

Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

L. A. Dombrovskii, È. P. Yukina, V. A. Ivanov, Calculation of the electric field and current in an MHD-channel with the use of a viriational formulation of a two-dimensional boundary-value problem, *TVT*, 1990, Volume 28, Issue 1, 136–144

<https://www.mathnet.ru/eng/tvt3361>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.174

May 13, 2025, 13:40:39



УДК 538.4

© 1990 г.

*Л. А. Домбровский, Э. П. Юкина, В. А. Иванов*

**РАСЧЕТ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ И ТОКА В МГД-КАНАЛЕ  
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ВАРИАЦИОННОЙ ФОРМУЛИРОВКИ  
ДВУМЕРНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ**

Предложен метод расчета электрического поля и тока в МГД-канале с учетом эффекта Холла, основанный на использовании вариационной формулировки двумерной краевой задачи относительно потенциала и применении метода конечных элементов. Представлены оценки точности метода. Разработан итерационный алгоритм расчета МГД-канала, включающий расчеты неравновесного сверхзвукового двухфазного течения и электрического поля. Представлен пример расчета фарадеевского МГД-канала.

В настоящее время методы расчета электродинамических параметров МГД-генераторов в двумерном приближении разработаны достаточно полно и активно используются при расчетно-теоретических исследованиях [1–3]. Основной метод численного решения задачи — конечно-разностное решение краевых задач для функции тока и для потенциала. В то же время характер краевой задачи указывает на возможные преимущества вариационной формулировки и применения метода конечных элементов (МКЭ):

— локальные особенности электрического поля обуславливают целесообразность использования существенно неравномерных сеток, что легко достигается в МКЭ;

— вариационная формулировка и аддитивность соответствующих функционалов позволяют использовать локальные координаты в пределах конечного элемента; в результате появляется новая возможность для описания анизотропии проводимости, связанной с эффектом Холла, и существенно упрощается постановка граничных условий при сложной форме расчетной области;

— нелокальные граничные условия, связанные со спецификой коммутации электродов, могут быть сравнительно просто учтены при составлении полной системы линейных алгебраических уравнений в МКЭ.

Имеющийся опыт применения МКЭ при решении ряда задач математической физики [4–6] и наличие соответствующих программ делают целесообразной аналогичную разработку применительно к расчету электрического поля и тока в канале МГДГ.

**1. Математическая формулировка и метод решения.** В силу стационарности задачи закон сохранения электрического заряда эквивалентен условию неразрывности электрического тока

$$\nabla \mathbf{j} = 0. \quad (1)$$

Уравнение (1) для вектора плотности электрического тока является основой дифференциальной формулировки электродинамической задачи.

Принимая обобщенный закон Ома

$$\mathbf{j} = \hat{\sigma} \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{V} \times \mathbf{B}) \quad (2)$$

и вводя потенциал электрического поля, вместо (1) получаем следующее уравнение для потенциала:

$$\nabla (\hat{\sigma} \nabla \varphi) = \nabla \mathbf{g}, \quad (3)$$

где тензор проводимости

$$\hat{\sigma} = \begin{vmatrix} \lambda & -\beta\lambda & 0 \\ \beta\lambda & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{vmatrix}, \quad \lambda = \frac{\sigma_0}{1 + \beta^2},$$

индукционный ток  $\mathbf{g} = \hat{\sigma} \mathbf{V} \times \mathbf{B}$ .

Уравнение (3) в сочетании с граничными условиями для потенциала в общем случае представляет трехмерную краевую задачу. В данной работе рассмотрение ограничивается такими условиями, при которых решение может быть получено на основе двумерной формулировки, т. е. при  $\partial\varphi/\partial z = 0$  ( $z$  — направление внешнего магнитного поля  $\mathbf{B}$ ). Вопрос о возможности замены строгого трехмерного решения приближенным двумерным оказывается тривиальным только в отдельных случаях и заслуживает специального рассмотрения [1, 3].

Для двумерной задачи

$$\hat{\sigma} = \lambda \begin{vmatrix} 1 & -\beta \\ \beta & 1 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{g} = \hat{\sigma} \mathbf{B} \begin{vmatrix} v \\ -u \end{vmatrix}, \quad (4)$$

где  $u, v$  — компоненты вектора скорости  $\mathbf{V}$ . Асимметрия тензора проводимости, связанная с эффектом Холла, приводит к тому, что при  $\lambda\beta = \text{var}$  дифференциальный оператор в уравнении для потенциала даже при  $\lambda = \text{const}$  содержит первые производные. Подробная запись уравнения (3) в декартовых координатах с учетом (4) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) - \frac{\partial \lambda \beta}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \lambda \beta}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \\ = \frac{\partial}{\partial x} [\lambda B (v + \beta u)] + \frac{\partial}{\partial y} [\lambda B (\beta v - u)]. \end{aligned} \quad (5)$$

Обычная формулировка краевых задач включает граничные условия следующего вида:

$$(\hat{\sigma} \nabla \varphi)_n = \alpha (\theta - \varphi). \quad (6)$$

Граничное условие третьего рода (6) может быть использовано как наиболее общая запись, практически включающая варианты граничных условий первого и второго рода.

В задачах электродинамики встречаются и более сложные нелокальные условия, связанные с коммутацией электродов МГД-канала. Появление нелокальных граничных условий физически связано с тем, что в расчетную область обычно не включают всю электрическую цепь.

Рассмотрим сначала вариационный метод решения классической краевой задачи для уравнения Пуассона (3) при симметричном тензоре проводимости, т. е. без учета эффекта Холла. Возможны различные вариационные формулировки задачи, но предпочтительнее такая, которая позволяет понизить порядок дифференциального оператора в функционале. Можно показать, что такой функционал для краевой задачи (3), (6) имеет вид

$$\chi = \int_{\tau} \left[ \frac{1}{2} (\hat{\sigma} \nabla \varphi) \nabla \varphi + f \varphi \right] d\tau + \int_s \alpha \varphi \left( \theta - \frac{\varphi}{2} \right) ds, \quad (7)$$

где  $f = \nabla \mathbf{g}$ . Для нахождения поля потенциала из условия минимума функционала (7) может быть использован метод конечных элементов и разработанные алгоритмы [4–6], в которых реализован вариант МКЭ на треугольных элементах при линейном представлении искомой функции в пределах элемента.

Эффект Холла может быть учтен при определении поля потенциала двумя способами: путем итераций при начальном приближении без членов с производными от  $\lambda\beta$  в уравнении (5) либо введением в элементах локальных переменных, в которых тензор проводимости имеет диагональный вид. Сущность второго способа можно пояснить на следующем примере:

уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + k \frac{\partial \varphi}{\partial x} = f \quad (8)$$

при  $\lambda, k = \text{const}$  приводится к виду

$$\frac{\partial}{\partial x'} \left( \lambda^* \frac{\partial \varphi}{\partial x'} \right) = f \quad (9)$$

заменой переменной  $x$  на  $x' = \exp(kx/\lambda)$ . При этом  $\lambda^* = k^2(x')^2/\lambda$ .

**2. Оценка точности алгоритма на модельных задачах.** Рассмотрим краевую задачу

$$\sigma \nabla \varphi = f, \quad \varphi(x, 0) = 0, \quad \varphi_x'(0, y) = \varphi_x'(x_0, y) = \varphi_y'(x, y_0) = 0. \quad (10)$$

Схема расчетной области показана на рис. 1, а, где  $x_0 = 4, y_0 = 2$ .

Задача (10) имеет одномерное аналитическое решение

$$\varphi = \frac{fy_0^2}{\sigma} \frac{y}{y_0} \left( \frac{1}{2} \frac{y}{y_0} - 1 \right). \quad (11)$$

Сравнение численного решения двумерной краевой задачи (10) с аналитическим решением (11) при  $\sigma = 2, f = -1$  показано в табл. 1. Незначительное отличие величин  $\varphi$  по четным и нечетным сеточным линиям характерно для МКЭ. Средние величины совпадают с точным решением.

В большинстве случаев при расчете МГД-канала целесообразно решать электродинамическую задачу в области, включающей не только поток проводящей среды, но и стенки канала. Этот прием облегчает постановку граничных условий и позволяет рассчитать распределение тока в электродных стенках. Простейший пример такой задачи для расчетной области рис. 1, б выглядит следующим образом: поток в зоне  $y < y_2$  ( $y = 0$  — плоскость симметрии) ограничен стенкой, занимающей пространство  $y_2 < y < y_0$ . Во всей расчетной области  $\sigma = \text{const}$ . Индукционный ток  $g = 1$  при  $y < y_1$  и  $g = 0$  при  $y > y_2$ . Зону  $y_1 < y < y_2$  занимает пограничный слой потока с линейным изменением индукционного тока. Краевая задача для уравнения

$$\nabla (\sigma \nabla \varphi) = \nabla g \quad (12)$$

с граничными условиями (10) имеет одномерное аналитическое решение

$$\varphi = \frac{g}{\sigma} \cdot \begin{cases} y, & 0 \leq y \leq y_1 \\ y^{-1/2}(y-y_1)^2/(y_2-y_1), & y_1 < y < y_2 \\ (y_1+y_2)^2, & y_2 \leq y \leq y_0. \end{cases} \quad (13)$$

Для значений  $\sigma = 2, y_1 = 0,95, y_2 = 1, y_0 = 2$  в табл. 2 представлено сравнение численного решения с аналитическим (13), свидетельствующее о высокой точности расчетов и о методических преимуществах введения переходного слоя по индукционному току.

Обращаясь к возможностям МКЭ по учету нелокальных граничных условий, рассмотрим случай, когда участок МГД-канала набран из наклонных проводящих рамок. При этом в сечении (рис. 1, в) распределения потенциала на участках АВ и СД совпадают. Это условие может быть учтено в МКЭ при формировании расширенной матрицы полной системы линейных алгебраических уравнений. Достаточно отождествить соответствующие граничные узлы конечно-элементного разбиения. Чтобы при этом не возросла ширина полосы ленточной матрицы, удобно использовать показанную на рис. 1, в деформированную схему триангуляции области с таким расчетом, чтобы отождествляемые узлы имели соседние номера в построчечной глобальной нумерации вершин элементов.

Одна из особенностей электрических полей в условиях, когда стенки канала содержат чередующиеся электроды и изоляторы, состоит в рез-

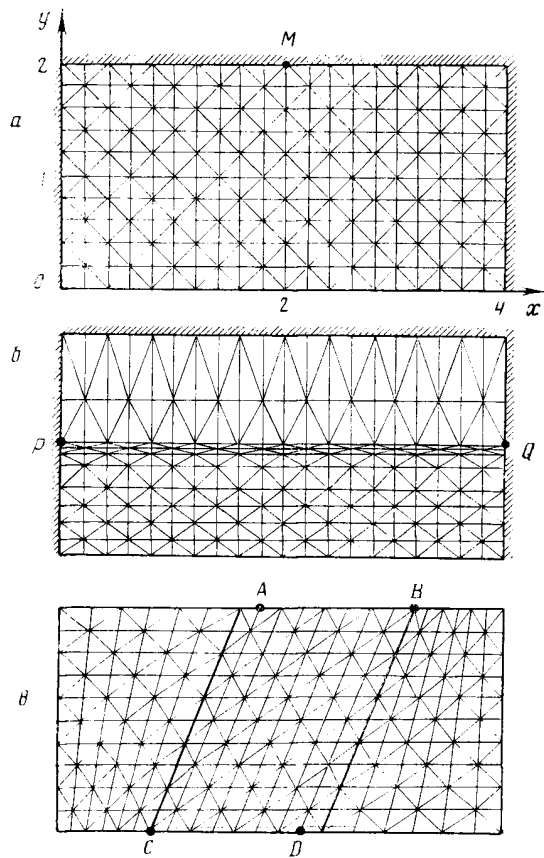


Рис. 1. Схемы расчетных областей для модельных задач

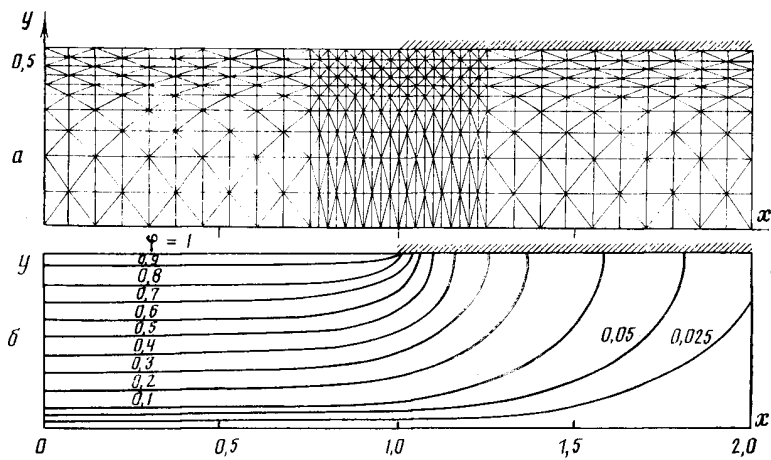


Рис. 2. Схема расчетной области (а) и электрическое поле (б) для модельной задачи с разрывным граничным условием

ком изменении нормальной компоненты тока при переходе от одного участка стенки к другому. Для моделирования простейшего варианта такой неоднородности граничных условий рассмотрим следующую краевую задачу в бесконечной по  $x$  полосе  $0 \leq y \leq y_0$ :

$$\Delta\varphi=0; \varphi(x, 0)=0, \varphi(-|x|, y_0)=1, \varphi_y'(|x|, y_0)=0. \quad (14)$$

Аналитическое решение задачи (14) получается с помощью метода кон-

Таблица 1

y	Потенциал φ		
	Численное решение		Аналитическое решение
	нечетные сеточные линии	четные сеточные линии	
0,2	0,189	0,191	0,19
0,4	0,361	0,359	0,36
0,6	0,509	0,511	0,51
0,8	0,641	0,639	0,64
1,0	0,749	0,751	0,75
1,2	0,841	0,839	0,84
1,4	0,909	0,911	0,91
1,6	0,961	0,959	0,96
1,8	0,989	0,991	0,99
2,0	1,001	0,999	1,00

Таблица 2

y	Потенциал φ			
	Численное решение		Аналитическое решение	
	нечетные сеточные линии	четные сеточные линии	y <sub>1</sub> =0,95	y <sub>1</sub> =1
0,3	0,1500	0,1500	0,15	0,15
0,6	0,2999	0,3001	0,3	0,3
0,8	0,3996	0,4004	0,4	0,4
1	0,4875	0,4875	0,4875	0,5

формных отображений и имеет вид

$$\varphi = \frac{2}{\pi} \arcsin[(1+F-\sqrt{1-2F \cos 2\pi y + F^2})/2], \quad F = \exp(2\pi x). \quad (15)$$

Заметим, что в монографии [7] аналогичное решение дано с ошибкой.

Для расчетной области рис. 2, а выполнено сопоставление численного решения с аналитическим. Для исключения различий, связанных с ограниченностью расчетной области при численном решении, на поверхностях  $x=0$  и  $2$  задавались значения потенциала по аналитическому решению (15). Поле потенциала в расчетной области показано на рис. 2, б. Данные табл. 3 указывают на существенное увеличение точности численного решения (примерно вдвое) при переходе к неравномерной сетке рис. 2, а.

Для оценки возможностей алгоритма по учету эффекта Холла рассмотрим модельную краевую задачу для уравнения

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -1 \quad (16)$$

при граничных условиях (10). Аналитическое решение очевидно

$$\varphi = y + (1 - e^{-y}) e^{y_0}. \quad (17)$$

Согласно изложенному выше методу, эта задача заменой переменной  $y' = \exp(y)$  может быть сведена к краевой задаче для уравнения Пуассона

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y'} \left[ (y')^2 \frac{\partial \varphi}{\partial y'} \right] = -1. \quad (18)$$

Результаты численного решения при помощи МКЭ сравниваются с аналитическим решением (17) в табл. 4, где представлены также данные итерационного решения уравнения (16), при котором в качестве начального приближения ( $n=1$ ) использовалось решение уравнения  $\Delta \varphi = -1$ . Из табл. 4 видно, что точность численного решения в преобразованных

Таблица 3

$x-1$	Потенциал на поверхности $y=y_0$		
	численное решение		аналитическое решение
	равномерная сетка	неравномерная сетка	
0,1	0,564	0,540	0,521
0,2	0,382	0,369	0,358
0,4	0,195	0,188	0,184
0,7	0,0074	0,0071	0,0071

Таблица 4

$y$	Потенциал $\Phi$				
	итерационное решение			численное решение в преобразованных координатах	аналитическое решение
	$n=3$	$n=5$	$n=10$		
0,4	1,96	2,05	2,06	2,02	2,04
0,8	3,17	3,29	3,30	3,23	3,27
1,2	3,86	3,99	4,00	3,92	3,96
1,6	4,20	4,33	4,34	4,25	4,30
2,0	4,29	4,42	4,43	4,34	4,39

координатах такая же, как и точность итерационного решения: погрешность расчетов контрольного варианта составляет  $\sim 1\%$ . При этом решение в преобразованных координатах экономит время вычислений и не требует запоминания результата предыдущего расчета. В то же время итерационный метод обладает большей общностью. Следует отметить также, что сходимость итерационного процесса улучшается при уменьшении безразмерного параметра  $ky_0/\lambda$ , поскольку начальное приближение лучше соответствует точному решению.

Представленные данные свидетельствуют об удовлетворительной точности и разнообразных возможностях предлагаемого численного метода решения электродинамической задачи.

**3. Газодинамическая модель и организация итерационного процесса.** Для МГДГ, использующих в качестве рабочего тела слабоионизованную низкотемпературную плазму, магнитное число Рейнольдса  $Re_m \ll 1$ . При этом расчет МГД-канала проводится в заданном внешнем магнитном поле.

При рассмотрении течения газа с частицами из-за сложности расчета неравновесного двухфазного течения [8] целесообразно, следуя [9], использовать одномерную газодинамическую модель и монодисперсное приближение. Система уравнений, описывающая течение газа с частицами по каналу вдоль оси  $x$ , имеет следующий вид [8, 9]:

$$\begin{aligned}
 \rho u A &= G, \quad p = \rho RT, \\
 \rho u u' &= j_v B - p' - w \rho u u_p', \\
 \rho u (c_p T + u^2/2)' &= j E - w \rho u (u_p u_p' + c_s T_p'), \\
 u_p u_p' &= \psi_1 (u - u_p), \quad u_p T_p' = \psi_2 (T - T_p).
 \end{aligned} \tag{19}$$

Здесь  $u_p$ ,  $T_p$  — скорость и температура частиц;  $w$  — отношение массовых долей конденсированной и газовой фаз;  $G$  — расход газа;  $\psi_1$ ,  $\psi_2$  — функции сопротивления и теплообмена частицы;  $c_s$  — теплоемкость материала частиц.

Совместное решение электродинамической и газодинамической задач осуществляется при помощи итераций. В начальном приближении при расчете поля течения принимается  $j=0$ . Задача Коши для системы уравнений (19) с начальными условиями на входе в канал по «псевдогазу» [8] решается методом Рунге — Кутты.

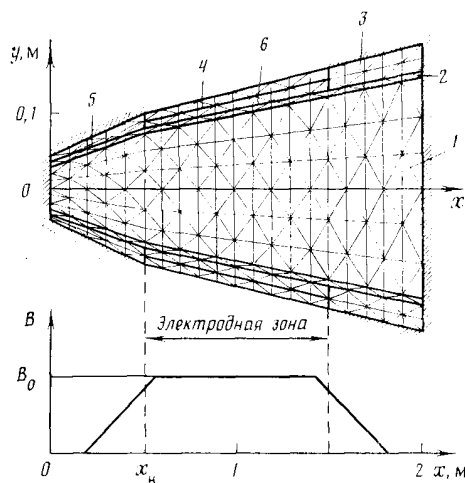


Рис. 3

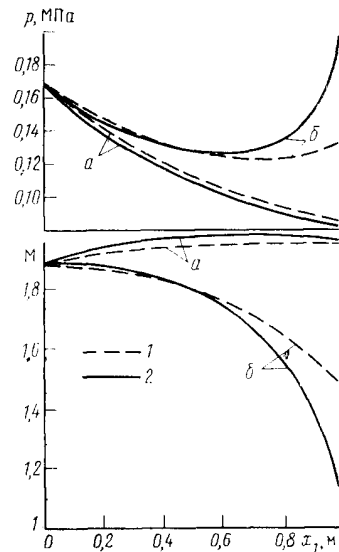


Рис. 4

Рис. 3. Схема расчетной области и профиль индукции магнитного поля для фарадеевского МГД-канала

Рис. 4. Распределение статического давления и числа Маха по длине канала ( $x_1 = x - x_n$ ): а -  $B=1$  Т, б - 1,75; 1 - «псевдогаз», 2 - неравновесное двухфазное течение

При простой электрической схеме МГД-канала расчет напряженности электрического поля и тока может быть выполнен в одномерном приближении [7]. В частности, для фарадеевского канала со сплошными электродами имеем

$$j_y = \lambda(E_y - uB), \quad E_y = \delta\phi/y_0, \quad j_x = -\beta j_y, \quad E_x = 0,$$

$$\delta\phi = R_n \int_0^{x_0} \lambda z_0 u B dx / \left( 1 + R_n \int_0^{x_0} \lambda \frac{z_0}{y_0} dx \right). \quad (20)$$

Здесь  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$  — длина, высота и ширина канала;  $R_n$  — сопротивление нагрузки. Одномерная электродинамическая модель (20) использовалась для анализа итерационного процесса. Расчеты показали, что нелинейность задачи приводит к немонотонной сходимости со значительной амплитудой колебаний решения при итерациях вплоть до возникновения ложного кризиса течения. Улучшение сходимости итерационного процесса достигается введением нижней релаксации плотности тока и напряженности электрического поля.

**4. Пример расчета МГД-канала.** Рассмотрим сверхзвуковое двухфазное течение в фарадеевском МГД-канале со сплошными электродами. Схема канала показана на рис. 3. Параметры потока на входе в электродную зону:  $p=0,168$  МПа,  $T=2410$  К,  $w=0,53$ , показатель адиабаты  $\kappa=1,32$ , среднемассовый диаметр частиц окиси алюминия  $d_{13}=41$  мкм. Проводимость среды и подвижность электронов определялись по формулам:  $\sigma_0 = (7,75 \cdot 10^5 / \sqrt{p}) T^{0,75} / \exp(22650/T)$ ,  $\mu_e = 1240 \sqrt{T/p}$ .

Результаты газодинамических расчетов по длине электродной зоны с одномерной электродинамической моделью (20) при  $R=16$  мОм и двух значениях  $B=1$  и 1,75 Т показаны на рис. 4. Расчеты выполнены при отсутствии запаздывания частиц в начальном сечении. Модель «псевдогаза» [8] удовлетворительно описывает параметры двухфазного течения всюду, кроме зоны интенсивного торможения потока ( $x_1 > 0,7$  м при  $B=1,75$  Т), где получаются заниженные значения градиента давления. Последнее является важным, поскольку модель «псевдогаза» искажает оценки возможного отрыва потока [9].



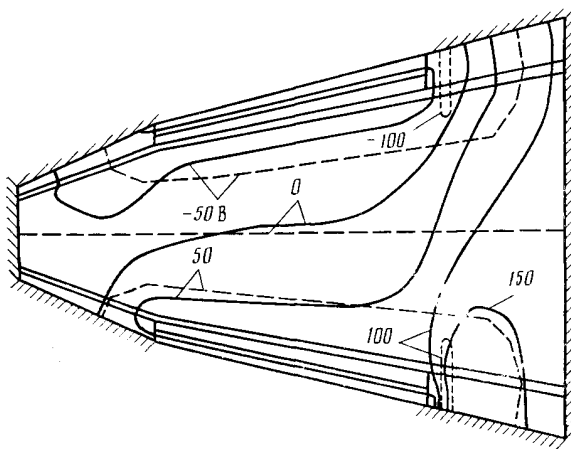


Рис. 5

Рис. 5. Электрическое поле в МГД-канале: штриховые линии – без учета эффекта Холла, сплошные – с учетом

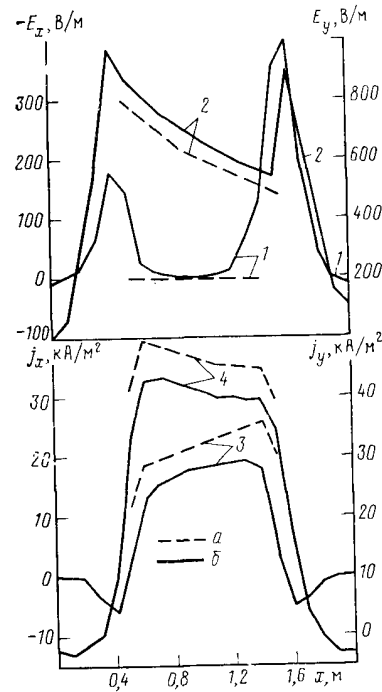


Рис. 6

Рис. 6. Напряженность электрического поля и плотность тока в МГД-канале: *a* – одномерное решение, *b* – двумерное; 1 –  $E_x$ , 2 –  $E_y$ , 3 –  $j_x$ , 4 –  $j_y$

На рис. 5, 6 представлены данные электродинамических расчетов для  $B_0=1$  Т. При формулировке двумерной задачи электродинамики использовались ранее описанные приемы: в расчетную область (рис. 3) включены стенки канала, на внутренней поверхности стенок введен переходной слой потока, эффект Холла учитывается при помощи итераций (в данном варианте потребовалось всего три итерации). Нагрузка моделируется слоем материала 4. Слой *b* обеспечивает выравнивание потенциала вдоль электрода. На заштрихованной части поверхности  $\partial\phi/\partial n=0$ , на внешней поверхности проводящих слоев  $\phi=0$ .

Крайевые зоны электродного участка канала отличаются существенно двумерным распределением потенциала (рис. 5), симметрия которого нарушается из-за эффекта Холла. У границ электродной зоны, как следует из рис. 6, образуются токовые вихри. Использование одномерного приближения приводит к завышению тока и более низкой расчетной напряженности поля. Для рассматриваемого генератора при безотрывном режиме течения это расхождение невелико и по полному току составляет  $\sim 10\%$ , что оправдывает применение одномерной электродинамической модели при отработке методов расчета течения в МГДГ. Вместе с тем более совершенное двумерное описание течения в канале, особенно при учете отрывных явлений и возможного кризиса течения, должно сопровождаться двумерным электродинамическим расчетом. В связи с этим использование предложенного вариационного метода представляется перспективным.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ватажин А. Б., Любимов Г. А., Регирер С. А. Магнитогидродинамические течения в каналах. М.: Наука, 1970. 672 с.
2. Магнитогидродинамическое преобразование энергии. Физико-технические аспекты/Под ред. В. А. Кириллина. А. Е. Шейндлина. М.: Наука, 1983. 367 с.

- 
3. Daniel V. W. A new approach to the MHD electrical problem. AIAA Paper № 86-0131, 1986.
  4. Баркова Л. Г., Домбровский Л. А., Савельев В. И. Применение метода конечных элементов для расчета теплового и напряженно-деформированного состояния конструкций. Тр. IX конф. молодых ученых. М., МФТИ. 1984.— Деп. в ВИНТИ 28.08.84 № 6029-84.
  5. Домбровский Л. А., Баркова Л. Г. // ТВТ. 1986. Т. 24. № 4. С. 762.
  6. Домбровский Л. А., Баркова Л. Г., Назель Ю. А. // Техническая электродинамика. 1987. № 5. С. 19.
  7. Вулис Л. А., Генкин А. Л., Фоменко Б. А. Теория и расчет магнитогидродинамических течений. М.: Атомиздат, 1971. 384 с.
  8. Стернин Л. Е. Основы газодинамики двухфазных течений в соплах. М.: Машиностроение, 1974. 212 с.
  9. Головин А. П., Догадаев Р. В., Панченко В. П., Якушев А. А. Тр. IX Междунар. конф. по МГД-преобразованию энергии. Т. 1. М., 1981. С. 206.

Москва

Поступила в редакцию  
26.09.88