t \in [\tau_0, \tau_1], \quad (13_0)$$

с постоянной $C_0(k) = C_0 < 0$, определяемой ниже (знак "минус" в системе (13₀) позволит упростить построение окончательного допустимого возмущения $f(t, y)$). Ее решение $y(t)$ с начальными значениями $y_1(\tau_0) = \varphi_k$, $y_2(\tau_0) = 0$ своих компонент из (14) имеет представление

$$y_1(t) = \varphi_k \exp(t - \tau_0), \quad y_2(t) = \frac{|C_0|}{m-1} \varphi_k^m e^{m(t-\tau_0)} [1 - e^{(1-m)(t-\tau_0)}], \quad t \in [\tau_0, \tau_1]. \quad (16_0)$$

Постоянную C_0 выберем удовлетворяющей условию $y_2(\tau_1) = \varphi_k^m$, т.е. в силу (16₀) положим

$$|C_0| = (m-1)[1 - \exp(1-m)(\tau - \tau_0)]^{-1} \exp[m(\tau_0 - \tau_1)].$$

Так как неравенство $\tau_1(k) - \tau_0(k) \geq 1/2$ выполнено для всех $k \geq 2$, то постоянная C_0 удовлетворяет условию

$$0 < |C_0(k)| \leq (m-1)e^m(1 - e^{(1-m)/2}), \quad k \geq 2. \quad (17_0)$$

Из системы (13₀) следует положительность производных $\dot{y}_1(t)$ и $\dot{y}_2(t)$ компонент $y_1(t) > 0$ и $y_2(t) > 0$ решения $y(t)$, определенного равенствами (16₀), на интервале (τ_0, τ_1) . Поэтому справедливы оценки

$$\|y(t)\| \leq \|y(\tau_1)\| \leq \sqrt{2} \varphi_k \exp m(\tau_1 - \tau_0) < \sqrt{2} e^m \varphi_k, \quad t \in [\tau_0, \tau_1]. \quad (18_0)$$

На следующем промежутке $[\tau_1, \tau_2]$ положим $g^{(k)}(t, y) = (-C_1|y_2|^m, 0)$, $y \in R^2$, так что система (13) имеет вид

$$\dot{y}_1 = \alpha_1(k)y_1 - C_1 y_2^m, \quad \dot{y}_2 = y_2, \quad y \in R_+^2, \quad t \in [\tau_1, \tau_2], \quad (13_1)$$

параметр $C_1 > 0$ в котором будет выбран ниже. Ее решение $y(t)$ с начальным вектором

$$y(\tau_1) = (\varphi_k e^{\tau_1 - \tau_0}, \varphi_k^m) \quad (19_1)$$

определяется равенствами

$$y_2(t) = \varphi_k^m \exp(t - \tau_1), \quad (16_1)$$

$$y_1(t) = \varphi_k \exp[\alpha_1(k)(t - \tau_1)] \left[e^{\tau_1 - \tau_0} - \frac{C_1}{m - \alpha_1(k)} \varphi_k^{m^2 - 1} (e^{(m - \alpha_1(k))(t - \tau_1)} - 1) \right], \quad t \in (\tau_1, \tau_2).$$

В конечный момент $t = \tau_2$ компоненты этого решения принимают значения

$$\begin{aligned} y_2(\tau_2) &= \varphi_k^m \exp \xi_k, \quad y_1(\tau_2) = \varphi_k \psi_k^{-1/p} e^{\xi_k} \left[e^{\tau_1 - \tau_0} - \frac{C_1}{m_1 - \alpha_1(k)} \varphi_k^{m^2 - 1} (\psi_k^{1/p} e^{(m-1)\xi_k} - 1) \right] \equiv \\ &\equiv \varphi_k \psi_k^{-1/p} e^{\xi_k} (e^{\tau_1 - \tau_0} - C_1 z_k), \quad \xi_k \equiv \psi_k^{-1}. \end{aligned} \quad (20)$$

Воспользовавшись значением φ_k из (14), для величины z_k имеем оценку $z_k > p(2m)^{-1}$, $k \geq 2$. Поэтому выбором числа $C_1 = C_1(k)$, удовлетворяющим условию

$$0 < C_1(k) \leq z_k^{-1} \exp(\tau_1 - \tau_0) < 2em/p, \quad k \geq 2, \quad (17_1)$$

значение $y_1(\tau_2)$ из (20) можно сделать как угодно малым. Учитывая последующее (известное нам) определение системы (13) и ее решения $y(t)$ на промежутках $[\tau_2, \tau_3]$ и $[\tau_3, k+1)$, число $C_1 = C_1(k)$ выберем таким, чтобы выполнялось равенство

$$y_1(\tau_2)\psi_k^{1/p}e^{2\xi_k} \equiv \varphi_k e^{3\xi_k}(e^{\tau_1-\tau_0} - C_1(k)z_k) = \varphi_{k+1}, \quad (21)$$

а тем самым компоненты решения $y(t)$ в конечный момент $t = \tau_2$ принимали значения

$$y_1(\tau_2) = \varphi_{k+1}\psi_k^{-1/p}e^{-2\xi_k}, \quad y_2(\tau_2) = \varphi_k^m e^{\xi_k}. \quad (19_2)$$

Из равенства (21) имеем справедливое в силу (14) включение

$$\exp(\tau_1 - \tau_0) - C_1(k)z_k = \varphi_{k+1}e^{-3\xi_k}/\varphi_k \equiv \gamma_k \in (0, 1).$$

Поэтому необходимое число $C_1(k) = [\exp(\tau_1 - \tau_0) - \gamma_k]z_k^{-1}$ удовлетворяет неравенствам $0 < C_1(k) < z_k^{-1}e^{\tau_1-\tau_0}$, т.е. условию (17₁).

Оценим теперь норму решения $y(t)$ с удовлетворяющими краевым условиям (19₁) и (19₂)-(20) компонентами (16₁) системы (13₁) с только что определенным числом C_1 . Так как $\alpha_1(k) < 0$, то производные $\dot{y}_1(t)$ и $\dot{y}_2(t)$ на этом промежутке соответственно отрицательны и положительны и поэтому на основании равенств (21) выполнены оценки

$$0 < y_1(t) \leq y_1(\tau_1) < e\varphi_k, \quad 0 < y_2(t) \leq y_2(\tau_2) < e\varphi_k^m, \quad t \in [\tau_1, \tau_2],$$

а тем самым и неравенство

$$\|y(t)\| \leq e\sqrt{2}\varphi_k, \quad t \in [\tau_1, \tau_2]. \quad (18_1)$$

На промежутке $[\tau_2, \tau_3]$ возмущение $g^{(k)}$ определим равенством $g^{(k)}(t, y) = (0, -C_2|y_1|^m)$, $y \in R^2$. Тогда на этом промежутке система (13) принимает вид

$$\dot{y}_1 = \alpha_2(k)y_1 > 0, \quad \dot{y}_2 = \alpha_1(k)y_2 - C_2y_1^m < 0, \quad y \in R_+^2, \quad t \in [\tau_2, \tau_3], \quad (13_2)$$

в котором параметр $C_2 = C_2(k) > 0$ будет определен ниже. Компоненты решения $y(t)$ этой системы с начальными значениями (19₂)-(20) имеют представления

$$y_1(t) = y_1(\tau_2) \exp[\alpha_2(k)(t - \tau_2)] = \varphi_{k+1}\psi_k^{-1/p} \exp[-2\xi_k + \alpha_2(k)(t - \tau_2)],$$

$$y_2(t) = e^{\alpha_1(k)(t-\tau_2)} \left\{ \varphi_k^m e^{\xi_k} - C_2\varphi_{k+1}^m \psi_k^{-m/p} e^{-2m\xi_k} \int_{\tau_2}^t e^{[m-\alpha_1(k)](\tau-\tau_2)} d\tau \right\} \stackrel{(13_2)}{\leq}$$

$$\stackrel{(13_2)}{\leq} y_2(\tau_2) = \varphi_k^m e^{\xi_k}, \quad t \in [\tau_2, \tau_3]. \quad (16_2)$$

Для фигурной скобки $\{\dots\}$ в представлении $y_2(\tau_3)$ в (16₂) получим равенство $\{\dots\}_{t=\tau_3} = \varphi_k^m e^{\xi_k}(1 - C_2w_k)$, в котором величина $w_k > 0$ определяется следующим образом:

$$w_k \equiv \frac{p}{p(m-1) + (m+1)\psi_k \ln \psi_k} \psi_k^{1/p} \left(\frac{\varphi_{k+1}}{\varphi_k} \right)^m e^{-(2+m)\xi_k} \left(1 - \psi_k^{-(1+m)/p} e^{(1-m)\xi_k} \right) \equiv$$

$$\equiv \delta_k (\ln \psi_k)^{-1} \psi_k^{(1-p)/p} \exp \left[-\frac{m}{p(m^2-1)}(2k+1) \right] \rightarrow +\infty \quad \text{при } k \rightarrow \infty,$$

причем $\delta_k \rightarrow p/(1+m)$ при $k \rightarrow \infty$. Поэтому существует такая постоянная $d = d(p, m) \in (0, +\infty)$, что выполнено неравенство $w_k \geq d(p, m) > 0$ для всех $k \geq 2$. Тем самым для всякого $k \geq 2$ существует такая удовлетворяющая условию

$$0 < C_2(k) \leq w_k^{-1} \leq d^{-1}(p, m) < +\infty, \quad 2 \leq k \in N, \quad (17_2)$$

постоянная $C_2 = C_2(k)$, что будут выполнены равенства $\{\dots\}_{t=\tau_3(k)} = 0$ для всех $k \geq 2$. Поэтому и в силу равенств (16₂) компоненты решения $y(t)$ в конечный момент $t = \tau_3$ рассматриваемого отрезка $[\tau_2, \tau_3]$ имеют значения

$$y_1(\tau_3) = \varphi_{k+1} \exp(-\xi_k), \quad y_2(\tau_3) = 0, \quad k \geq 2. \quad (19_3)$$

Вместе с тем из (13₂), (16₂) и (19₃) имеем оценки

$$0 < y_1(t) \leq y_1(\tau_3) < \varphi_{k+1}, \quad 0 \leq y_2(t) \leq y_2(\tau_2) < \sqrt{e}\varphi_k^m, \quad t \in [\tau_2(k), \tau_3(k)], \quad k \geq 2,$$

т.е. для нормы решения $y(t)$ – оценку

$$\|y(t)\| < \sqrt{\varphi_{k+1}^2 + e\varphi_k^{2m}} \leq e \begin{cases} \max\{\varphi_{k+1}, \varphi_k^m\}, & k \geq 2, \\ \varphi_{k+1}, & k \geq k(m), \end{cases} \quad t \in [\tau_2(k), \tau_3(k)]. \quad (18_2)$$

Наконец, на последнем промежутке $[\tau_3(k), k+1)$ положим $g^{(k)}(t, y) \equiv 0$, $y \in R^2$. Тогда в силу начальных условий (19₃) компоненты $y_1(t)$ и $y_2(t)$ решения $y(t)$ на отрезке $[\tau_3(k), k+1]$ определяются равенствами $y_1(t) = \varphi_{k+1} \exp(t - k - 1)$ и $y_2(t) \equiv 0$, а для нормы решения справедлива оценка

$$\|y(t)\| \leq \varphi_{k+1}, \quad t \in [\tau_3(k), k+1]. \quad (18_3)$$

В конечный же момент $t = k+1$ выполнено равенство

$$y(k+1) = (\varphi_{k+1}, 0), \quad (19_4)$$

т.е. второе краевое условие (14).

Тем самым в силу “периодичности с периодом 1” определения функций $a_1(t)$ и $a_2(t)$ и произвольности натурального $k \geq 2$ система (15) и ее решение $y(t)$ построены на промежутке $[2, +\infty)$. На промежутке $[0, 2)$, на котором $a_1(t) = a_2(t) = 0$, положим $g(t, y) \equiv 0$, $y \in R^2$. Возмущение $g(t, y)$ является m -возмущением, что обеспечивается общей для всей области $[0, +\infty) \times R^2$ постоянной $C > 0$, являющейся верхней гранью постоянных $|C_0(k)|$ из (17₀), $C_1(k)$ из (17₁) и $C_2(k)$ из (17₂), например, постоянной

$$C = \max\{2me^m/p, 1/d(p, m)\}. \quad (22)$$

Базовое решение $y(t) \in R_+^2$ системы (15), удовлетворяющее краевым условиям (14), (19₁)–(19₃) при всяком $k \geq 2$, оценке

$$\|y(t)\| \leq e^{2m} \max\{\varphi_k, \varphi_k^m, \varphi_{k+1}\} \stackrel{(14_1)}{=} e^{2m} \max\{\varphi_k, \varphi_k^m\}, \quad t \in [k, k+1), \quad k \geq 2, \quad (23)$$

вытекающей из оценок (18_j) при $j = 0, 1, 2, 3$, имеет в силу (23) показатель Ляпунова

$$\lambda[y] = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} t^{-1} \ln \|y(t)\| \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln \varphi_k}{k+1} = -\infty. \quad (23_1)$$

По базовому решению $y(t)$ системы (15) и ее частным видам (13) и (13_l), $l = 0, 1, 2$, построим окончательное необходимое m -возмущение $f(t, y)$ и систему (9), а также необходимую равномерно сходящуюся к нулю последовательность $\{y^{(n)}(t)\}$ ее решений. Для этого используем последовательность чисел

$$c_{-1} = \frac{5}{4}, \quad c_n = 1 - \sum_{l=1}^n \frac{1}{2^{1+l}}, \quad n \in N_0, \quad \{c_n\} \downarrow \frac{1}{2}, \quad (24)$$

и бесконечно дифференцируемую функцию [9, с. 54]

$$e_{01}(x; \alpha, \beta) = \begin{cases} \exp\{-(x - \alpha)^{-2} \exp[-(x - \beta)^{-2}]\}, & x \in (\alpha, \beta), \\ \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{sgn} \left(x - \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \right], & x \notin (\alpha, \beta), \end{cases}$$

с помощью которой определим новую также бесконечно дифференцируемую функцию

$$e_{010}(x; \alpha, \beta, \gamma) = \begin{cases} e_{01}(x; \alpha, \beta), & x \in [\alpha, \beta), \\ 1 - e_{01}(x; \beta, \gamma), & x \in [\beta, \gamma). \end{cases}$$

Первую компоненту вектор-функции $f(t, y) = (f_1(t, y_2), f_2(t, y_1)) : [0, +\infty) \times R^2 \rightarrow R^2$, зависящую только от $y_2 \in R^1$, в области $[0, +\infty) \times R^1$ определим равенством

$$f_1(t, y_2) = \begin{cases} -C_1(k)c_{2l}^{1-m}y_2^m e_{010}(y_2/y_2(t); c_{2l+1}, c_{2l}, c_{2l-1}), & y_2/y_2(t) \in [c_{2l+1}, c_{2l-1}), \\ t \in [\tau_1(k), \tau_2(k)), & l = 0, 1, \dots, k-2, \quad 2 \leq k \in N; \\ 0 & \text{для всех остальных } (t, y_2) \in [0, +\infty) \times R^1. \end{cases}$$

Вторую зависящую только от $y_1 \in R^1$ компоненту $f_2(t, y_1)$ зададим следующим образом:

$$f_2(t, y_1) = \begin{cases} -C_j(k)c_{2l}^{1-m}y_1^m e_{010}(y_1/y_1(t); c_{2l+1}, c_{2l}, c_{2l-1}), & y_1/y_1(t) \in [c_{2l+1}, c_{2l-1}), \\ t \in [\tau_{2j}(k), \tau_{2j+1}(k)), & j = 0, 1, \quad l = 0, 1, \dots, k-2, \quad 2 \leq k \in N, \\ 0 & \text{для всех остальных } (t, y_1) \in [0, +\infty) \times R^1. \end{cases}$$

Очевидно, построенное возмущение $f(t, y)$ является кусочно-непрерывным по $t \geq 0$. Для его компонент $f_1(t, y_2)$ и $f_2(t, y_1)$ справедливы тождества

$$f_{3-i}(t, y_i) \equiv 0 \quad \text{для } y_i \in (-\infty, c_{2k-3}y_i(t)), \quad t \in [0, k+1), \quad 2 \leq k \in N, \quad i = 1, 2, \quad (25_1)$$

$$f_i(t, y_{3-i}) \equiv 0 \quad \text{для } y_{3-i} \geq c_{-1}y_{3-i}(t), \quad i = 1, 2, \quad t \in [0, +\infty), \quad (25_2)$$

где $y_1(t)$ и $y_2(t)$ – компоненты базового решения $y(t)$ системы (15). Поэтому возмущение $f(t, y)$ является бесконечно дифференцируемым по y_1 и y_2 в области $(0, +\infty) \times R^2$.

Замечание 3. Из тождеств (25₁) и (25₂) следует ограниченность всех частных производных любого конечного порядка по y_1 и y_2 от компонент f_1 и f_2 возмущения f во всякой области $[0, t_0] \times R^2$ с конечным $t_0 > 0$. Тем самым все решения системы (9) обладают свойством единственности и всякое решение $u(t)$ этой системы, принимающее в произвольный фиксированный момент $t_0 \in (0, +\infty)$ конечное значение $u(t_0)$, продолжимо как влево до начальной точки $t = 0$, так и бесконечно вправо, т.е. имеет своим промежутком существования $[0, +\infty)$.

Возмущение $f(t, y)$ является и m -возмущением с постоянной

$$C_f = \sup_{k \geq 2} \{c_{2k-4}^{1-m} \max_{j=0,1,2} |C_j(k)|\} < 2^{m-1} \sup_{k \geq 2} \max_{j=0,1,2} |C_j(k)| \leq e^m \max\{me^m/p, 1/d(p, m)\} < +\infty,$$

что следует из представлений функций $f_1(t, y_2)$ и $f_2(t, y_1)$, вытекающего из (24) неравенства $c_n > 1/2$, $n \in N_0$, и равенства (22) для постоянной C – верхней грани множества $\{|C_0(k)|, C_1(k), C_2(k)\}_{k=2}^\infty$.

3. Построение последовательности решений возмущенной системы. Заметим вначале, что в силу равенств $e_{010}(c_{2l}; c_{2l+1}, c_{2l}, c_{2l-1}) = 1$, $l \geq 0$, вытекающих из них тождеств

$$f(t, c_{2l} y(t)) = (f_1(t, c_{2l} y_2(t)), f_2(t, c_{2l} y_1(t))) \equiv c_{2l} g(t, y(t)) \quad (26)$$

на базовом решении $y(t)$ системы (15), справедливых для $t \geq l+2$ на основании (25₁), вектор-функция

$$y^{(k-2)}(t) \equiv c_{2k-4} y(t), \quad k \geq 2, \quad t \geq k, \quad (27)$$

является решением системы (9) на промежутке $[k, +\infty)$. Действительно, непосредственной подстановкой вектор-функции $y^{(k-2)}(t)$ в систему (9) получаем необходимые тождества

$$dy^{(k-2)}(t)/dt = c_{2k-4} \dot{y}(t) \equiv D(t)[c_{2k-4} y(t)] + c_{2k-4} g(t, y(t)) \stackrel{(26)}{=} 0$$

$$\stackrel{(26)}{\equiv} D(t)y^{(k-2)}(t) + f(t, c_{2k-4}y(t)) = D(t)y^{(k-2)}(t) + f(t, y^{(k-2)}(t)), \quad t \geq k.$$

В частности, решение $y(t)$ системы (15) является решением системы (9) на всей полуоси и в силу (27) и (24) имеет обозначение $y^{(0)}(t) \equiv y(t)$.

Решение $y^{(k-1)}(t)$, $k \geq 2$, системы (9), определенное равенством (27) на промежутке $[k+1, +\infty)$, непрерывно продолжим в отрицательном направлении на промежуток $[0, k+1]$ ее же решением, что можно сделать согласно приведенному выше замечанию 3. Начальное (или конечное) значение $y^{(k-1)}(k+1)$ этого строящегося на отрезке $[0, k+1]$ решения $y^{(k-1)}(t)$ системы (9), согласно (14) и (27), определяется равенством

$$y^{(k-1)}(k+1) = c_{2k-2}(\varphi_{k+1}, 0). \quad (28)$$

Так как на промежутке $[\tau_3(k), k+1)$ возмущение $f(t, y)$ в системе (9) тождественно равно $0 \in R^2$, то на этом промежутке решение $y^{(k-1)}(t)$ в силу (28) определяется равенством

$$y^{(k-1)}(t) = y^{(k-1)}(k+1)e^{t-k-1} = c_{2k-2}(\varphi_{k+1}, 0)e^{t-k-1}, \quad t \in [\tau_3(k), k+1], \quad (29)$$

принимая в момент $t = \tau_3(k)$ на основании этого равенства (29) значение

$$y^{(k-1)}(\tau_3(k)) = c_{2k-2}(\varphi_{k+1}, 0)e^{-\xi_k}. \quad (30)$$

На предыдущем промежутке $[\tau_2(k), \tau_3(k))$ по определению функции $f_1(t, y_2)$ она тождественно равна нулю при любых $y_2 \in R^1$. Поэтому первая компонента $y_1^{(k-1)}(t)$ решения $y^{(k-1)}(t)$ системы (9) с начальным (напомним, что мы движемся от точки $t = \tau_3(k)$ влево, в сторону убывания t) значением $y_1^{(k-1)}(\tau_3(k)) = \varphi_{k+1}c_{2k-2}e^{-\xi_k}$, определяемым из равенства (30), на промежутке $[\tau_2(k), \tau_3(k))$ удовлетворяет тождеству $dy_1^{(k-1)}(t)/dt \equiv \alpha_2(k)y_1^{(k-1)}(t)$. Тем самым на отрезке $[\tau_2(k), \tau_3(k)]$ имеем представление

$$y_1^{(k-1)}(t) = \varphi_{k+1}c_{2k-2} \exp[-\xi_k + \alpha_2(k)(t - \tau_3(k))], \quad t \in [\tau_2(k), \tau_3(k)], \quad (31)$$

для первой компоненты $y_1^{(k-1)}(t)$. Так как $y_1(t)$ из (16₂) определяется равенством

$$y_1(t) = \varphi_{k+1} \exp[-\xi_k + \alpha_2(k)(t - \tau_3(k))], \quad t \in [\tau_2(k), \tau_3(k)], \quad (32)$$

то сравнением функций $y_1^{(k-1)}(t)$ из (31) и $c_{2k-3}y_1(t)$ из (32) в силу неравенства $c_{2k-2} < c_{2k-3}$ имеем оценку $y_1^{(k-1)}(t) < c_{2k-3}y_1(t)$ для всех $t \in [\tau_2(k), \tau_3(k)]$. Поэтому в силу (25₁) имеем тождество $f_2(t, y_1^{(k-1)}(t)) \equiv 0$, $t \in [\tau_2(k), \tau_3(k))$, из которого следует, что вторая компонента $y_2^{(k-1)}(t)$ с начальным значением $y_2^{(k-1)}(\tau_3) = 0$ на промежутке $[\tau_2(k), \tau_3(k))$ удовлетворяет равенству $dy_2^{(k-1)}(t)/dt = \alpha_1(k)y_2^{(k-1)}(t)$. Тем самым необходимо $y_2^{(k-1)}(t) \equiv 0$ для всех $t \in [\tau_2(k), \tau_3(k)]$.

Продолжим теперь решение $y^{(k-1)}(t)$ системы (9) с начальным значением

$$y^{(k-1)}(\tau_2) = (\varphi_{k+1}\psi_k^{-1/p}c_{2k-2} \exp(-2\xi_k), 0), \quad (33)$$

полученным из равенства (31), на промежутке $[\tau_1(k), \tau_2(k))$. На этом промежутке $f_2(t, y_1) \equiv 0$ при всех $y_1 \in R^1$. Тем самым справедливы равенства $dy_2^{(k-1)}(t)/dt = y_2^{(k-1)}(t)$ и на основании (33) $y_2^{(k-1)}(\tau_2(k)) = 0$, из которых имеем тождество $y_2^{(k-1)}(t) \equiv 0$ для $t \in [\tau_1(k), \tau_2(k)]$. На отрезке $[\tau_1(k), \tau_2(k)]$ вторая компонента $y_2(t)$ базового решения $y(t)$ положительна. Поэтому неравенство $y_2^{(k-1)}(t) \equiv 0 < c_{2k-3}y_2(t)$, $t \in [\tau_1(k), \tau_2(k)]$, очевидно, и в силу (25₁) имеем тождество $f_1(t, y_2^{(k-1)}(t)) \equiv 0$ на промежутке $[\tau_1(k), \tau_2(k)]$. Это тождество может быть получено

и из равенств $f_1(t, y_2^{k-1}(t)) = f_1(t, 0) \equiv 0$, так как последнее тождество справедливо при всех $t \geq 0$. Поэтому для компоненты $y_1^{(k-1)}(t)$ имеем представление

$$y_1^{(k-1)}(t) = \varphi_{k+1} c_{2k-2} \psi_k^{-1/p} \exp[-2\xi_k + \alpha_1(k)(t - \tau_2(k))], \quad t \in [\tau_1(k), \tau_2(k)], \quad (34)$$

и значение

$$y^{(k-1)}(\tau_1(k)) = \varphi_{k+1} c_{2k-2} \exp(-3\xi_k) \times (1, 0) \quad (35)$$

вектор-функции $y^{(k-1)}(t)$ в момент $t = \tau_1(k)$, вытекающее из представления (34).

Рассмотрим наконец последний промежуток $[\tau_0(k), \tau_1(k))$. На нем имеем $f_1(t, y_2) \equiv 0$ независимо от $y_2 \in R^1$. Поэтому из тождества $dy_1^{k-1}(t)/dt \equiv y_1^{(k-1)}(t)$ имеем в силу начального условия (35) для первой компоненты равенство

$$y_1^{(k-1)}(t) = \varphi_{k+1} c_{2k-2} \exp(-3\xi_k + t - \tau_1), \quad t \in [\tau_0(k), \tau_1(k)]. \quad (36)$$

Сравнивая эту компоненту с первой компонентой $y_1(t) = \varphi_k \exp(t - \tau_0)$, $t \in [\tau_0(k), \tau_1(k)]$, из (16₀) решения $y(t)$ системы (15), получаем, что неравенство $y_1^{(k-1)}(t) < c_{2k-3} y_1(t)$, $t \in [\tau_0(k), \tau_1(k)]$, эквивалентно неравенству

$$\{(1 + 1/k)^2 \exp[(-2k - 1)/p]\}^{1/(m^2 - 1)} < e c_{2k-3} / c_{2k-2},$$

справедливному при всех $k \geq 2$ в силу очевидных неравенств $\{\dots\} < \exp(-2k) < 1$, $c_{2k-2} < c_{2k-3}$, $k \geq 2$. Таким образом, из тождества (25₁) имеем $f_2(t, y_1^{(k-1)}(t)) \equiv 0$, $t \in [\tau_0(k), \tau_1(k)]$, что в силу условия $y_2^{(k-1)}(\tau_1(k)) = 0$ означает равенство $y_2^{(k-1)}(t) \equiv 0$, $t \in [\tau_0(k), \tau_1(k)]$.

Построение на промежутке $[k - 1, k)$ (и всех предшествующих ему, принадлежащих промежутку $[2, k - 1)$) решения $y^{(k-1)}(t)$ системы (9) с начальным условием $y^{k-1}(k) = \varphi_{k+1} c_{2k-2} e^{-1}(1, 0)$ (см. (36)) в точности повторяет только что проведенные рассуждения и построения решения $y^{(k-1)}(t)$ на промежутке $[k, k + 1)$. Единственным отличием здесь является следующее еще более благоприятное обстоятельство: с уменьшением k области (25₁), в которых $f_i(t, y_{3-i}) \equiv 0$, $i = 1, 2$, расширяются, вследствие чего компоненты $y_i^{(k-1)}(t)$ решения $y^{(k-1)}(t)$ на соответствующих принадлежащих $[k - 1, k)$ промежутках следует уже сравнивать не с функциями $c_{2k-3} y_i(t)$, как это было на промежутке $[k, k + 1)$, а с функциями $c_{2k-5} y_i(t)$, где $c_{2k-3} < c_{2k-5}$ и $y_1(t)$ и $y_2(t)$ – компоненты базового решения $y(t)$. В итоге за конечное число шагов мы построим на отрезке $[0, k + 1]$ решение $y^{(k-1)}(t)$ системы (9) с компонентами

$$y_1^{(k-1)}(t) = \varphi_{k+1} c_{2k-2} \exp \int_{k+1}^t a_1(\tau) d\tau, \quad y_2^{(k-1)}(t) \equiv 0, \quad t \in [0, k + 1], \quad (37)$$

и начальным значением

$$y^{(k-1)}(0) = \varphi_{k+1} c_{2k-2} e^{1-k}(1, 0).$$

По определению функции $a_1 \in L^p N$ для нормы решения $y^{(k-1)}(t)$ системы (9) из его представления (37) на промежутке $[0, k + 1)$ имеем оценку

$$\|y^{(k-1)}(t)\| \leq \varphi_{k+1} e^{t-k-1}, \quad t \in [0, k + 1), \quad k \geq 2, \quad (38)$$

а на промежутке $[k + 1, +\infty)$ из равенства (27) и неравенства (14₁) – оценку

$$\|y^{(k-1)}(t)\| < \|y(t)\| < e^{2m^2} \begin{cases} \max\{\varphi_l, \varphi_l^m\}, & t \in [l, l + 1), \quad l \geq k + 1, \\ \varphi_l, & t \in [l, l + 1), \quad l \geq k(p, m), \quad l \geq k + 1. \end{cases} \quad (39)$$

Из неравенств (38) и (39) при достаточно больших k следует оценка

$$\sup_{t \geq 0} \|y^{(k-1)}(t)\| \leq e^{2m^2} \varphi_{k+1} \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow +\infty.$$

Это означает равномерную на полуоси $[0, +\infty)$ сходимости последовательности $\{y^{(k-1)}(t)\}$ решений системы (9) с m -возмущением $f(t, y)$, $m > 1$, к ее нулевому решению $y = 0$. Из оценки же (39) также следует в силу (23₁) равенство $\lambda[y^{(k-1)}] \leq \lambda[y] = -\infty$ для показателей Ляпунова $\lambda[y^{(k-1)}]$ решений $y^{(k-1)}(t)$, т.е. равенство $\lambda[y^{(k-1)}] = -\infty$, $2 \leq k \in N$. Лемма полностью доказана.

Следствие леммы. Утверждение доказанной леммы справедливо и для n -мерных исходных принадлежащих множеству $L^p N$, $p \in (0, 1)$, линейных систем (1_A) и возмущенных систем (4) с m -возмущениями f , $m > 1$.

Для доказательства этого достаточно в случае $n \geq 3$ построенную двумерную систему (1_D) дополнить $(n-2)$ -мерной диагональной системой $\dot{x} = x$, $x = (x_3, \dots, x_n) \in R^{n-2}$, а двумерную нелинейную возмущенную систему (4) с построенным m -возмущением $f : [0, +\infty) \times R^2 \rightarrow R^2$, $m > 1$, также дополнить линейной диагональной системой $\dot{y} = y$, $y = (y_3, \dots, y_n) \in R^{n-2}$ с нулевым $(n-2)$ -мерным m -возмущением $(f_3(t, y), \dots, f_n(t, y)) \equiv (0, \dots, 0)$, $t \geq 0$, $y \in R^{n-2}$. Очевидно, так построенная n -мерная возмущенная система (4) имеет своим решением всякую n -мерную вектор-функцию $Y^{(k-1)}(t) \equiv (y^{(k-1)}(t), O_{n-2}) \in R^n$, $k \in N$, в которой $y^{(k-1)}(t)$ при всяком $k \in N$ – построенное в лемме решение двумерной системы (9), а $O_{n-2} \in R^{n-2}$ – нулевая вектор-функция. Так как нормы решения $Y^{(k-1)}(t)$ n -мерной системы (4) и решения $y^{(k-1)}(t)$ двумерной системы (9) совпадают при всех $t \geq 0$ и любом фиксированном $k \in N$, то, очевидно, справедливы необходимые свойства множества решений $\{Y^{(k-1)}(t)\}$ системы (4): 1) $\lambda[Y^{k-1}] = -\infty$; 2) $Y^{(k-1)}(t) \rightrightarrows O_n \in R^n$, $t \in [0, +\infty)$. Следствие

леммы и необходимость теоремы доказаны.

Следствие теоремы. Нулевое решение системы (4) с линейным приближением $A \in L^p N$, $p \geq 1$, и любым m -возмущением f порядка $m > 1$ неустойчиво по Ляпунову.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Coppel W.A. Stability and Asymptotic Behavior of Differential Equations. Boston, 1965.
2. Conti R. // Funkcialaj Ekvacioj. 1966. V. 9. № 1. P. 23–26.
3. Изобов Н.А., Прохорова Р.А. // Вестн. Бел. ун-та. Сер. 1. Физика. Математика. Механика. 1989. № 2. С. 39–44.
4. Izobov N.A. and Prokhorova R.A. // J. of Dynam. and Differ. Equat. 2003. V. 15. № 2/3. P. 281–303.
5. Conti R. // Tôhoku Math. J. Second Ser. 1980. V. 32. №. 2. P. 279–282.
6. Изобов Н.А., Прохорова Р.А. // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23. № 5. С. 775–791.
7. Виноград Р.Э., Изобов Н.А. // Дифференц. уравнения. 1970. Т. 6. № 2. С. 230–242.
8. Изобов Н.А. // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22. № 10. С. 1671–1688.
9. Гелбаум Б., Олмстед Дж. Контрпримеры в анализе. М., 1967.

Институт математики НАН Беларуси, г. Минск,
Белорусский государственный университет, г. Минск

Поступила в редакцию
19.01.2004 г.