Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

G. F. Egorova, N. V. Levashkina, Исследование устойчивости модели морфогенеза,
Matem. Mod. Kraev. Zadachi, 2006, Part 3, 107–111

https://www.mathnet.ru/eng/mmkz650

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
https://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 18.97.14.87
January 17, 2026, 03:36:08

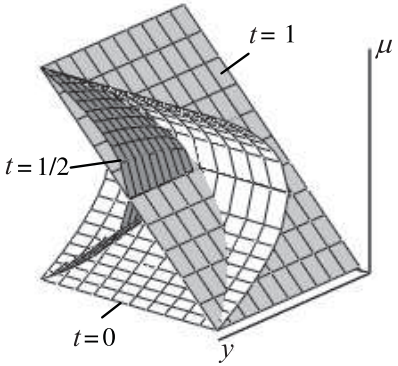

Рис. 1. Семейство интегральных множителей μ

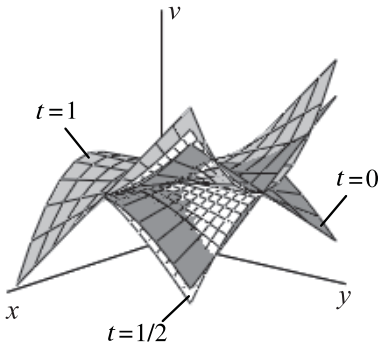

Рис. 2. Семейство потенциалов v

Воронежский институт МВД России, г. Воронеж
dumv@comch.ru

УДК 517.936

Г. Ф. Егорова, Н. В. Левашкина

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ МОДЕЛИ МОРФОГЕНЕЗА

Рассмотрим систему уравнений, описывающих процесс морфогенеза гидры пресноводной:

$$\begin{cases} lu_t = D_a u_{xx} + \dfrac{ku^2}{v} - \mu u + \rho, \\ v_t = D_i v_{xx} + cu^2 - \nu v, \end{cases} \tag{1}$$

где D_a, D_i, k, c, ν, μ, ρ — положительные постоянные величины; x — длина тела гидры, отсчитываемая от головного отдела; $\frac{ku^2}{v}$ — член, учитывающий тот факт, что процесс синтеза активатора автокаталитичен; cu^2 — член, описывающий синтез ингибитора; μu — скорость распада активатора; νv — член, характеризующий спонтанный распад ингибитора; ρ — скорость

образования активатора; D_a и D_i — коэффициенты диффузии активатора и ингибитора по тканям гидры [1].

Система уравнений в частных производных второго порядка (1) с помощью замены $\eta = x - t$ приводится к системе обыкновенных ДУ четвертого порядка:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{d\eta} = y, \quad \dfrac{dv}{d\eta} = z, \\ \dfrac{dy}{d\eta} = \dfrac{1}{D_a}\left(-y - \dfrac{ku^2}{v} + \mu u - \rho\right), \\ \dfrac{dz}{d\eta} = \dfrac{1}{D_i}\left(-z - cu^2 + \nu v\right). \end{cases} \tag{2}$$

Система (2) обладает стационарным решением:

$$u_m = \frac{k\nu + c\rho}{c\mu}, \quad v_m = \frac{(k\nu + c\rho)^2}{c\nu\mu^2}, \quad y_m = z_m = 0.$$

Для определения границ областей устойчивости в пространстве основных параметров системы, линеаризуем (2). Разложив правую часть уравнений в ряд Тейлора в окрестности стационарной точки (u_m, v_m, y_m, z_m), получим линейную систему обыкновенных ДУ:

$$\begin{cases} l\dfrac{d\tilde{u}}{d\eta} = \tilde{y}, \quad \dfrac{d\tilde{v}}{d\eta} = \tilde{z}, \\ \dfrac{d\tilde{y}}{d\eta} = \dfrac{1}{D_a}\left(\dfrac{\mu\left(c\rho - k\nu\right)}{\left(k\nu + c\rho\right)}\tilde{u} + \dfrac{k\nu^2\mu^2}{\left(k\nu + c\rho\right)^2}\tilde{v} - \tilde{y}\right), \\ \dfrac{d\tilde{z}}{d\eta} = \dfrac{1}{D_i}\left(-\dfrac{2\left(k\nu + c\rho\right)}{\mu}\tilde{u} + \nu\tilde{v} - \tilde{z}\right). \end{cases} \tag{3}$$

Характеристическое уравнение для (3) имеет вид:

$$\lambda^4 + p_1\lambda^3 + p_2\lambda^2 + p_3\lambda + p_4 = 0,$$

где $p_1 = \frac{D_a + D_i}{D_a D_i}$, $p_2 = \frac{1}{D_a D_i(k\nu + c\rho)}\left[c\rho\left(1 - \nu D_a - \mu D_i\right) + k\nu\left(1 - \nu D_a + \mu D_i\right)\right]$, $p_3 = \frac{1}{D_a D_i(k\nu + c\rho)}\left[k\nu\left(\mu - \nu\right) - c\rho\left(\mu + \nu\right)\right]$, $p_4 = \frac{\nu\mu}{D_a D_i}$.

Для исследования устойчивости системы (2) воспользуемся критерием Рауса–Гурвица, вычислив следующие определители:

$$T_1 = p_1,\ T_2 = \begin{vmatrix} p_1 & 1 \\ p_3 & p_2 \end{vmatrix},\ T_3 = \begin{vmatrix} p_1 & 1 & 0 \\ p_3 & p_2 & p_1 \\ p_5 & p_4 & p_3 \end{vmatrix},\ T_4 = \begin{vmatrix} p_1 & 1 & 0 & 0 \\ p_3 & p_2 & p_1 & 1 \\ 0 & p_4 & p_3 & p_2 \\ 0 & 0 & 0 & p_4 \end{vmatrix}, \quad (4)$$

где p_1, p_2, p_3, p_4 — коэффициенты характеристического уравнения системы.

Критерий Рауса–Гурвица. *Все корни характеристического полинома матрицы A (матрица коэффициентов линеаризованной системы) имеют отрицательную вещественную часть в том и только в том случае, если определители* (4) *положительны* [3]*:*

$$T_1 > 0, \quad T_2 > 0, \quad T_3 > 0, \quad T_4 > 0.$$

Очевидно, что

$$T_1 = p_1 = \frac{D_a + D_i}{D_a D_i} > 0,$$

$$T_2 = p_1 p_2 - p_3 = \frac{1}{D_a^2 D_i^2 \left(k\nu + c\rho\right)} \left[k\nu \left(D_a + D_i - \nu D_a^2 + \mu D_i^2\right) + \right.$$
$$\left. + c\rho \left(D_a + D_i - \nu D_a^2 - \mu D_i^2\right)\right].$$

Так как все коэффициенты системы (1) положительны, то для того чтобы T_2 был больше нуля, необходимо выполнение одного из условий:

$$\begin{cases} \rho > \frac{k\nu}{c} \cdot \frac{\nu D_a^2 - \mu D_i^2 - D_a - D_i}{D_a + D_i - \nu D_a^2 - \mu D_i^2}, \\ \nu D_a^2 + \mu D_i^2 < D_a + D_i \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \rho < \frac{k\nu}{c} \cdot \frac{\nu D_a^2 - \mu D_i^2 - D_a - D_i}{D_a + D_i - \nu D_a^2 - \mu D_i^2}, \\ \nu D_a^2 + \mu D_i^2 > D_a + D_i. \end{cases} \quad (5)$$

Рассмотрим определитель T_3:

$$T_3 = p_3 T_2 - p_1^2 p_4 = \frac{1}{D_a^3 D_i^3 \left(k\nu + c\rho\right)^2} \times$$
$$\times \left\{ (k\nu)^2 \left[\left(\mu - \nu\right) \left(D_a + D_i - \nu D_a^2 + \mu D_i^2\right) - \nu\mu \left(D_a + D_i\right)^2 \right] + \right.$$

$$+\left(c\rho\right)^2\left[\left(\nu D_a-\mu D_i\right)^2-\left(\mu+\nu\right)\left(D_a+D_i\right)\right]-$$
$$-2k\nu\cdot c\rho\left[\mu^2D_i^2-\nu^2D_a^2+\nu\left(D_a+D_i\right)\left(1+\mu D_a+\mu D_i\right)\right]\Big\}.$$

Для того чтобы T_3 был больше нуля, необходимо выполнение следующего условия:

$$\left(c\rho\right)^2\left[\left(\nu D_a-\mu D_i\right)^2-\left(\mu+\nu\right)\left(D_a+D_i\right)\right]-$$
$$-2k\nu\cdot c\rho\left[\mu^2D_i^2-\nu^2D_a^2+\nu\left(D_a+D_i\right)\left(1+\mu D_a+\mu D_i\right)\right]+$$
$$+\left(k\nu\right)^2\left[\left(\mu-\nu\right)\left(D_a+D_i-\nu D_a^2+\mu D_i^2\right)-\nu\mu\left(D_a+D_i\right)^2\right]>0.$$

Таким образом, T_3 будет больше нуля при значениях параметров, попадающих в следующие области:

$$\begin{cases}\rho\in\left(0,\rho_1\right)\cup\left(\rho_2,\infty\right),\\ \left(\mu+\nu\right)\left(D_a+D_i\right)<\left(\nu D_a-\mu D_i\right)^2\end{cases}$$
$$\text{или} \qquad (6)$$
$$\begin{cases}\rho\in\left(\rho_1,\rho_2\right),\\ \left(\mu+\nu\right)\left(D_a+D_i\right)>\left(\nu D_a-\mu D_i\right)^2,\end{cases}$$

где

$$\rho_{1,2}=\frac{k\nu}{c}\left(\frac{\mu^2D_i^2-\nu^2D_a^2+\nu\left(D_a+D_i\right)\left(1+\mu D_a+\mu D_i\right)}{\left(\nu D_a-\mu D_i\right)^2-\left(\mu+\nu\right)\left(D_a+D_i\right)}\pm\right.$$
$$\left.\pm\frac{\mu\left(D_a+D_i\right)\sqrt{4\nu\mu D_i^2+\left(\nu D_i-\nu D_a+1\right)^2}}{\left(\nu D_a-\mu D_i\right)^2-\left(\mu+\nu\right)\left(D_a+D_i\right)}\right);$$

$T_4=p_4T_3=\frac{\nu\mu}{D_aD_i}\cdot T_3>0$ (при условии, что $T_3>0$).

В результате проведенного исследования получены, определяемые формулами (5) и (6), границы областей устойчивости в пространстве основных параметров системы уравнений, описывающих процесс морфогенеза гидры пресноводной.

1. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии. — М.: Высшая школа, 1995. — 301 с.

2. *Романовский Ю. М, Степанова Н. В., Чернавский Д. С.* Математическая биофизика. — М.: МГУ, 1983. — 578 с.
3. *Романов М. Ф., Федоров М. П.* Математические модели в экологии. — СПб.: Иван Федоров, 2003. — 240 с.

Самарский государственный технический университет, г. Самара

УДК 517.928

Н. А. Зайчикова

ТЕОРЕМЫ УСРЕДНЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ В ЭКОНОМИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЯХ

Исследование экономических процессов и систем часто связано с построением моделей, описываемых дифференциальными уравнениями. Более общий подход, учитывающий неточность информации о свойствах системы и множество вариантов ее поведения без использования вероятностных характеристик, приводит к дифференциальным включениям [1]. В теории усреднения дифференциальных включений рассматривались задачи аппроксимации моделей, возникающих в теории управления, физике [2, 3]. Условия теорем из [2, 3] ограничивали возможность применения теории усреднения для анализа экономических систем. В [2] рассматривалась задача усреднения дифференциальных включений с полунепрерывной сверху по x, 2π–периодической по t правой частью. В [3] был обоснован принцип усреднения для дифференциальных включений с быстрыми и медленными переменными и липшицевой правой частью.

Рассмотрим задачу Коши для дифференциальных включений (ДВ)

$$dx/dt \in \mu F(t,x), \quad x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

где $\mu \in (0,a]$, $a > 0$, — малый параметр, $x \in \mathbb{R}^m_+$, $F : D_0 \to Kv(\mathbb{R}^m)$ — выпуклое компактнозначное отображение, $D_0 = \mathbb{R}_+ \times P$, область $P \subset \mathbb{R}^m_+$. $X(t_0, x_0, \mu)$ — множество всех решений типа Каратеодори задачи (1), определенных на отрезке $T(t_0, \mu) = [t_0, t_0 + 1/\mu]$, $\mu > 0$.