Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

V. A. Chernyatin, Existence of a classical solution of a mixed problem for a second-order one-dimensional parabolic equation,
Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh., 1990, Number 6, 6–11

https://www.mathnet.ru/eng/vmumm2734

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
https://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 18.97.9.171
January 20, 2026, 06:18:29

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bundschuh P. Ein Satz über ganze Funktionen und Irrationalitätsaussagen//Invent. math. 1970. **9**. 175—184.
2. Stihl T. Irrationalitätsmasse für Werte der Lösungen einer Funktionalgleichung von Poincaré//Arch. Math. 1983. **41**. 531—537.
3. Stihl T. Arithmetische Eigenschaften spezieller Heinescher Reihen//Math. Ann. 1984. **268**. 21—41.
4. Попов А. Ю. Арифметические свойства значений некоторых бесконечных произведений//Диофантовы приближения. Ч. 2. М., 1986. 63—78.
5. Фельдман Н. И. Приближения алгебраических чисел. М., 1981.

Поступила в редакцию
03.03.89

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1990. № 6

УДК 517.95

В. А. Чернятин

О СУЩЕСТВОВАНИИ КЛАССИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В работе на основе предложенного в [1; 2] нестандартного обоснования метода Фурье получены новые достаточные условия классической разрешимости смешанной задачи для одномерного уравнения теплопроводности

$$u_t(x, t)-u_{xx}(x, t)+q(x)u(x, t)=f(x, t). \tag{1}$$

Их принципиальное отличие от уже известных [3, с. 86; 4, с. 471; 5, с. 381] состоит в отказе от любых требований гладкости к функции $f(x, t)$ по переменной x.

Ниже используются следующие обозначения:

$$\bar{G}=\{x\in[0, \pi]\},\ \bar{H}=\{t\in[0, T]\},\ \bar{H}^*=\{t\in[t^*, T]\},$$

$\bar{Q}=\bar{G}\times\bar{H}$, $\bar{Q}^*=\bar{G}\times\bar{H}^*$, $[A]$ — целая часть числа $A>0$, $Q=\operatorname{int}\bar{Q}$.

1. Постановка задачи. Следуя [4, с. 471; 6, с. 181], рассмотрим смешанную задачу: найти функцию

$$u(x, t)\in C^{2,1}(Q)\cap C(\bar{Q}), \tag{2}$$

удовлетворяющую в обычном смысле уравнению (1) в области Q с вещественным потенциалом $q(x)\in C(\bar{G})$ и правой частью $f(x, t)\in C(\bar{Q})$, а также нулевым граничным и начальному условиям

$$u(0, t)=u(\pi, t)=u(x, 0)=0. \tag{3}$$

Искомое классическое решение $u(x, t)$ найдем с помощью метода Фурье разделения переменных x и t в виде ряда Фурье

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\,y_n(x) \tag{4}$$

по нормированным в $L^2(G)$ собственным функциям $y_n(x)$, соответствующим собственным значениям ω_n^2 системы Штурма—Лиувилля

$$-y_n''(x)+q(x)\,y_n(x)=\omega_n^2\,y_n(x), \tag{5}$$

$$y_n(0)=y_n(\pi)=0. \tag{6}$$

Здесь коэффициенты Фурье $T_n(t)$ определяются в виде [4, с. 471]

$$T_n(t)=\int_0^t F_n(\tau)\,e^{-\omega_n^2(t-\tau)}\,d\tau, \tag{7}$$

$$F_n(t)=\int_0^\pi f(x,\ t)\,y_n(x)\,dx. \tag{8}$$

Применяя обобщенную теорему о среднем значении к интегралу (7) и учитывая простейшие асимптотические оценки [7, с. 20, 27]

$$\omega_n=n+O\left(\frac{1}{n}\right), \tag{9}$$

$$y_n(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nx+O\left(\frac{1}{n}\right),\quad y_n'(x)=O(n), \tag{10}$$

легко найти грубую оценку коэффициента Фурье

$$T_n(t)=O(n^{-2}). \tag{11}$$

Из (10) и (11) видно, что формальный ряд (4) сходится равномерно в $\bar{Q}$ к функции

$$S(x,\ t)\in C(\bar{Q}), \tag{12}$$

которую, следуя [8, с. 482], будем называть формальным решением смешанной задачи (1)—(3).

Стандартное обоснование метода Фурье с использованием почленного дифференцирования функционального ряда (4) не может быть проведено только при непрерывных исходных данных задачи $q(x)$ и $f(x,\ t)$, так как продифференцированные по t или два раза по x ряды, вообще говоря, расходятся на достаточно «богатом» множестве точек в $\bar{Q}$ [9, с. 133]. Из асимптотических оценок (10) и (11) не очевидна даже возможность получения частной производной $S_x(x,\ t)$ в результате почленного дифференцирования ряда (4). И хотя ниже на функцию $f(x,\ t)$ накладывается более сильное условие Гельдера по переменной t, тем не менее обосновать метод Фурье с помощью почленного дифференцирования невозможно. Для этих целей будет проведено непосредственное исследование гладкости второго порядка суммы $S(x,\ t)$ ряда (4).

Среди известных достаточных условий разрешимости смешанной задачи (1)—(3) наиболее точные, а именно $q(x),\ f(x,\ t)\in \mathrm{Lip}\,\alpha(\bar{G})$ равномерно по $t\in\bar{H}$, $0<\alpha\leqslant 1$, принадлежат В. Погожельскому [3, с. 86].

2. Асимптотическая формула коэффициентов Фурье. Пусть функция $f(x,\ t)$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем $0<\alpha\leqslant 1$ по переменной t равномерно по $x\in\bar{G}$, точнее

$$|f(x,\ t')-f(x,\ t)|\leqslant B\,|t'-t|^\alpha\quad \forall\, t,\ t'\in\bar{H}, \tag{13}$$

причем константа B не зависит от x. Исследуем асимптотические (при $n \to +\infty$) свойства интеграла (7) в предположении (13). По определению (8) и в силу оценки (10)

$$|F_n(t') - F_n(t)| \leqslant L\,|t' - t|^{\alpha}, \tag{14}$$

где константа L не зависит от n.

При каждом $n=1, 2, \ldots$ построим для функции $F_n(\tau)$ на отрезке $[0, t]$ кусочно линейную аппроксимацию $\varphi_n(\tau) \in C[0, t]$, представляющую собой непрерывную ломаную линию из отрезков прямых. Для этого разобьем отрезок $[0, t]$ на N_n равных частей точками

$$\tau_i^n = \tau_{i-1}^n + \delta_n \quad \forall\, i = \overline{1, N_n},\ \delta_n = \frac{t}{N_n},\ \tau_0^n = 0,\ \tau_{N_n}^n = t.$$

Тогда по определению

$$\varphi_n(\tau_0^n) = F_n(\tau_0^n),\ \varphi_n(\tau_i^n) = F_n(\tau_i^n), \tag{15}$$

$$\varphi_n'(\tau) = a_i^n = \frac{\varphi_n(\tau_i^n) - \varphi_n(\tau_{i-1}^n)}{\delta_n} \quad \forall\, \tau \in (\tau_{i-1}^n, \tau_i^n). \tag{16}$$

В угловых точках аппроксимирующей ломаной доопределим $\varphi_n'(\tau)$ соответствующими односторонними производными, так что в любой точке $\tau \in [0, t]$

$$\varphi_n'(\tau) = \begin{cases} a_i^n & \forall\, \tau \in [\tau_{i-1}^n, \tau_i^n), \\ a_{N_n}^n & \text{при } \tau = \tau_{N_n}^n. \end{cases} \tag{17}$$

Зададим близость искомой и аппроксимирующей функций следующим образом:

$$|\varphi_n(\tau) - F_n(\tau)| < \omega_n^{-2\alpha} \quad \forall\, \tau \in [0, t]. \tag{18}$$

В соответствии с (14) и (15) при любом $\tau \in [0, t]$ (без ограничения общности $\tau \in [\tau_{i-1}^n, \tau_i^n]$) справедливо неравенство

$$|\varphi_n(\tau) - F_n(\tau)| \leqslant |\varphi_n(\tau_{i-1}^n) - F_n(\tau)| + |\varphi_n(\tau) - \varphi_n(\tau_{i-1}^n)| \leqslant 2L\delta_n^{\alpha},$$

откуда видно, что выбор числа разбиений

$$N_n = [t\,(2L)^{\frac{1}{\alpha}}\,\omega_n^2] + 1 \tag{19}$$

гарантирует выполнение оценки (18).

Найдем приближенное значение интеграла (7), используя соотношения (15), (17) и (18), правила интегрирования по частям и обобщенную теорему о среднем значении:

$$T_n(t) = \int_0^t \varphi_n(\tau)\, e^{-\omega_n^2(t-\tau)}\, d\tau + O(\omega_n^{-2\alpha}) \int_0^t e^{-\omega_n^2(t-\tau)}\, d\tau =$$

$$= \frac{F_n(\tau)}{\omega_n^2}\, e^{-\omega_n^2(t-\tau)} \Big|_0^t - \frac{1}{\omega_n^2} \int_0^t \varphi_n'(\tau)\, e^{-\omega_n^2(t-\tau)}\, d\tau + O(\omega_n^{-2(1+\alpha)}), \tag{20}$$

где $|O(\omega_n^{-2(1+\alpha)})| < \omega_n^{-2(1+\alpha)}$. По существу, данное выражение является формулой приближенного интегрирования по частям для искомого интеграла.

Оценим теперь абсолютные величины угловых коэффициентов a_i^n, определяемых соотношениями (16). С учетом (14), (15) и (19) имеем

$$|a_i^n| \leqslant L\delta_n^{\alpha-1} = L\left(\frac{[t(2L)^{\frac{1}{\alpha}}\omega_n^2]+1}{t}\right)^{1-\alpha} \leqslant L\omega_n^{2(1-\alpha)}\left((2L)^{\frac{1}{\alpha}}+\frac{1}{t\omega_n^2}\right)^{1-\alpha}.$$

В силу (9) выражение в больших скобках из правой части последнего неравенства будет ограниченной величиной, если переменная t отделена от нуля сколь угодно малым числом $t^*>0$. Точнее, существует такая константа A, вообще говоря, зависящая от α, что

$$|a_i^n| \leqslant A\omega_n^{2(1-\alpha)} \quad \forall\ t \geqslant t^*. \tag{21}$$

Интеграл из правой части последнего равенства в (20) согласно (16) и (21) оценивается следующим образом:

$$\left|\int_0^t \varphi_n'(\tau)e^{-\omega_n^2(t-\tau)}d\tau\right| = \left|\sum_{i=1}^{N_n} a_i^n \int_{\tau_{i-1}^n}^{\tau_i^n} e^{-\omega_n^2(t-\tau)}d\tau\right| < A\omega_n^{-2\alpha}.$$

Учитывая эти оценки в соотношении (20), получаем искомую асимптотическую формулу для коэффициентов Фурье

$$T_n(t) = \frac{F_n(t)}{\omega_n^2} - \frac{F_n(0)}{\omega_n^2}e^{-\omega_n^2 t} + O(\omega_n^{-2(1+\alpha)}) \ \forall\ t \geqslant t^*. \tag{22}$$

3. Достаточные условия разрешимости. Если функция $f(x, t)$ удовлетворяет условию Гельдера (13) с показателем $0<\alpha\leqslant 1$, то при любых $t\geqslant t^*$ частная производная по x формального решения $S(x, t)$ может быть найдена с помощью оценок (9), (10) и (22) в результате почленного дифференцирования по x ряда (4):

$$S_x(x, t) = \sum_{a=1}^{\infty} T_n(t)\,y_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{F_n(t)}{n^2}\,y_n'(x) -$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F_n(0)}{n^2}e^{-\omega_n^2 t}\,y_n'(x) + \sum_{n=1}^{\infty} O(n^{-1-2\alpha}) \in C(\overline{Q}^*). \tag{23}$$

В самом деле первые два ряда в правой части последнего равенства сходятся равномерно в $\overline{Q}^*$ в силу равномерной в $\overline{H}$ сходимости ряда $\sum_{a=1}^{\infty}|F_n(t)|^2$, а мажорируемость третьего ряда определяется порядком малости его членов.

Формальный ряд из вторых производных по x от членов ряда (4), преобразованный с учетом (5) и (12) к виду

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\,y_n''(x) = q(x)\,S(x, t) - \sum_{n=1}^{\infty}\omega_n^2 T_n(t)\,y_n(x), \tag{24}$$

в общем случае расходится при любом $0<\alpha\leqslant 1$ даже в $\bar{Q}^*$, что очевидно из оценки (22). Тем не менее из свойств сходимости ряда (24) в среднем в G можно вывести существование частной производной $S_{xx}(x, t)$, основываясь на следующем тривиальном обобщении известной [10, с. 347] теоремы о достаточных условиях гладкости суммы функционального ряда на случай двух переменных.

Лемма. *Если функциональный ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} T_n(t)\, y_n''(x)$ *при каждом* $t\in\bar{H}^*$ *сходится в* $L^2(G)$ *к функции* $V(x, t)\in C(\bar{Q}^*)$, *то определяемое рядом* (4) *формальное решение* $S(x, t)$ *имеет частную производную* $S_{xx}(x, t)=V(x, t)$.

Однако применить данную лемму к ряду (24) удается только при дополнительном ограничении на показатель α, которое одновременно приводит и к разрешимости задачи (1)—(3).

Теорема. *Если функция* $f(x, t)$ *удовлетворяет условию Гельдера* (13) *по переменной* t *с показателем* $\frac{1}{2}<\alpha\leqslant 1$, *то смешанная задача* (1)—(3) *имеет единственное решение в виде ряда Фурье* (4).

Для доказательства теоремы покажем непосредственно, что формальное решение $S(x, t)$ является классическим решением данной задачи. Прежде всего установим существование в $\bar{Q}^*$ частной производной $S_t(x, t)$ с помощью почленного дифференцирования по t ряда (4), используя полученное из (7) выражение $T_n'(t)=F_n(t)-\omega_n^2 T_n(t)$ и оценки (9), (10) и (22):

$$S_t(x, t)=\sum_{n=1}^{\infty} F_n(t)\, y_n(x)-\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^2 T_n(t)\, y_n(x)=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty} F_n(0)\, e^{-\omega_n^2}\, y_n(x)+\sum_{n=1}^{\infty} O(n^{-2\alpha})=\varphi(x, t)\in C(\bar{Q}^*). \tag{25}$$

Корректность такого представления и включения следует из равномерной в $\bar{Q}^*$ сходимости двух последних рядов, так как $t\geqslant t^*$, а $\alpha>\frac{1}{2}$.

Докажем теперь существование в $\bar{Q}^*$ частной производной $S_{xx}(x, t)$, преобразуя при $t\geqslant t^*$ ряд (24) согласно определению (25) функции $\varphi(x, t)$ следующим образом:

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\, y_n''(x)=q(x)\, S(x, t)+\varphi(x, t)-\sum_{n=1}^{\infty} F_n(t)\, y_n(x). \tag{26}$$

Так как последний ряд при каждом $t\in\bar{H}$ сходится в $L^2(G)$ к $f(x, t)$ то ряд из левой части равенства (26) удовлетворяет лемме, откуда

$$S_{xx}(x, t)=q(x)\, S(x, t)+\varphi(x, t)-f(x, t)\in C(\bar{Q}^*). \tag{27}$$

Резюмируя включения (12) и (23) и соотношения (25) и (27) и имея в виду произвольную малость числа $t^*>0$, заключаем, что $S(x, t)$ принадлежит классу функций (2) и удовлетворяет в обычном смысле уравнению (1). Далее, из представления функции $S(x, t)$ рядом (4) и соотношений (6) и (7) видно, что она удовлетворяет граничным и начальному условиям (3). Тем самым доказано, что $S(x, t)$ является решением задачи (1)—(3). Наконец, утверждение теоремы о единственности искомого решения следует из [8, с. 513].

В заключение приведем одно тривиальное, но важное в прикладном отношении следствие доказанной теоремы.

Следствие. *Если функция $f(x, t)$ имеет кусочно по t непрерывную в $\bar{Q}$ частную производную $f_t(x, t)$, то смешанная задача* (1)—(3) *разрешима.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чернятин В. А. О необходимых и достаточных условиях существования классического решения смешанной задачи для одномерного волнового уравнения//Докл. АН СССР. 1986. **287**, № 5. 1080—1083.
2. Чернятин В. А. К проблеме существования решений смешанной задачи для одномерного волнового уравнения//Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1987. № 6. 9—21.
3. Ильин А. М., Калашников А. С., Олейник О. А. Линейные уравнения второго порядка параболического типа//Успехи матем. наук. 1962. **17**, вып. 3. 3—146.
4. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Уравнения в частных производных математической физики. М., 1970.
5. Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М., 1976.
6. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М., 1966.
7. Левитан Б. М., Саргсян И. С. Введение в спектральную теорию. М., 1970.
8. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М., 1976.
9. Бари Н. К. Тригонометрические ряды. М., 1961.
10. Будак Б. М., Фомин С. В. Кратные интегралы и ряды. М., 1967.

Поступила в редакцию
03.03.89

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1990. № 6

УДК 513.83

Ю. В. Лубенец

О ТЕОРЕМЕ ГУРЕВИЧА ДЛЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТИ

Теорема о понижении обычной размерности при отображениях хорошо известна в разных предположениях [1—3]. Здесь доказывается

Теорема. *Имеет место неравенство* $\mathrm{Fd}\,X \leqslant \dim(fX) + \mathrm{Fd}\,f$, *где* $\mathrm{Fd}\,X$ — *фундаментальная размерность компакта* X [4], *а* $\mathrm{Fd}\,f = \sup\limits_y \{\mathrm{Fd}(f^{-1}y)\}$.

Рассматриваются только непрерывные отображения метризуемых компактов. Заменить $\dim(fX)$ на $\mathrm{Fd}(fX)$ здесь нельзя, как видно на примере проекции окружности на ее диаметр.

Лемма. *Для всякого отображения $f: Z \to L$ компакта в полиэдр и для всякого его подкомпакта X, $\mathrm{Fd}\,X \leqslant k$, найдется такая окрестность U множества X, что $f|_U$ гомотопно некоторому отображению в k-мерный остов L^k полиэдра L.*

Это утверждение легко следует из равенства размерности Fd и деформационной размерности в смысле Дыдака [5] и того, что остов L^k является деформационным ретрактом некоторой своей окрестности.

Доказательство теоремы. В силу теоремы Новака [6] можно считать компакт X связным. При $\dim(fX)=0$ теорема очевидна. Предположим, что она верна для всех компактов из $Y=fX$ размерности $<n=\dim Y$. Пусть $m=\mathrm{Fd}\,f$. Вложим X в гильбертов куб Q. Достаточно показать, что для любой призматической (окрестность $\mathcal{O}$ называем призматической, если она имеет вид $\pi_l^{-1}(L)$, где L — подполиэдр