Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

G. V. Dorofeev, Nucleus and center of nonassociative rings,
Algebra Logika, 1973, Volume 12, Number 5, 530–549

https://www.mathnet.ru/eng/al1398

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
https://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 18.97.14.91
December 16, 2025, 20:54:50

Алгебра и логика, 12, № 5 (1973), 530-549.

УДК 519.48

ЦЕНТРЫ НЕАССОЦИАТИВНЫХ КОЛЕЦ

Г.В.ДОРОФЕЕВ

В решении вопросов, связанных с описанием структуры неассоциативных колец и в особенности структуры простых и первичных колец различных многообразий, важную роль играет предварительное выяснение структуры центров таких колец. Для этого, в свою очередь, полезно знать, в каких соотношениях находятся между собой основные "центральные" подмножества: центр, ассоциативный центр и коммутативный центр кольца*).

Особенно подробно вопросы такого рода изучались в теории альтернативных колец, где установлено, в частности, что в первичном неассоциативном альтернативном кольце все три центра совпадают [4]. В работе [14] М.Слейтер исследовал возможно более слабые условия, обеспечивающие это совпадение. В этой работе содержатся также обстоятельные рассуждения о существе проблемы и отмечается, что при её постановке разумно ограничиться кольцами, в некотором смысле "чисто неассоциативными", поскольку в любом классе колец, содержащих ассоциативные, но не коммутативные кольца, вопрос о совпадении центров решается, разумеется, отрицательно.

Чистая неассоциативность может, естественно, пониматься по-разному, и ниже мы принимаем определение, данное М.Слейтером: кольцо называется чисто неассоциативным, если оно не имеет идеалов, лежащих в ассоциативном центре (иначе, ядерных идеалов). В этой же работе М.Слейтер сформулировал несколько гипотез, связанных с соотношением между центрами альтернативных колец.

Отметим также, что, как показал А.Теди в [16], в простом кольце типа (-1,1) центр совпадает с ассоциативным центром.**)

---

*) Все определения см. ниже в соответствующих пунктах.

**) Здесь и ниже во введении при формулировке результатов мы опускаем для краткости ограничения на аддитивную группу кольца.

Между тем, как оказалось, существо рассмотренных в [14] вопросов, связанных с центрами, не использует специфики альтернативных колец и связано, по существу, с некоторыми свойствами ассоциативного центра. Это свойство состоит в том, что ассоциативный центр альтернативного кольца замкнут относительно коммутирования с произвольным элементом кольца.

Это условие и взято нами в качестве определения некоторого класса колец, которые ниже названы α - к о л ь ц а м и. Именно, кольцо A называется α - к о л ь ц о м, если для любого элемента n его ассоциативного центра N и любого $x \in A$

$$[n, x] \in N. \qquad (\alpha)$$

Условие (α), как легко видеть, может быть записано в виде условного тождества, так что класс α -колец является квазимногообразием.

Квазимногообразие α -колец содержит не только многообразие альтернативных колец, но и более общие многообразия - обобщенно стандартных колец, обобщенно достижимых колец, ассосимметричных колец, а также некоторые другие классы, не получившие пока специальных названий, также содержащие многообразие альтернативных колец. Кольца всех этих перечисленных многообразий ниже называются α -кольцами альтернативного типа.

С другой стороны, квазимногообразие α -колец содержит многообразия (γ, δ) -алгебр, антиэластичных алгебр с ассоциативными степенями, и в частности, многообразие (-1,1)-колец. Кольца этих многообразий удовлетворяют тождеству $(x,y,z)+(y,z,x)+(z,x,y)=0$ и называются ниже α -кольцами антиальтернативного типа.

Очевидно, кроме того, что α -кольцами являются все коммутативные кольца и кольца Ли, однако изучаемые ниже вопросы для этих многообразий тривиальны.

Основой для изучения центров α -колец является изучение идеала M, порожденного коммутатором $[N, A]$, где N - ассоциативный центр кольца A. Более точно, главный вопрос состоит в том, является ли идеал M ядерным. Если это так, то чистая неассоциативность влечет за собой равенство $M=0$, то есть включение $N \subset Z$ и совпадение центра кольца с ассоциативным центром.

Включение $M \subset N$ в общем случае неверно - в [14] приведен противо-

речащий пример в классе альтернативных колец. Но в α -кольцах анти - альтернативного типа идеал M всегда ядерный.

В то же время для всех α -колец удается доказать, что ядерным идеалом является произведение DM, где D - идеал кольца, порожден - ный множеством всех ассоциаторов. Это утверждение позволяет доказать для α -колец гипотезы а)-г), выдвинутые М.Слейтером для альтернативных колец в [14].

Ядерность идеала DM получена как следствие равенства

$$2(x,y,z)(u,v,w)[t,n]=0,$$

выполняющегося во всех α -кольцах. Из этого равенства следует, с другой стороны, соотношение $(N\cap D^2)^2\subset Z$, позволяющее - при наличии хотя бы одного примера ядерных функций - строить ненулевые центральные функции. Такие функции построены для альтернативных колец.

Отметим также, что в особом положении оказываются α -кольца с тремя и меньшим числом образующих. Для таких колец идеал M всегда ядерный, и поэтому в классе альтернативных колец с тремя образующими оказывается возможным построить центральные функции более простого вида, чем для многообразия всех альтернативных колец.

1. Предварительные замечания о неассоциативных кольцах

Пусть A - произвольное, вообще говоря, неассоциативное кольцо. Символами (x,y,z) и $[x,y]$ мы будем обозначать, как обычно, ассоциатор $(xy)z-x(yz)$ и коммутатор $xy-yx$ соответствующих элементов кольца A.

В кольце A мы будем рассматривать следующие подмножества:

$N_l(A)=\{n\in A\mid (n,A,A)=0\}$ - левый ассоциативный центр;

$N_m(A)=\{n\in A\mid (A,n,A)=0\}$ - средний ассоциативный центр;

$N_r(A)=\{n\in A\mid (A,A,n)=0\}$ - правый ассоциативный центр;

$N(A)=N_l(A)\cap N_m(A)\cap N_r(A)$ - ассоциативный центр, или ядро;

$Z(A)=\{z\in A\mid [z,A]=0\}$ - коммутативный центр;

$C(A)=N(A)\cap Z(A)$ - центр;

$U(A)$ - максимальный идеал кольца A, содержащийся в N;

$M(A)$ - идеал кольца A, порожденный множеством $[N,A]$;

$D(A)$ - идеал кольца A, порожденный множеством (A,A,A).

В дальнейшем кольцо A фиксировано, и поэтому в приведенных обозначениях буква A вместе со скобками будет опускаться.

Идеал B кольца A называется ядерным, если $B \subset \mathcal{U}$.

Кольцо A называется чисто неассоциативным, если $\mathcal{U} = 0$, то есть если A не имеет ядерных идеалов.

Кольцо A называется разделенным, если $\mathcal{D} \cap \mathcal{U} = 0$; в противном случае A называется смешанным.

Кольцо A называется первичным, если из равенства $BC = 0$, где B и C - идеалы кольца A, следует, что либо $B = 0$, либо $C = 0$, и полупервичным, если оно не содержит тривиальных идеалов (то есть ненулевых идеалов с нулевым умножением).

Во всяком кольце A справедливы тождества

$$(xy, z, t) - (x, yz, t) + (x, y, zt) = x(y, z, t) + (x, y, z)t, \tag{1}$$

$$[xy, z] - x[y, z] - [x, z]y = (x, y, z) + (z, x, y) - (x, z, y). \tag{2}$$

Оба эти тождества вытекают непосредственно из определения ассоциатора и коммутатора.

Полагая в тождестве (1) последовательно один из элементов равным некоторому $n \in N$, получаем равенства:

$$(nx, y, z) = n(x, y, z), \quad (x, y, zn) = (x, y, z)n, \tag{3}$$

$$(xn, y, z) = (x, ny, z), \quad (x, yn, z) = (x, y, nz), \tag{4}$$

справедливые в любом кольце A.

Аналогично, положив $z = n \in N$ в тождестве (2), получим

$$[xy, n] = x[y, n] + [x, n]y. \tag{5}$$

Хорошо известно, что в любом кольце

$$\mathcal{D} = (A, A, A) + A(A, A, A) = (A, A, A) + (A, A, A)A, \tag{6}$$

а тогда из тождеств (3) немедленно вытекает, что

$$\mathcal{D}\mathcal{U} = \mathcal{U}\mathcal{D} = 0, \tag{7}$$

и поскольку $(\mathcal{U} \cap \mathcal{D})^2 \subset \mathcal{U}\mathcal{D}$, то

$$(\mathcal{U} \cap \mathcal{D})^2 = 0. \tag{8}$$

Поэтому справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. а) Всякое первичное кольцо либо ассоциативно, либо чисто неассоциативно; б) всякое полупервичное кольцо – разделенное.

2. Квазитождества в α-кольцах

В этом пункте A – произвольное α-кольцо, n – фиксированный элемент его ассоциативного центра N.

ЛЕММА 1. Для любых элементов $x, y, z, t \in A$

$$[(x,y,z), n] = 0, \tag{9}$$

$$(x,y,z)[t,n] = [(x,y,z)t, n], \tag{10}$$

$$(x,y,z)[t,n] \in N, \tag{11}$$

$(x,y,z)[t,n]$ – кососимметрическая функция аргументов x, y, z, t. $((x,y,z)[t,n] \in KC(x,y,z,t))$. (12)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пользуясь тождествами (3) и (4) и условием (α), имеем равенства:

$$n(x,y,z) = (nx, y, z) = (xn, y, z) = (x, ny, z) =$$
$$= (x, yn, z) = (x, y, nz) = (x, y, zn) = (x,y,z)n,$$

из которых следует (9).

Далее, по тождеству (5),

$$[(x,y,z)t, n] = (x,y,z)[t,n] + [(x,y,z), n]t,$$

откуда в силу (9) получаем равенство (10). Утверждение (11) следует непосредственно из (10) и (α).

Для доказательства утверждения (12) заменим в тождестве (5) элемент y на (y, z, t). Тогда в силу (9) будем иметь

$$[x(y,z,t), n] = [x,n](y,z,t).$$

Но $[x,n] \in N$, и снова пользуясь равенством (9), получим

$$[x(y,z,t), n] = (y,z,t)[x,n].$$

С другой стороны, $[(x,y,z)t + x(y,z,t),n] = 0$ в силу (1) и (9), и поэтому вследствие тождества (10)

$$(x,y,z)[t,n] + (y,z,t)[x,n] = 0. \qquad (13)$$

Наконец, применяя последовательно тождества (3), (5), условие (α), (6) и снова (3), получаем

$$(x,y,z)[t,n] = (x,y,z[t,n]) = (x,y,[zt,n]) - (x,y,[z,n]t) =$$
$$= -(x,y,t[z,n]) = -(x,y,t)[z,n]. \qquad (14)$$

Так как подстановки (zt) и $(xyzt)$ порождают симметрическую группу S_4, то из (13) и (14) вытекает утверждение (12).

Основным утверждением для дальнейшего изучения центров α-колец является следующая

ТЕОРЕМА 1. Пусть A – α-кольцо и n – элемент его ассоциативного центра N. Тогда в A справедливо тождество

$$2(x,y,z)(u,v,w)[t,n] = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Установим сначала некоторые свойства элемента $(x,y,z)(u,v,w)[t,n]$, который для краткости ниже будем обозначать через $xyzuvwt$. Из тождества (12) имеем

$$xyzuvwt = -xyzvwtu. \qquad (15)$$

Кроме того, применяя последовательно необходимые утверждения леммы 1 и условие (α), получаем

$$xyzuvwt = (x,y,z)\cdot[t,n](u,v,w) = (x,y,z)[t,n]\cdot(u,v,w) =$$
$$= -(y,z,t)[x,n](u,v,w) = -(y,z,t)(u,v,w)[x,n],$$

то есть

$$xyzuvwt = -yztuvwx. \qquad (16)$$

Наконец, из тождеств (11) и (9) следует, что произведение $(u,v,w)[t,n]$ коммутирует с (x,y,z), и поэтому

$$xyzuvwt = (u,v,w)[t,n](x,y,z);$$

но коммутатор $[t,n]$ также коммутирует с (x,y,z), и мы получаем

равенство

$$xyzuvwt = uvwxyzt. \tag{17}$$

Теперь, применяя поочередно равенства (15) и (16), получаем

$$\begin{aligned} xyzuvwt &= -xyzvwtu = yzuvwtx = \\ &= -yzuwtxv = zuvwtxy = \\ &= -zuvtxyw = uvwtxyz = -uvwxyzt. \end{aligned}$$

Сопоставляя это равенство с (17), получаем утверждение теоремы.

В дальнейшем мы будем считать для простоты, что рассматриваемое α-кольцо A удовлетворяет тождеству

$$(x,y,z)(u,v,w)[t,n] = 0. \tag{18}$$

В силу теоремы 1 для этого достаточно, очевидно, чтобы в аддитивной группе кольца A не было элементов второго порядка или чтобы выполнилось равенство $2A = A$; более того, достаточно, чтобы указанные два условия были справедливы для ассоциативного центра N, и это требование можно ещё несколько ослабить. Выяснение всех этих возможностей не является предметом настоящей работы, и мы им заниматься не будем.

Докажем еще одно утверждение, аналогичное теореме 1.

ТЕОРЕМА 2. Пусть A - α-кольцо, n - элемент его ассоциативного центра N. Тогда в A справедливо тождество

$$2(x,y,z)[t,n][u,n] = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, прежде всего, что для любых элементов $p, q \in N$ и любых x, y, z справедливо равенство

$$\begin{aligned} (x,y,z)(pq) &= (x,y,zp)q = (x,y,pz)q = \\ &= (x,y,qpz) = (x,y,z)qp, \end{aligned}$$

и поэтому

$$(x,y,z)[t,n][u,n] = (x,y,z)[u,n][t,n].$$

С другой стороны, по лемме 1

$$(x,y,z)[t,n][u,n] - [t,n](x,y,z)[u,n] \in KC(x,y,z,t,u),$$

и поэтому

$$(x,y,z)[t,n][u,n] = -(x,y,z)[u,n][t,n].$$

Отсюда и вытекает утверждение теоремы.

В дальнейшем мы будем считать, что кольцо A удовлетворяет тождеству

$$(x,y,z)[t,n][u,n] = 0. \tag{19}$$

Обозначим через (n) идеал, порожденный в кольце A элементом n.

ЛЕММА 2. $(n) = Zn + An + nA + AnA$. *)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что подкольцо

$$Zn + An + nA + AnA$$

является в A идеалом. Пользуясь условием (α) и равенством (3) для любых элементов a, b, x получаем

$$(anb)x = (an)(bx) + (an,b,x) = an(bx) + (na,b,x) =$$
$$= an(bx) + n(a,b,x) \in AnA + nA.$$

Аналогично,

$$x(anb) = (xa)(nb) - (x,a,nb) = (xa)nb - (x,a,b)n \in AnA + An.$$

Остальные утверждения очевидны.

ЛЕММА 3. Если $n^2 = nAn = 0$, то $(n)^2 = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 2, достаточно показать, что в условиях доказываемой леммы произведение любых двух элементов подмножеств Zn, An, nA и AnA равно нулю.

Запишем равенство

$$(xny)(znt) = (xny)(zn)\cdot t - (xny, zn, t)$$

и докажем, что оба слагаемых в правой части равны нулю. Действительно, применяя условие (α) и тождество (3), получаем

$$(xny)(zn) = (xn, y, zn) + xn\cdot y(zn) =$$
$$= (nx,y,z)n + x\cdot n(yz)n = n(x,y,z)n = 0,$$

а для второго слагаемого с помощью (α) и (4) получаем

$$(xny, zn, t) = (xny, nz, t) = (xny\cdot n, z, t) =$$

*) Здесь и в доказательстве леммы 3 Z означает кольцо целых чисел.

$$= (xn \cdot yn, z, t) = (x \cdot nyn, z, t) = 0.$$

Равенство нулю остальных произведений доказывается аналогично; впрочем, проведенное доказательство проходит в этих случаях почти буквально - достаточно в предыдущих выкладках заменить подходящие из элементов x, y, z, t формальными единицами.

3. Центры α-колец

В этом пункте A - α-кольцо, удовлетворяющее тождествам (18) и (19), где n - элемент его ассоциативного центра N.

ЛЕММА 4. $M = [N, A] + A[N, A] = [N, A] + [N, A]A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем первое равенство; достаточно убедиться, что подкольцо $B = [N, A] + A[N, A]$ является в A идеалом.

В силу (α)

$$x \cdot y[n, t] = (xy)[n, t] \in B,$$

и, следовательно, B - левый идеал. Кроме того, в силу (5) и (α)

$$[t, n]x = [tx, n] - t[x, n] \in B,$$

$$y[t, n] \cdot x = y \cdot [t, n]x \in B,$$

так как, по доказанному, $[t, n]x \in B$ и B - левый идеал.

Второе равенство доказывается аналогично.

ЛЕММА 5. В кольце A утверждения $(x, y, z)[t, n] = 0$ для любых $x, y, z, t \in A$, $n \in N$ и $M \subset N$ равносильны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условие (α) вместе с тождествами (3) и (4) позволяет записать цепочку равенств

$$(x, y, z)[t, n] = (x, y, z[t, n]) = (x, y[t, n], z) = (x[t, n]\ y, z),$$

из которых, вследствие леммы 4, следует доказываемое утверждение.

Теперь мы докажем основную теорему этого пункта, из которой в качестве следствий выведем утверждения, рассмотренные в основном для альтернативных колец.

ТЕОРЕМА 3. DM - ядерный идеал кольца A.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $d \in D$; тогда

$$(d\cdot x[t,n])y = (dx)[t,n]\cdot y = dx\cdot[t,n]y \in DM,$$

$$y(d\cdot x[t,n]) = y(dx\cdot[t,n]) = y(dx)\cdot[t,n] \in DM,$$

так что DM – идеал A. Далее, в силу равенства (6) и леммы 4, "общий" элемент идеала DM имеет вид

$$(x,y,z)u\cdot s[t,n] = ((x,y,z)u)s\cdot[t,n]$$

и снова в силу (6) может быть переписан как сумма элементов вида

$$(a,b,c)[t,n] \quad \text{и} \quad w(a,b,c)[t,n].$$

Первый из этих элементов принадлежит N по (11), а для второго имеем

$$(u,v,w(a,b,c)[t,n]) = (u,v,w)(a,b,c)[t,n] = 0$$

в силу равенства (18). Таким образом, идеал DM содержится в ассоциативном центре N, то есть является ядерным.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если $DM \neq 0$, то DM тривиальный идеал – это следует из включения $DM \subset D \cap U$ и равенства (8).

СЛЕДСТВИЕ 1. Если пересечение $D \cap M$ не содержит ненулевых ядерных идеалов кольца A, то $M \subset N$.

Действительно, в условиях следствия из теоремы 3 вытекает, что $DM = 0$ и, в частности, $(x,y,z)[t,n] = 0$. Остается применить лемму 5.

СЛЕДСТВИЕ 2. В разделенном α-кольце $M \subset N$.

Действительно, в разделенном кольце $D \cap M \cap U = 0$, так что $D \cap M$ не содержит ненулевых ядерных идеалов, и остается применить следствие 1.

СЛЕДСТВИЕ 3. Если α-кольцо A не имеет тривиальных ядерных идеалов, то $M \subset N$.

Действительно, ненулевой ядерный идеал, содержащийся в $D \cap M$, необходимо тривиален, и поэтому можно применить следствие 1.

СЛЕДСТВИЕ 4. В чисто неассоциативном α-кольце ассоциативный центр совпадает с центром.

Действительно, чисто неассоциативное кольцо является разделенным, и по следствию 2, $M \subset N$. Тогда M – ядерный идеал, то есть $M = 0$, а это

равносильно включению $N \subset Z$. Поэтому $C = N \cap Z = N$.

СЛЕДСТВИЕ 5. В неассоциативном первичном α-кольце ассоциативный центр совпадает с центром.

Это утверждение вытекает из предложения 1 и следствия 4.

СЛЕДСТВИЕ 6. Простое неассоциативное α-кольцо с ненулевым ассоциативным центром имеет единицу.

Действительно, из следствия 5 вытекает, что в этом случае кольцо имеет ненулевой центр, являющийся, как известно, полем.

Наконец, справедлива

ТЕОРЕМА 5. Если максимальный ядерный идеал α-кольца A коммутативен и не содержит тривиальных идеалов кольца A, то ассоциативный центр кольца A совпадает с центром.

Достаточно заметить, что рассуждения, проведенные при доказательстве этой теоремы в [14, стр. 3.76] опираются фактически не на альтернативность кольца, а на те его свойства, которые справедливы для всех α-колец.

В последних трех теоремах этого пункта указываются некоторые подмножества, лежащие в центре и в ассоциативном центре α-колец; эти теоремы используются в дальнейшем для построения центральных и ядерных функций.

ТЕОРЕМА 6. В всяком α-кольце $(N \cap D^2)^2 \subset C$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a, b \in N \cap D^2$, $c \in A$. Тогда, согласно тождеству (2),

$$[ab,c] = a[b,c] + [a,c]b \in D^2M + MD^2, \tag{20}$$

и мы докажем, что $D^2M = MD^2 = 0$. В самом деле, для любого элемента $d \in \mathcal{D}$, применяя последовательно условие (α), тождество (5), получаем

$$s[t,n]\cdot((x,y,z)u\cdot d) = s([t,n](x,y,z)u\cdot d) =$$

$$= s((x,y,z)[t,n]u\cdot d) = 0,$$

так как $(x,y,z)\cdot[t,n]u \in DM$, а по теореме 3 $(DM)D \subset UD = 0$.

Доказанное равенство в виду (6) и леммы 4 означает, что $MD^2=0$. Далее, для элементов $c, d \in D$ имеем

$$(cd)[t,n]s = (cd\cdot[t,n])s = (c\cdot d[t,n])s \in (D(DM))A,$$

откуда с помощью теоремы 3 получаем $D^2M=0$. Тогда из равенства (20) получаем $[a\,b,c]=0$, то есть $(N\cap D^2)^2 \subset Z$, и следовательно, $(N\cap D^2)^2 \subset C$, что и требовалось доказать.

ТЕОРЕМА 7. Если в α-кольце A идеал M ядерный, то $(N\cap D)^2 \subset C$.

Для доказательства достаточно заметить, что в условиях теоремы $DM = MD = 0$, и вновь рассмотреть равенство (20).

Последняя теорема является непосредственным следствием тождества (19).

ТЕОРЕМА 8. Если n - элемент ассоциативного центра N α-кольца, то

$$[A,n][A,n]A \subset N.$$

4. α-кольца с тремя образующими

Основная теорема предыдущего пункта - теорема 3 - может быть существенно улучшена в случае, когда α-кольцо A имеет не более трех образующих: оказывается, что в таких кольцах выполняется более простое тождество, чем (18). Именно, справедлива

ТЕОРЕМА 9. Если α-кольцо A имеет систему образующих, состоящую не более чем из 3 элементов, и n-элемент ассоциативного центра N кольца A, то для любых $x,y,z,t \in A$

$$2(x,y,z)[t,n]=0. \tag{21}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы проведем индукцию по сумме степеней элементов x, y, z, $t \in A$ как слов от образующих кольца A. Если сумма степеней этих элементов равна 4, то среди них имеются равные, и тогда требуемое утверждение следует из (12). Сделав предположение индукции, мы покажем сначала, что для любых x,y,z,u,v

$$(x,y,z)[uv,n] \in KC(x,y,z,u,v). \tag{22}$$

Действительно, пользуясь условием (α), равенством (5) и леммой 1, получаем

$$(x,y,z)[uv,n]=(x,y,z)u[v,n]+(x,y,z)[u,n]v=$$
$$=[(xy,z,u)-(x,yz,u)+(x,y,zu)][v,n]-x(y,z,u)[v,n]=$$
$$=[v,n][(xy,z,u)-(x,yz,u)+(x,y,zu)]=$$
$$=[v,n]x(y,z,u)+[v,n](x,y,z)u=$$
$$=[vx,n](y,z,u)-v[x,n](y,z,u)=(y,z,u)[vx,n].$$

Левая часть этого равенства является кососимметрической функцией аргументов x, y, z, а правая - кососимметрической функцией аргументов y, z, u; следовательно, $(x,y,z)[uv,n]$ - кососимметрическая функция от x,y,z,u.

С другой стороны,

$$(x,y,z)[uv,n]=(x,y,z)u[v,n]=$$
$$=(x,y,z)[v,n]u+(x,y,z)[u,[v,n]]=[u,[v,n]](x,y,z)=$$
$$=u[v,n](x,y,z)-[v,n]u(x,y,z)=$$
$$=-[vu,n](x,y,z)+v[u,n](x,y,z)=-(x,y,z)[vu,n],$$

и (22) доказано.

Используя теперь (21) и (9), имеем

$$(x,y,z)[uv\cdot w,n]=(x,y,z)[u\cdot vw,n]=-(x,y,z)[vw\cdot u,n]=$$
$$=-(x,y,z)[v\cdot wu,n]=(x,y,z)[wu\cdot v,n]=$$
$$=(x,y,z)[w\cdot uv,n]=-(x,y,z)[uv\cdot w,n].$$

Следовательно, равенство (21) выполняется, если элемент t имеет степень не меньше 3. В силу (12) это означает, что (21) верно, если хотя бы один из его аргументов имеет степень не меньше 3.

Если теперь хотя бы два из этих аргументов имеют степень 2, то по (22)

$$2(x,y,uv)[st,n]=-2(x,y,s)[uv\cdot t,n]=0$$

по доказанному. Если же, наконец, ровно один из них имеет степень 2, то $(x,y,z)[uv,n]=0$ в силу (22), поскольку среди элементов x, y, z, u, v есть хотя бы два равных.

Этим доказательство теоремы завершается.

При выведении следствий из этой теоремы мы так же, как и в предыдущем пункте, наложим на аддитивную группу кольца A соответствующие ограничения и будем считать, что в кольце A

$$(x,y,z)[t,n]=0. \tag{23}$$

В силу леммы 5 тождество (23) означает, что справедлива

ТЕОРЕМА 10. Если α - кольцо A имеет систему образующих, состоящую не более чем из 3 элементов, то идеал M - ядерный.

Из теорем 7 и 10 следует

ТЕОРЕМА 11. Если α - кольцо A имеет систему образующих, состоящую не более чем из 3 элементов, то $(N\cap D)^2\subset C$.

5. α - кольца альтернативного типа

В этом пункте мы рассматриваем некоторые многообразия, каждое из которых содержит многообразие всех альтернативных колец.

Напомним необходимые определения.

Кольцо A называется обобщенно стандартным [13], если в нем выполняются тождества:

$$(x,y,x)=0, \tag{24}$$

$$(x,y,z)x+(y,z,x)x+(z,x,y)x=(x,y,xz)+(y,xz,x)+(xz,x,y), \tag{25}$$

$$(x,y,wz)+(w,y,xz)+(z,y,xw)=[x,(w,z,y)]+(x,w,[y,z]). \tag{26}$$

Кольцо A называется обобщенно достижимым [8], если в нем выполняются тождества (24) и

$$[x,(z,y,y)]=0. \tag{27}$$

$$3(x,y,[w,z])=-[w,(x,y,z)]-2[x,(y,z,w)]+2[y,(z,w,x)]+[z,(w,x,y)]. \tag{28}$$

Кольцо A будем называть циклическим [15, 5], если в нем выполняется тождество

$$(x,y,z) = (y,z,x). \tag{29}$$

Кроме того, в [6] изучаются кольца, в которых выполняются тождества (24) и

$$(wx,y,z)+(w,x,[y,z]) = w(x,y,z)+(w,y,z)x, \tag{30}$$

а в [7] изучаются кольца, удовлетворяющие тождествам (30) и

$$([w,x],y,z)+(w,x,yz) = y(w,x,z)+(w,x,y)z. \tag{31}$$

Тождества (30) и (31) выполняются во всяком правоальтернативном и во всяком левоальтернативном кольце соответственно. Кроме того, всякое обобщенно стандартное кольцо является обобщенно достижимым [8], а всякое альтернативное кольцо является обобщенно стандартным. Таким образом, все определенные выше многообразия содержат многообразие альтернативных колец, и мы докажем, что всякое кольцо из этих многообразий является α-кольцом.

Напомним, что кольцо A называется эластичным, если в нем выполняется тождество (24), и антиэластичным [11, 12], если в нем

$$(x,y,z) = (z,y,x). \tag{32}$$

ЛЕММА 6. Если A - эластичное или антиэластичное кольцо и n - элемент его ассоциативного центра N, то для любых $x,y,z \in A$

$$([n,x],y,z) = (x,[y,n],z) = (x,y,[n,z]) = [n,(x,y,z)]. \tag{33}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно тождеству (1),

$$(xy,z,t)-(x,yz,t)+(x,y,zt) = x(y,z,t)+(x,y,z)t, \tag{34}$$

$$(tz,y,x)-(t,zy,x)+(t,z,yx) = t(z,y,x)+(t,z,y)x. \tag{35}$$

Равенство (35) и в эластичном, и в антиэластичном кольце может быть переписано в виде

$$(x,y,tz)-(x,zy,t)+(yx,z,t) = t(x,y,z)+(y,z,t)x, \tag{36}$$

и, вычитая (36) из (34), получаем

$$([x,y],z,t)-(x,[y,z],t)+(x,y,[z,t])=$$

$$=[x,(y,z,t)]+[(x,y,z),t]. \qquad (37)$$

Полагая в (37) последовательно $x=n$, $t=n$, $z=n$, мы получаем равенства (33).

ТЕОРЕМА 12. Все кольца из определенных выше многообразий являются α-кольцами (для обобщенно достижимых колец - при некотором ограничении на аддитивную группу, позволяющих в соответствующих тождествах сокращать на 2; см. п.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть A - обобщенно достижимое кольцо, удовлетворяющее упомянутым ограничениям, и $n\in N$. Подставив $x=n$ в равенство (28), получим $[n,(y,z,w)]=0$, а тогда A - α-кольцо в силу леммы 6. Отметим, что мы не использовали (27).

Пусть A - циклическое кольцо и $n\in N$. Тогда

$$(xn,y,z)=(x,ny,z)=(ny,z,x)=n(y,z,x)=$$

$$=n(x,y,z)=(nx,y,z),$$

откуда $[n,x]\in N_e$. Но в циклическом кольце все ассоциативные центры, очевидно, совпадают, так что $[n,x]\in N$.

Пусть кольцо A удовлетворяет тождествам (24) и (30) и $n\in N$. Подставляя $y=n$ в (30), получаем равенство $(w,x,[n,x])=0$, из которого, в силу леммы 6, и следует требуемое утверждение.

Пусть, наконец, кольцо A удовлетворяет тождествам (30) и (31) и $n\in N$. Подставляя $y=n$ и $x=n$ соответственно в (30) и в (31), получаем равенства

$$(w,x,[n,z])=0, \quad ([w,n],y,z)=0, \qquad (38)$$

С другой стороны, пользуясь вторым из равенств (38) и равенством (30) при $x=n$, получаем

$$n(w,y,z)=(nw,y,z)=(wn,y,z)=(w,y,z)n,$$

, следовательно,

$$(w,xn,z)=(w,x,nz)=(w,x,zn)=(w,x,z)n=$$

$$=n(w,x,z)=(nw,x,z)=(wn,x,z)=(w,nx,z).$$

Это равенство вместе с (38) и доказывает требуемое утверждение.

Теорема полностью доказана.

Таким образом, к рассматриваемым многогообразиям применимы все теоремы, доказанные в предыдущих пунктах. Некоторые из этих теорем позволяют указать примеры ненулевых центральных и ядерных функций в двух классах альтернативных колец.

Напомним, что элемент $h(x_1,\dots,x_r)$ свободного неассоциативного кольца называется центральной (ядерной) функцией в классе колец M, если для любого кольца A из класса M и любых его элементов $a_1,\dots,a_r$ $h(a_1,\dots,a_r)\in C(A)$ $(N(A))$. Известно, что в классе всех альтернативных колец $[x,y]^4$ является ненулевой ядерной функцией, а в классе колец с 3 образующими при естественных ограничениях на характеристику ядерными являются функции

$$[x,y]\circ[z,t],\ (x,y,z)\circ[u,v],\ \text{и}\ (x,y,z)\circ(u,v,w),$$

где $a\circ b=ab+ba$ [1].

Исходя из этих ядерных функций, на основании теорем 6, 8, 9 и 11, мы можем получить следующие утверждения.

ТЕОРЕМА 13. В классе всех альтернативных колец характеристики, отличной от 2,

а) $[(x,y,z),t]^8$ - ненулевая центральная функция,

б) $[[x,y]^4,z][[x,y]^4,t]$ u - ненулевая ядерная функция.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, $[(x,y,z),t]^4\in N\cap D^2$, $h=[(x,y,z),t]^8\in C$ в силу теоремы 6. Кроме того, в классической алгебре Кэли, очевидно, для подходящих мнимых единиц x,y,z,t

$$h(x,y,z,t)\neq 0.$$

Утверждение б) следует из теоремы 8 и того факта, что $[[x,y]^4,z][[x,y]^4,t]$ $u\neq 0$, в свободном ассоциативном кольце.

ТЕОРЕМА 14. В классе альтернативных колец с 3 образующими характеристики, отличной от 2, 3

а) $[(x,y,z),t]^4$ - ненулевая центральная функция,

б) $(x,y,z)^4$ - ненулевая центральная функция,

в) $((x,y,z)\circ[u,v])^2$ - ненулевая центральная функция,

г) $[[x,y]^2,z]t$ - ненулевая ядерная функция.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения а) - в) следуют из теоремы 11 и рассмотрения классической алгебры Кэли. Надо добавить только, что если бы функция в) была нулевой, то была бы нулевой и функция $(x,y,z)\circ(u,v,w)$, что неверно, так как $(x,y,z)^2\neq 0$.

Утверждение г) следует из теоремы 9 и рассмотрения свободного ассоциативного кольца.

6. α-кольца антиальтернативного типа

Кольцо A будем называть кольцом антиальтернативного типа, если в нем выполняется тождество

$$(x,y,z)+(y,z,x)+(z,x,y)=0. \tag{39}$$

Такими кольцами являются, например, алгебры типа (γ,δ) ; алгебра над коммутативным ассоциативным кольцом Φ с единицей 1 называется алгеброй типа (γ,δ) , или (γ,δ) - алгеброй, если в ней выполняются тождества (39) и

$$(x,y,z)+\gamma(y,x,z)+\delta(z,x,y)=0, \tag{40}$$

где $\gamma,\delta\in\Phi$ и связаны соотношением $\gamma^2=\delta^2-\delta+1$ [2, 9].

Кольцами антиальтернативного типа являются также антиэластичные кольца, удовлетворяющие тождеству $(x,x,x)=0$ (41) в частности, антиэластичные кольца с ассоциативными степенями [3, 10, 11, 12].

Точно так же, как в предыдущих пунктах, мы считали, что аддитивные группы рассматриваемых колец удовлетворяют некоторому условию "чистоты" для числа 2, в этом пункте мы будем считать для простоты, что аналогичные условия выполняются и для числа 3.

Тогда из леммы 1, леммы 5 и теоремы 7 немедленно вытекает

ТЕОРЕМА 15. Если A - α-кольцо антиальтернативного типа, то идеал M - ядер-

ный, и $(N\cap D)^2\subset C$.

ЛЕММА 7. Если A - кольцо антиальтернативного типа и n - элемент его ассоциативного центра, то

$$[n,(x,y,z)]=0. \tag{42}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, в силу (39)

$$(zn,x,y)+(x,y,zn)+(y,zn,x)=0,$$

$$(z,nx,y)+(nx,y,z)+(y,z,nx)=0.$$

Но в силу (4) $(zn,x,y)=(z,nx,y)$, $(y,zn,x)=(y,z,nx)$, так что $(x,y,zn)=(nx,y,z)$. Равенство (42) следует теперь из (3).

Остается, наконец, доказать следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 16. Всякое антиэластичное кольцо, удовлетворяющее тождеству (41), является α - кольцом. Всякая (γ,δ) - алгебра над полем характеристики, отличной от 2 и 3, является α - кольцом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение теоремы следует из лемм 6 и 7.

Пусть A - (γ,δ) - алгебра, и будем считать сначала, что $\delta\neq 1$. Вычитая из равенства (40) равенство (39), получаем

$$(\delta-1)(z,x,y)=-\gamma(y,x,z)+(y,z,x). \tag{43}$$

Отсюда

$$(\delta-1)(z,x,ny)=-\gamma n(y,x,z)+n(y,z,x)=(\delta-1)n(z,x,y).$$

Следовательно,

$$(z,xn,y)=(z,x,ny)=n(z,x,y), \tag{44}$$

а тогда в силу (39)

$$(z,nx,y)=(-nx,y,z)-(y,z,nx)=-n(x,y,z)-n(y,z,x)=n(z,x,y). \tag{45}$$

Равенства (44), (45) означают, что $[n,x]\in N_m$; но из (40) (при $x\in N$) следует, что $N_m\subset N_\ell$, а из (43) следует, что $N_m\subset N_r$. Поэтому $N_m=N_\ell\cap N_r\cap N_m=N$, то есть $[n,x]\in N$, что и требовалось

доказать.

Для окончания доказательства теоремы заметим, что при $\delta = 1$ коэффициент γ равен 1 или -1 и что, как известно, алгебры типа $(1,1)$ антиизоморфны алгебрам типа $(-1,0)$, а алгебры типа $(-1,1)$ антиизоморфны алгебрам типа $(1,0)$. Но кольцо, антиизоморфное α-кольцу, само является, очевидно, α-кольцом, и, следовательно, теорема полностью доказана.

Литература

1. Г.В.ДОРОФЕЕВ, Альтернативные кольца с тремя образующими, Сиб. матем. журнал, 4 (1963), 1029-1048.

2. A.A.ALBERT, Almost alternative algebras, Portugal.Math.,8 (1949), 23-36.

3. C.T.ANDERSON, D.L.OUTCALT, On simple anti-flexible rings, J. Algebra, 10 (1968), 310-320.

4. E.KLEINFELD, Primitive alternative rings and semisimplicity, Am.J.Math.,77 (1953), 725-730.

5. E.KLEINFELD, Assosymmetric rings, Proc.Amer.Math.Soc.,8 (1957),983-986.

6. E.KLEINFELD, Generalization of alternative rings, I.J.Algebra,18 (1971),304-325.

7. E.KLEINFELD, Generalization of alternative rings, II, J.Algebra, 18 (1971), 326-339.

8. E.KLEINFELD, M.H.KLEINFELD, F.KOSIER, The structure of generalized accesible rings, Bull.of the Amer.Math.Soc.,75 (1969), 415-417.

9. L.A.KOKORIS, On rings of (γ, δ)-type, Proc.Amer.Math.Soc., 9 (1958), 897-904.

10. F.KOSIER, On a class of nonflexible algebras, Trans.Amer.Math. Soc., 102 (1962), 299-318.

11. D.RODABAUGH, A generalisation of the flexible law, Trans.Amer. Math.Soc.,114 (1965), 468-487.

12. D.RODABAUGH, On semisimple antiflexible algebras, Portug.Math. 26 (1967), 261-271.

13. R.D.SCHAFER, On generalized standard algebras, Proc. Nat.Acad. Sci.USA, 60 (1968), 73-74.

14. M.SLATER, Nucleus and center in alternative rings, J.Algebra, 7 (1967), 372-388.

15. N.STERLING, Rings satisfying $(x,y,z) = (y,z,x)$, Can.J.Math.,20 (1968), 913-918.

16. A.THEDY, On right alternative rings (preprint).

Поступило 29 мая 1973 г.