УДК 517.986

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА АЛГЕБР НЕЙМАНА

В. Я. Голодец

ВВЕДЕНИЕ

Одним из интересных свойств, которыми могут обладать алгебры Неймана, является асимптотическая коммутативность. Этот эффект впервые был рассмотрен в работе Муррея и фон Неймана [37] (свойство Г) с целью доказательства существования факторов типа II_1, не являющихся аппроксимативно конечными. В дальнейшем свойство Г обсуждалось и осмысливалость многими авторами. Так, Пуканский [40], усовершенствуя свойство Г, ввел свойство L (см. определение 5.5.4 ниже), а Диксмье и Лэнс [28] изучали так называемые центральные последовательности (ц. п.) в факторах типа II_1 (см. определение п. 1.4). Понятие ц. п. оказалось, по-видимому, очень полезным. С его помощью Макдуфф [11] и Сакаи [41] доказали существование континуума попарно неизоморфных факторов типа II_1 и, тем самым, решили проблему, восходящую к фон Нейману. Кроме того, Макдуфф [36] показала, что если II_1-фактор M содержит две ц. п., которые асимптотически не коммутируют между собой, то $M\sim M\otimes R$, где R-аппроксимативно конечный фактор типа II_1. Для доказательства этого утверждения она рассмотрела алгебру Неймана $C_M{}^U$, порожденную всеми ц. п. фактора M. Оказалось, что $C_M{}^U$ в этом случае, имеет тип II_1 и обладает рядом любопытных свойств, в частности след на $C_M{}^U$ канонически строится по следу на исходном факторе M.

В 50—60-е годы возник определенный интерес к алгебрам Неймана типа III, которые до той поры казались патологическими объектами. Этот интерес, по-видимому, можно объяснить потребностями аксиоматической теории поля и строгим изучением квантовых моделей. Исследуя асимптотические свойства факторов типа III, распадающихся в бесконечное тензорное произведение факторов типа I_n $(n<\infty)$ (БТПФI), Пауэрс [39] доказал существование континуума попарно неизоморфных таких факторов. Факторы, построенные им, стали называться факторами Пауэрса (см. п. 1.4). Усовершенствуя подход Пауэрса в [19], Араки и Вудс ввели новый инвариант — множество асимптотических отношений (см. § 4, п. 4.1), с помощью которого им удалось сильно продвинуться в классификацию факторов, распадающихся в БТПФI.

Однако эти результаты были лишь предвестниками новых крупных открытий в теории факторов типа III. В 1970 г. выходит знаменитая работа Такесаки [46] о теории Томиты модулярных операторов в алгебрах Неймана. Согласно этой теории, для всякого точного нормального состояния ρ на алгебре Неймана M существует модулярная группа автоморфизмов $\sigma_t^\rho(t \in \mathbf{R})$ алгебры M, относительно которой ρ удовлетворяет условиям Кубо, Мартина, Швигера (КМШ). Генератор этой группы Δ_ρ получил название модулярного оператора. Модулярная теория доставила тот естественный математический аппарат, который позволил начать систематическое изучение факторов типа III, предпринятое в работах Конна [20—26] и др.

С появлением модулярной теории стала актуальной задача изучения ц. п. в факторах типа III. Подробное исследование было начато в [1], а в работе [2] для фактора M типа III была рассмотрена алгебра Неймана $C_M{}^U$, порожденная ц. п. в M по аналогии с тем, как это делала Макдуфф для II_1-факторов. Там же было установлено, что $C_M{}^U$ обладает точным нормальным состоянием ρ_U (асимптотическое состояние для M), которое канонически строится по каждому точному нормальному состоянию ρ на M, но не зависит от него. Пусть Δ_U — модулярный оператор алгебры $C_M{}^U$, отвечающий ρ_U, тогда если вещественное число $\lambda \neq 1$ принадлежит дискретной части спектра Δ_U, то λ, согласно [2], принадлежит множеству асимптотических отношений $A(M)$ фактора M. Тем самым, была выявлена связь между ц. п. в факторах, модулярной теорией и множеством асимптотических отношений Араки—Вудса.

Алгебры Неймана, возникающие в задачах математической физики, обладают, как правило, свойством асимптотической абелевости (см. определение 4.4.1). Изучение асимптотически абелевых алгебр Неймана начал Сакаи [42], который указал существование асимптотически абелевого фактора типа II_1. Но уже его ученик М. С. Глазер [30] обнаружил, что II_∞-фактор не обладает подобным свойством, и высказал предположение, что факторы типа III также не являются асимптотически абелевыми. Однако, в [26] Конн и Вудс построили асимптотически абелевы факторы типа III_λ $(0<\lambda\leqslant 1)$ и сформулировали задачу о том, что III_0-факторы не могут быть асимптотически абелевыми. Эта задача решена в [3] с использованием алгебр $C_M{}^U$.

В серии работ [16, 43, 49] были изучены свойства модулярных операторов для асимптотически абелевых факторов.

Асимптотическая коммутативность в алгебрах Неймана находит важные применения при изучении автоморфизмов алгебр Неймана, главным образом, в задаче описания инвариантов внешнего сопряжения действия групп автоморфизмов алгебры Неймана [23, 38, 34, 35, 7]. С этой целью Конн [22] рассмотрел для фактора M его асимптотический централизатор, т. е. алгебру Неймана, порожденную специального вида ц. п. в M. В терминах алгебры $C_M{}^U$ асимптотический централизатор M совпадает с централизатором состояния ρ_U в $C_M{}^U$.

Возможно, что асимптотические методы окажутся полезными при классификации аппроксимативно конечных факторов (см. [5, 6]).

В настоящей статье приведена конструкция алгебры $C_M{}^U$ для произвольного фактора M с сепарабельным преддвойственным пространством M_*, где U — свободный ультрафильтр на $\mathbf{N}$, и изучены свойства асимптотического состояния ρ_U на $C_M{}^U$ и отвечающего ему модулярного оператора Δ_U. На основе этих свойств построена классификация алгебр $C_M{}^U$ в соответствии с [8]. В терминах алгебр $C_M{}^U$ приведены результаты работ [16, 43, 48], доказано, что $\mathrm{Sp}\,\Delta_U$ совпадает с множеством асимптотических отношений для фактора M (§ 4). Кроме того, приведено решение двух задач Конна—Вудса [26] об асимптотически абелевых факторах типа III, в том числе, о факторах типа III_0 (см. § 5).

Статья состоит из пяти параграфов. В § 1 излагаются предварительные результаты. В § 2 строится математический аппарат с использованием модулярной теории. Здесь устранены некоторые недостатки, которые имелись в работе [2]. В § 3 вводится в рассмотрение и изучаются асимптотические алгебры $C_M{}^U$ для фактора M. В §§ 4, 5 излагаются приложения построенной теории к изучению модулярных операторов, асимптотически абелевых алгебр, ц. п. в факторах и т. п.

В пределах одного параграфа принята двойная нумерация формул. Первая цифра указывает номер соответствующего пункта, вторая — номер формулы.

§ 1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1.1. В обозначениях и терминологии, касающихся алгебр Неймана, будем, в основном, придерживаться монографии Диксмье [27]. Изложим основные моменты теории Томиты-Такесаки о модулярных операторах [45, 46].

Вектор $\xi\in H$ называется циклическим для M, если линейное многообразие $M\xi$ плотно в H, т. е. $[M\xi]=H$. Если $[M'\xi]=H$, то вектор ξ называется отделяющим для M, поскольку в этом случае соотношение $x\xi=0$ для $x\in M$ выполнено тогда и только тогда, когда $x=0$.

Пусть алгебра Неймана M в сепарабельном гильбертовом пространстве обладает циклическим отделяющим вектором ξ. На $M\xi$ рассмотрим оператор инволюции S_ρ ($\rho(x)=(x\xi, \xi)$ — состояние на M, отвечающее вектору ξ)

$$S_\rho x\xi=x^*\xi, \tag{1.1}$$

а на $M'\xi$ — оператор инволюции F_ρ:

$$F_\rho x'\xi = x'^*\xi \quad (x' \in M'). \tag{1.2}$$

Легко проверяется, что $(S_\rho x\xi, x'\xi) = (F_\rho x'\xi, x\xi)$. В теории Томиты — Такесаки [46] доказывается, что S_ρ и F_ρ допускают замыкание и области $M\xi$ и $M'\xi$ соответственно являются областями существенного определения для S_ρ и F_ρ. Пусть $\bar{S}_\rho$ и $\bar{F}_\rho$ — замыкания для S_ρ и F_ρ, соответственно; тогда имеют место следующие полярные разложения:

$$S_\rho = j_\rho \Delta_\rho^{1/2} = \Delta_\rho^{-1/2} j_\rho; \quad F_\rho = j_\rho \Delta_\rho^{-1/2} = \Delta_\rho^{1/2} j_\rho, \tag{1.3}$$

где $\Delta_\rho = \bar{F}_\rho \bar{S}_\rho$ — модулярный оператор (м. о.), который, как показано в [46], является самосопряженным, позитивным и обратимым, причем $\Delta_\rho \xi = \xi$, а j_ρ — антиунитарный оператор в H со свойствами: $j_\rho^2 = I$, $j_\rho M j_\rho = M'$, $j_\rho \Delta_\rho j_\rho = \Delta_\rho^{-1}$, $j_\rho \xi = \xi$.

Оператор Δ_ρ порождает сильно непрерывную однопараметрическую группу σ_t^ρ, $t \in \mathbf{R}$, автоморфизмов M,

$$\sigma_t^\rho(x) = \Delta_\rho^{it} x \Delta_\rho^{-it}, \quad x \in M,$$

называемую группой модулярных автоморфизмов (г. м. а.).

В силу свойств вектора ξ состояние $\rho(x) = (x\xi, \xi)$ на M будет точным и нормальным, т. е. для каждой возрастающей сети $h_i \nearrow h$, h, $h_i \in M_+$, имеет место равенство $\rho(h) = \sup_i \rho(h_i)$ (нормальность) и $\rho(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ при $x \in M_+$ (точность). Справедливо обратное, всякое точное нормальное (т. норм.) состояние ρ на M представимо в виде $\rho(x) = (x\xi, \xi)$, где ξ — циклический отделяющий вектор для M в гильбертовом пространстве H_ρ, которое является пополнением M по скалярному произведению $(x, y) = \rho(y^* x)$, где x, $y \in M$.

Состояние $\rho(x) = (x\xi, \xi)$ относительно σ_t^ρ, $t \in \mathbf{R}$, удовлетворяет условиям КМШ (Кубо—Мартина—Швигера):

(i) ρ инвариантно относительно σ_t^ρ, $t \in \mathbf{R}$;

(ii) для любых x, $y \in M$ существует функция $F(z)$, голоморфная в полосе $0 < \operatorname{Im} z < 1$, непрерывная на границе с граничными условиями:

$$F(t) = \rho(\sigma_t(x) y), \quad F(t+i) = \rho(y \sigma_t(x)). \tag{1.4}$$

(Напомним, что условия КМШ в математическую физику были введены Хаагом и др. [3.1] в связи с изучением равновесных состояний в алгебраическом подходе к статфизике.)

Через M_ρ — обозначим коммутант ρ, т. е. подалгебру M, состоящую из элементов $x \in M$, обладающих свойством $\rho(xy) = \rho(yx)$ для $\forall y \in M$. Из условий КМШ можно вывести, что для $x \in M_\rho$ выполнено соотношение $\sigma_t^\rho(x) = x$, $t \in \mathbf{R}$, более того, понятно, что если $\sigma_t^\rho(x) = x$, $t \in \mathbf{R}$, то $x \in M_\rho$. Таким образом, M_ρ — подалгебра Неймана M, элементы которой неподвижны относительно σ_t^ρ, $t\in\mathbf{R}$. Далее, очевидно, сужение ρ на M_ρ является т. норм. конечным следом.

1.2. Вектор-функция $f(\alpha)$ со значениями в гильбертовом пространстве H, где α изменяется в некоторой области комплексной плоскости $\mathbf{C}$, называется аналитической, если аналитической является функция $(f(\alpha).\ g)$ для $g\in M$. Пусть M, ξ, σ_t, $t\in\mathbf{R}_\lambda$ — такие же, как и в п. 1.1. Тогда в M существует $*$-подалгебра M_a «аналитических» элементов из M, сильно плотная в M, причем если $x\in M_\alpha$, то вектор-функция $t\to\sigma_t(x)\xi$ имеет единственное продолжение до аналитической функции $\alpha\to\sigma_\alpha(x)\xi$ из $\mathbf{C}$ в $M\xi$ [46]. Элементами M_a являются, например, операторы вида $\int f(t)\sigma_t^\rho(x)\,dt$, где $f(t)$ — преобразование Фурье финитной бесконечно-дифференцируемой функции $\tilde{f}(t)$, а интеграл понимается в слабом смысле, тогда

$$\int f(t)\,\sigma_t^\rho(x)\,\xi \mathrm{d}t=\int f(t)\,\Delta^{it}x\xi \mathrm{d}t=\tilde{f}\,(\ln\Delta)\,x\xi.$$

Заметим, что если $a\in M_a$, то в M' существуют аналитические элементы a', b' такие, что $a\xi=a'\xi$ и $a^*\xi=b'\xi$. Действительно, поскольку a, $a^*\in M_a$, то $\sigma^\rho_{-i/2}(a)$, $\sigma^\rho_{-i/2}(a^*)\in M_a$. Поэтому $a'=$ $=j_\rho\sigma^\rho_{-i/2}(a^*)\,j_\rho\in M'$. Следовательно, $a\xi=S_\rho a^*S_\rho\xi=a'\xi$. Ясно, что $b'=S_\rho aS_\rho$.

1.3. Определим понятие спектра $\mathrm{Sp}_\sigma(x)$ для $x\in M$ относительно группы σ_t, $t\in\mathbf{R}$. Следуя [20], удобно ввести это понятие сначала в абстрактных терминах, а затем вернуться к группе σ_t, $t\in\mathbf{R}$.

Пусть G — локально компактная абелева группа, dt — ее мера Хаара, Γ — двойственная группа, (t,γ) — образ t при $\gamma\in\Gamma$.

Будем предполагать, что мультипликация в G и Γ аддитивна, 0 — единичный элемент для G или Γ. Для $f\in L^1(G)$ и $\gamma\in\Gamma$ определим $\tilde{f}(\gamma)=\int f(t)(t,\gamma)\,\mathrm{d}t$, для $f\in L^1(G)$ положим $Z(f)=$ $=\{\gamma:\tilde{f}(\gamma)=0\}$.

Пусть M — алгебра Неймана, M_* — преддвойственное пространство M, $\mathrm{Aut}\,M$ — группа автоморфизмов M. Через U обозначим представление G в $\mathrm{Aut}\,M$ такое, что для всякого $x\in M$ и $\varphi\in M_*$ функция $t\to\varphi(U_t(x))$ непрерывна.

Для $f\in L^1(G)$ положим $U(f)\,x=\int U_t(x)\,f(t)\,\mathrm{d}t$ и определим

а) $\mathrm{Sp}_U(x)=\bigcap\limits_{f\in L^1(G),\ U(f)x=0} Z(f)$.

б) Для замкнутого подмножества $E\subset\Gamma$ положим

$$M(U,\ E)=\{x\in M,\ \mathrm{Sp}_U(x)\in E\}.$$

Приведем некоторые свойства $\mathrm{Sp}_U(x)$ и $M(U,\ E)$ [20]:

а) $\mathrm{Sp}_U(x^*)=-\mathrm{Sp}_U(x)$;

б) $U_t(M(U,\ E))=M(U,\ E)$;

в) $\mathrm{Sp}_U(U(f)x) \subset \mathrm{Sp}_U(x) \cap \mathrm{support}\,\hat{f}$;

г) Пусть E_1 и E_2 — замкнутые подмножества Γ, E_3 — замыкание E_1+E_2, тогда $M(U, E_1)\cdot M(U, E_2) \subset M(U, E_3)$.

Положим теперь $U_t=\sigma_t$, дуальную группу для $\mathbf{R}$ отождествим с мультипликативной группой $\mathbf{R}_+^*$. Таким образом, если $x \in M$, то $\mathrm{Sp}_\sigma(x) \subset \mathbf{R}_+^*$. Замкнутое подмножество $E \subset \mathbf{R}_+^*$ будем называть ограниченным, если $\ln E \subset F$, где F — замкнутый компактный интервал $\mathbf{R}$, а элемент $x \in M$, у которого $\mathrm{Sp}_\sigma(x) \subset E$, будем называть элементом с ограниченным спектром M. Пусть M_0 — подмножество M всех элементов с ограниченным спектром. В силу свойств а), г) M_0 — $*$-подалгебра M_a, инвариантная относительно σ_t. Пользуясь в), можно показать, что M_0 — $*$-сильно (слабо) плотная подалгебра M_a, а значит и M.

1.4. Изложим предварительные сведения о центральных последовательностях (ц. п.) в алгебрах Неймана [2].

Пусть M, ξ, Δ, σ_t — те же, что и в предыдущих пунктах. Последовательность (x_n) операторов из M называется ц. п., если $\sup\limits_n \|x_n\| < \infty$ и $\operatorname{s-lim}\limits_n [x, x_n]=0$ для любого $x \in M$.

Лемма 1.4.1. Если ξ — циклический отделяющий вектор и $\lim\limits_{n\to\infty} \|[x, x_n]\xi\|=0$ для $\forall x \in M$, то (x_n) — ц. п.

Две ц. п. (x_n) и (y_n) называются эквивалентными ($(x_n) \sim (y_n)$), если $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$. Ц. п. (x_n) называется тривиальной, если $(x_n) \sim (\lambda_n I)$, где $\lambda_n \in \mathbf{C}$, $\sup\limits_n |\lambda_n| < \infty$. Если (x_n) — ц. п. в M, а (y_n) — ограниченная по норме последовательность и $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$, то (y_n) — также ц. п.

Лемма 1.4.2. Пусть (x_n) — ограниченная по норме последовательность из M, для которой $\lim\limits_{n\to\infty}\|[x, x_n]\xi\|=0$, где ξ — циклический отделяющий вектор для M, а x принадлежит сильно плотному подмножеству D в M. Если существует ограниченная по норме последовательность (x_n'), где $x_n' \in M'$, такая, что

$$\lim_{n\to\infty}\|(x_n-x_n')\xi\|=0,$$

то (x_n) — ц. п. в M.

Доказательство обеих лемм достаточно элементарно и мы его опустим.

В заключение приведем примеры ц. п. в факторе Пауэрса R_λ. Напомним конструкцию R_λ. Пусть N — I_2-фактор с матричными единицами e_{kl}, $k, l=1, 2$. Рассмотрим на N состояние μ^λ вида

$$\mu^\lambda(a)=\mathrm{Sp}(ah^2), \quad a \in N, \quad 0<\lambda<1,$$

где $h^2=\frac{1}{1+\lambda}e_{11}+\frac{\lambda}{1+\lambda}e_{22}$. Пусть $\Delta_{\mu\lambda}$ — модулярный оператор для

N, отвечающий μ^λ. Очевидно,

$$\Delta_\mu^{1/2} e_{ii} h = e_{ii} h, \quad i=1, 2, \quad \Delta_\mu^{1/2} e_{21} h = \lambda^{1/2} e_{21} h. \tag{4.1}$$

Как известно [39], $R_\lambda = \left(\bigotimes_{i=1}^{\infty} N_i\right)''$, где N_i — I_2-фактор, а состояние ρ_λ на R_λ определяется как $\rho_\lambda = \prod_{i=1}^{\infty} \mu_i^\lambda$, где $\mu_i^\lambda = \mu^\lambda$. Обозначим через H_λ гильбертово пространство, в котором действуют операторы из R_λ, и через ξ_λ циклический отделяющий вектор для R_λ в H_λ, для которого $\rho_\lambda(x) = (x\xi_\lambda, \xi_\lambda)$ при $x \in R_\lambda$. Пусть, далее, e_{kl}^i — матричные единицы алгебры $\ldots 1 \otimes N_i \otimes 1 \otimes \ldots$, $k, l = 1, 2$. Тогда поскольку модулярный оператор Δ_{ρ_λ} алгебры R_λ имеет вид $\Delta_{\rho_\lambda} = \bigotimes_{i=1}^{\infty} \Delta_i$, где Δ_i — модулярный оператор для N_i вида (4.1), то

$$\Delta_{\rho_\lambda}^{1/2} e_{kk}^i \xi_\lambda = e_{kk}^i \xi_\lambda, \qquad \Delta_{\rho_\lambda}^{1/2} e_{21}^i \xi_\lambda = \lambda^{1/2} e_{21}^i \xi_\lambda,$$

Следовательно,

$$e_{kk}^i \xi_\lambda = j_\rho e_{kk}^i j_\rho \xi_\lambda, \quad e_{21}^i \xi_\lambda = \lambda^{-1/2} j_\rho e_{12}^i j_\rho \xi_\lambda$$

и ввиду леммы 1.4.2. $(e_{kk}^i)_{i \in \mathbf{N}}$ и $(e_{21}^i)_{i \in \mathbf{N}}$, $(e_{12}^i)_{i \in \mathbf{N}}$ — ц. п. в R_λ.

§ 2. ОПИСАНИЕ ОСНОВНОЙ КОНСТРУКЦИИ

В этом параграфе разрабатывается математический аппарат для изучения асимптотических свойств алгебр Неймана.

2.1. Пусть M — фактор в сепарабельном гильбертовом пространстве H, ξ — циклический отделяющий вектор, $\rho(x) = (x\xi, \xi)$, где $x \in M$, — т. норм. состояние, σ_t^ρ, $t \in \mathbf{R}$, — отвечающая ему г. м. а. фактора M. Через $\overline{M} = l^\infty(M, \mathbf{N})$ обозначим C^*-алгебру, элементами которой являются всевозможные ограниченные последовательности $\overline{x} = (x_n)$, где $x_n \in M$, а через $\overline{M}_d$ — C^*-подалгебру $\overline{M}$, порожденную последовательностями вида $\overline{x} = (x_n)$, где $x_1 = x_2 = \ldots$. Аналогично для коммутанта M' определим C^*-алгебры $\overline{M'}$ и $\overline{M}_d'$.

Зададим ограниченный позитивный функционал ρ_U на $\overline{M}$. Пусть l^∞ — пространство ограниченных числовых последовательностей, тогда если $\overline{x} = (x_n) \in \overline{M}$, то $(\rho(x_n)) \in l^\infty$, где $\rho(x_n) = (x_n\xi, \xi)$. Положим

$$\rho_U(\overline{x}) = \lim_{n \in U} \rho(x_n), \tag{1.1}$$

где U — свободный ультрафильтр на $\mathbf{N}$, множестве натуральных чисел (см. стр. 42 [10]). Из определения ультрафильтра следует, что предел в (2.1) существует. Но тогда ρ_U — позитивный функционал на $\overline{M}$, $|\rho(\overline{x})| \leqslant \|\overline{x}\|$, где $\|\overline{x}\| = \sup\limits_n \|x_n\|$. Поэтому, согласно конструкции Гельфанда, Наймарка, Сигала (ГНС), с помощью ρ_U можно построить представление Π алгебры $\overline{M}$ в гильбертовом пространстве H_{ρ_U}. Тогда $\rho_U(\overline{x}) = (\Pi(\overline{x})\xi_U, \xi_U)$, где ξ_U — единичный вектор в H_{ρ_U}, циклический для $\Pi(\overline{M})$, т. е. $[\Pi(\overline{M})\xi_U] = H_{\rho_U}$.

Исследуем свойства Π. Иногда полезной оказывается следующая

Лемма 2.1.1. Пусть D — сепарабельная C^*-подалгебра $\overline{M}$, тогда

$$\rho(\overline{x}) = \lim_{k\to\infty} \rho(x_{i_k}), \quad \overline{x} = (x_i) \in D,$$

для некоторой фиксированной последовательности индексов (i_k) и всех $\overline{x} = (x_i) \in D$.

Лемма 2.1.2. Для всякого оператора $A \in \Pi(M)''$ существует последовательность $\overline{z} = (z_n) \in \overline{M}$ такая, что $A\xi_U = \Pi(\overline{z})\xi_U$ и $A^*\xi_U = \Pi(\overline{z}^*)\xi_U$.

Доказательство. Согласно теореме Капланского о плотности [27], единичный шар эрмитовых операторов $\Pi(\overline{M})$ сильно плотен в единичном шаре эрмитовых операторов из $\Pi(\overline{M})''$. Поэтому существует последовательность $\overline{x}^n \in \overline{M}$ такая, что

$$\sup_n \|\Pi(\overline{x}^n)\| \leqslant \|A\| < \infty, \quad \lim_{n\to\infty} \|(A^{\#} - \Pi(\overline{x}^n)^{\#})\xi_U\| = 0. \quad (1.2)$$

Символ $\#$ здесь и в дальнейшем означает наличие или отсутствие знака сопряжения $*$. Заметим, что если $\overline{x}^n = (x_k{}^n)_{k\in\mathbf{N}}$, где $x_k{}^n \in M$, то можно предполагать выполненным неравенство

$$\sup_{n,k} \|x_k{}^n\| < C, \quad 0 < C < \infty. \quad (1.3)$$

Действительно, если I — ядро представления Π, то

$$\|\Pi(\overline{x})\| = \inf_{\overline{a}\in I} \|\overline{x} + \overline{a}\| \left(= \inf_{\overline{a}\in I} (\sup_k \|x_k + a_k\|)\right). \quad (1.4)$$

Тогда для некоторого $\overline{a}^n \in I$

$$\sup_k \|x_k{}^n + a_k{}^n\| = \|\overline{x}^n + \overline{a}^n\| \leqslant \|\Pi(\overline{x}^n)\| + 1/2^n \leqslant \|A\| + 1$$

и (1.3) можно считать выполненным для $C = \|A\| + 1$.

Будем предполагать, что последовательность $\overline{x}^n$, $\overline{x}^n \in \overline{M}$, выбрана таким образом, что при $m, n \geqslant s$

$$\| (A-\Pi(x^m))^{\#} \xi_U \| < 1/2^{s+1}, \qquad (1.5)$$

$$\| (\Pi(\bar{x}^n)-\Pi(\bar{x}^m))^{\#} \xi_U \| \left(=\lim_{k \in U} \| (x_k^n - x_k^m)^{\#} \xi \|\right) < \frac{1}{2^{s+1}}. \qquad (1.6)$$

Рассмотрим подмножества $\mathbf{N}$ вида

$$V_k = \left\{ t \in \mathbf{N} : \| (x_t^i - x_t^j)^{\#} \xi \| < \frac{1}{2^{i+1}},\ i<j;\ j=1, \ldots, k \right\}, \quad k \geqslant 2.$$

Из (1.6) и определения ультрафильтра следует, что V_k — убывающая последовательность подмножеств из U. Положим

$$\begin{aligned} z_t &= x_t^1 \ \text{ при } \ t \in \mathbf{N} - V_2, \\ z_t &= x_t^2 \ \text{ при } \ t \in V_2 - V_3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_t &= x_t^k \ \text{ при } \ t \in V_k - V_{k+1}, \ldots \end{aligned}$$

Тогда в силу (1.3) $\bar{z}=(z_n) \in \bar{M}$. Пусть V — произвольное подмножество U, согласно определению ультрафильтра множества $V \cap V_k$, где $k \geqslant m$, *не являются пустыми и при* $t \in V \cap V_k$ *выполнено* неравенство $\| (z_t - x_t^m)^{\#} \xi \| < 1/2^{m+1}$. Следовательно,

$$\| (\Pi(\bar{z})-\Pi(\bar{x}^m))^{\#} \xi_U \| = \lim_{n \in U} \| (z_t - x_t^m)^{\#} \xi \| < 1/2^{m+1}. \qquad (1.7)$$

Сравнивая (1.5) и (1.7), получаем равенство $A^{\#}\xi_U = \Pi(\bar{z})^{\#}\xi_U$ ∎

В заключение пункта приведем еще одну полезную лемму

Лемма 2.1.3. (i) Если P — проектор из $\Pi(\bar{M})$, то в $\bar{M}$ существует последовательность проекторов $\bar{p}=(p_n)$ такая, что $P=\Pi(\bar{p})$.

(ii) Если W — частичная изометрия из $\Pi(\bar{M})$, то в $\bar{M}$ существует последовательность частично изометрических операторов $\bar{w}=(w_n)$ такая, что $W=\Pi(\bar{w})$.

(iii) Если, дополнительно, начальный P и конечный Q проекторы W таковы, что $PQ=O$, $P+Q=I$, то последовательность $w=(w_n)$ можно подобрать таким образом, чтобы $p_n q_n=0$, $p_n+q_n=I$, где p_n, q_n — начальный и конечный проекторы w_n, т. е. $w_n^* w_n = p_n$, $w_n w_n^* = q_n$. По поводу доказательства см. лемму 2.2.3 [3], другое доказательство может быть дано с помощью методов леммы 1.1.4 [23].

2.2. Выделим некоторые подалгебры Неймана алгебры $\Pi(\bar{M})''$ и изучим их свойства.

Лемма 2.2.1. Всякой последовательности $\bar{b}'=(b_n')$ из M' отвечает оператор $\Pi(\bar{b}')$ из $\Pi(\bar{M})'$, где Π — представление $\bar{M}$, построенное в п. 2.1, причем если $\bar{b}'^*=(b_n'^*)$, то $\Pi(\bar{b}')^* = (\Pi\bar{b}'^*)$.

Доказательство. Пусть $\bar{b}'=(b_n') \in \bar{M}_+'$. Очевидно, позитивный функционал $\rho_{b'}(\bar{x}) = \lim_{n \in U} \rho(b_n' x_n)$, где $\bar{x}=(x_n) \in \bar{M}$, подчинен ρ_U, т. е. $\rho_{\overline{b'}}(\overline{x}^*\overline{x}) \leqslant \|\overline{b'}\| \rho_U(\overline{x}^*\overline{x})$, где $\|\overline{b'}\| \leqslant \sup_n \|b_n'\|$. Согласно § 19 гл. IV, [12] отвечает оператор $\Pi(\overline{b'})$ из $\Pi(\overline{M})_+'$ ■

Пусть E_U — ортогональный проектор на $[\Pi(\overline{M})'\xi_U]$, тогда $E_U \in \in \Pi(\overline{M})''$. Вектор ξ_U является циклическим отделяющим вектором для редуцированной алгебры Неймана $\mathfrak{M}_U = (\Pi(\overline{M})'')_{E_U}$ порожденной $E_U A E_U$, где $A \in \Pi(\overline{M})''$, и действующей в пространстве $H_U = E_U H_{\rho_U}$. Действительно, $[\mathfrak{M}_U \xi_U] = [E_U \Pi(M)'' \xi_U] = E_U H_{\rho_U}$ и $[\Pi(\overline{M})'\xi_U] = E_U H_{\rho_U}$. Согласно п. 1.1,. можно определить м. о. Δ_U г. м. а. σ_t^U-алгебры $\mathfrak{M}_U$, отвечающих вектору ξ_U, а также оператор унитарной инволюции j_U и операторы $S_U = j_U \Delta_U^{1/2}$ и $F_U = j_U \Delta_U^{-1/2}$.

Лемма 2.2.2. Пусть $\overline{M}_U^0$ — множество всех последовательностей $\overline{x}$ из $\overline{M}$, для которых $\Pi(\overline{x}) E_U$, $\Pi(\overline{x}^*) E_U \in \mathfrak{M}_U$. Тогда $\Pi(\overline{x}) E_U = E_U \Pi(\overline{x})$, $\overline{M}_U^0$ — C^*-подалгебра $\overline{M}$ и $\Pi(\overline{M}_U^0) E_U = \mathfrak{M}_U$, кроме того,

$$I = \{\overline{x} = (x_n) \in \overline{M}_U^0 : \lim_{n \in U} \rho(x_n^* x_n) = 0\}$$

— двусторонний идеал в $\overline{M}_U^0$ и $\Pi(\overline{M}_U^0) = \overline{M}_U^0 / I$.

Доказательство. Заметим, что $\Pi(\overline{x}^*) E_U = E_U \Pi(\overline{x}^*) E_U$; следовательно, $E_U \Pi(\overline{x}) = E_U \Pi(\overline{x}) E_U = \Pi(\overline{x}) E_U$.

Понятно, что $\overline{M}_U^0$ — $*$-алгебра и что она равномерно замкнута, т. е. $\overline{M}_U^0$ — C^*-алгебра. Далее, для всякого $A \in \mathfrak{M}_U$ оператор $E_U A E_U \in \Pi(\overline{M})''$ и поэтому, согласно лемме 2.1.2, существует $\overline{z} \in \overline{M}$ такой, что $\Pi(\overline{z}) E_U = A$ и $\Pi(\overline{z}^*) E_U = A^*$, но тогда $\overline{z} \in \overline{M}_U^0$ и $\Pi(\overline{M}_U^0) E_U = \mathfrak{M}_U$. Наконец, если $\overline{x} \in I$, то $\lim_{n \in U} \rho(x_n^* x_n) = (\Pi(\overline{x})\xi_U, \Pi(\overline{x})\xi_U) = 0$ и $\Pi(\overline{x})\xi_U = 0$, а значит, $\Pi(\overline{x}) E_U = 0$. Но тогда для любого $\overline{y} \in \overline{M}_U^0$, $\Pi(\overline{y})\Pi(\overline{x}) E_U = 0 = \Pi(\overline{y}\overline{x}) E_U$; $0 = \Pi(\overline{x}) E_U \Pi(\overline{y}) = \Pi(\overline{x})\Pi(\overline{y}) E_U$ и $\Pi(\overline{x}\overline{y}) E_U = 0$, $\overline{y}\overline{x}$, $\overline{x}\overline{y} \in I$ ■

Далее, для $\overline{x} = (x_n) \in \overline{M}_U^0$ положим

$$J\Pi(\overline{x})\xi_U = \Pi(j(\overline{x}))\xi_U, \tag{2.1}$$

где $j(\overline{x}) = (j_\rho x_n j_\rho) \in \overline{M}'$, а $\Pi(j(\overline{x}))$ определен согласно лемме 2.2.1. Но тогда для $\overline{y} = (y_n) \in \overline{M}_U^0$,

$$(J\Pi(\overline{x})\xi_U, \Pi(\overline{y})\xi_U) = \lim_{n \in U} (j_\rho x_n j_\rho \xi, y_n \xi) = (J\Pi(\overline{y})\xi_U, \Pi(\overline{x})\xi_U), \tag{2.2}$$

а значит, $J^* = J$ и $J\xi_U = \xi_U$.

Далее, так как $\overline{x} \to \Pi(\overline{x})$ — представление, то $\overline{x}^* \to \Pi(\overline{x}^*)$. Следовательно, $S_U \Pi(\overline{x})\xi_U = \Pi(\overline{x}^*)\xi_U = \Pi(\overline{x}_s)\xi_U$, где $\overline{x}_s = (S_\rho x_n S_\rho)$.

Поэтому для $\bar{x}=(x_n)$, $\bar{y}=(y_n)\in\bar{M}_U^\rho$

$$(\Delta_U^{1/2}\Pi(\bar{y})\xi_U,\ \Delta_U^{1/2}\Pi(\bar{x})\xi_U)=(S_U\Pi(\bar{x})\xi_U,\ S_U\Pi(\bar{y})\xi_U)=$$
$$=\lim_{n\in U}(S_\rho x_n\xi,\ S_\rho y_n\xi)=\lim_{n\in U}(\Delta_\rho^{1/2}y_n\xi,\ \Delta_\rho^{1/2}x_n\xi). \tag{2.3}$$

Определение 2.2.3. Пусть $\bar{f}\in H_U$ и (f_n) — ограниченная по норме последовательность векторов из H_ρ такая, что $(\bar{f},\Pi(\bar{x})\xi_U)=\lim\limits_{n\in U}(f_n, x_n\xi)$ для $\bar{x}=(x_n)\in\bar{M}_U^\rho$ и $(\bar{f},\bar{f})=\lim\limits_{n\in U}(f_n, f_n)$. В этом случае будем писать $\bar{f}\approx(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

Поскольку ξ_U — циклический вектор в H_U для $\Pi(\bar{M}_U^\rho)$, то из доказательства леммы 2.1.2 следует, что для каждого $\bar{f}$ существует ограниченная последовательность $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$, где $f_i\in H_\rho$ такая, что $\bar{f}\approx(f_i)$.

Предложение 2.2.4. Имеют место соотношения

$$\Delta_U^{1/2}\Pi(\bar{x})\xi_U\approx(\Delta_\rho^{1/2}x_n\xi),\quad \bar{x}=(x_n)\in\bar{M}_U^\rho, \tag{2.4}$$
$$J=j_U. \tag{2.5}$$

Доказательство. Пусть $\bar{H}$ — гильбертово пространство, элементами которого являются ограниченные по норме последовательности $\bar{f}\sim(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$, где $f_i\in H_\rho$, а скалярное произведение задается по формуле $(\bar{f},\bar{g})=\lim\limits_{n\in U}(f_n, g_n)$. Две последовательности (f_n^1) и (f_n^2) назовем эквивалентными $((f_n^1)\sim(f_n^2))$, если $\lim\limits_{n\in U}\|f_n^1-f_n^2\|=0$. Пусть $(f_i^1)\sim(f_i^2)$, тогда они определяют один и тот же вектор $\bar{f}$ в $\bar{H}$. Среди эквивалентных последовательностей всегда содержатся последовательности вида $(x_n\xi)$ и $(x_n'\xi)$, где $x_n\in M_a$, или $x_n'\in M_a'$, поскольку $M_a''=M$ и $(M_a')''=M$. Заметим, что всякому $\bar{f}$ из $\bar{H}$ отвечает ограниченная последовательность (f_i), где $f_i\in H_\rho$, что доказывается точно так же, как и лемма 2.1.2.

Понятно, что $H_U\subset\bar{H}$; через E обозначим проектор на H_U. В $\bar{H}$ рассмотрим оператор $\bar{j}$, который определим следующим образом

$$\bar{j}(x_n\xi)=(j_\rho x_n\xi).$$

Тогда $\bar{j}$ — антиунитарный оператор в $\bar{H}$ со свойствами: $\bar{j}^2=I$, $\bar{j}^*=\bar{j}$ и $\bar{j}\bar{\xi}=\bar{\xi}$, где $\bar{\xi}=(\xi_i)$, $\xi_1=\xi_2=\ldots=\xi$. Более того, $J=E\bar{j}E$, где J определен согласно (2.1). Докажем, что $\bar{j}$ коммутирует с E и $J=\bar{j}E$. Предположим противное, тогда существует вектор $\bar{f}$ из H_U такой, что $\bar{j}\bar{f}=f_1+f_2$, где $f_1\in H_U$,

$f_2 \perp H_U$. Следовательно, $\overline{f} = \overline{j} f_1 + \overline{j} f_2$, где $j f_i \in H_U$ ($i=1, 2$) и $\overline{j} f_1 \perp \overline{j} f_2$, поскольку $(\overline{j} f_1, \overline{j} f_2) = (f_2, f_1) = 0$. Таким образом, $J\overline{f} = f_1$ и $J(\overline{j} f_2) = 0$, т. е. J имеет ядро. Так как $J = J^*$ (см. (2.1)), то $\operatorname{Ker} J = \operatorname{Coker} J$. Пусть P — проектор на ранг J в H_U и $f \in PH_U$, тогда $Jf = E\overline{j}Ef = E\overline{j}f = \overline{j}f$ и $J^2 f = J\overline{j}f = E\overline{j}\overline{j}f = Ef = f$. Следовательно,

$$J = \overline{j} P.$$

Теперь рассмотрим в $\overline{H}$ оператор $\overline{\Delta}^{1/2} \overline{f} \sim (\Delta_\rho^{1/2} x_n \xi)$, где $\overline{f} \sim (x_n \xi)$, $x = (x_n) \in \overline{M}_U^\rho$ и положим

$$B = E \overline{\Delta}^{1/2} E. \tag{2.6}$$

Понятно, что $B \geqslant 0$, а из (2.3) следует, что $0 \leqslant B \leqslant \Delta_U^{1/2}$. Если $\overline{y} = (y_n)$, $\overline{a} = (a_n) \in \overline{M}_U^\rho$, то можно написать

$$\lim_{n \in U} (y_n \xi, \Delta_\rho^{1/2} a_n \xi) = (\Pi(\overline{y}) \xi_U, B\Pi(\overline{a}) \xi_U),$$

с другой стороны, учитывая (2.2), выпишем соотношение

$$\lim_{n \in U} (y_n \xi, \Delta_\rho^{1/2} a_n \xi) = \lim_{n \in U} (a_n^* \xi, j_\rho y_n \xi) = (S_U \Pi(\overline{a}) \xi_U, J\Pi(\overline{y}) \xi_U) =$$
$$= (\Pi(\overline{y}) \xi_U, JS_U \Pi(\overline{a}) \xi_U).$$

Сравнивая эти равенства, находим, что на $\mathfrak{M}_U \xi_U$

$$B = JS_U = Jj_U \Delta_U^{1/2}. \tag{2.7}$$

Тогда $v = Jj_U$ — частичная изометрия с конечным проектором P и начальным — $j_U P j_U$, а $\overline{B} = v\Delta_U^{1/2}$ — полярное разложение для $\overline{B}$. Если мы докажем самосопряженность $\overline{B}$, то из $0 < B < \Delta_U^{1/2}$ на $\mathfrak{M}_U \xi_U$ следует ввиду (2.7), что

$$v = Jj_U = P \text{ и } J = Pj_U = j_U P = \overline{j} P = P\overline{j}. \tag{2.8}$$

Рассмотрим $B^* = S_U^* J$ и заметим, что $\mathfrak{M}_U'$ — существенная область определения для $S_U^* = F_U$ [46]. Пусть N' — подалгебра Неймана $\mathfrak{M}_U'$, порожденная $\Pi(j(\overline{x}))$, где $j(\overline{x}) = (j_\rho x_n j_\rho)$, $\overline{x} = (x_n) \in \overline{M}_U^\rho$. Из (2.1) получаем, что $[N' \xi_U] = PH_U$, следовательно, $N' \xi_U$ есть существенная область определения для $S_U^* P$, а потому $\mathfrak{M}_U \xi_U$ — существенная область для $B^* = S_U^* J$. Но на $\mathfrak{M}_U \xi_U$ оператор B симметричен, поэтому $B^* = \overline{B}$.

Ввиду (2.1) и (2.8) операторы из N' коммутируют с P. Действительно, пусть $\pi(x)$ — оператор в $\overline{H}$, отвечающий $\overline{x} \in \overline{M}_U^\rho$. Поскольку такой $\pi(\overline{x})$ коммутирует с E, то $\pi(\overline{x}) = E\pi(\overline{x})E + (I-E)\pi(\overline{x})(I-E)$ и $\pi(j(\overline{x})) = E\overline{j}\pi(\overline{x})\overline{j}E$. Так как $J = E\overline{j}E = \overline{j}P$, то $\Pi(j(\overline{x})) = \overline{j}P\pi(\overline{x})P\overline{j} + E\overline{j}(I-E)\pi(\overline{x}) \times$

$\times(I-E)\bar{j}\bar{E}$, поэтому $\Pi(j(\bar{x}))P=\bar{j}P\pi(\bar{x})P\bar{j}=P\Pi(j(\bar{x}))$ $(P\bar{j}=\bar{j}P,\ P\leqslant E)$.

Через N обозначим алгебру Неймана, порожденную $JB'J$, где $B'\in N'$. В силу (2.8) $N\subset\mathfrak{M}_U$, операторы из N коммутируют с P, более того, ξ_U является циклическим вектором для NP и и $N'P$ в PH_U (см. (2.1)). Но $N\xi_U\subset PH_U$ инвариантно относительно $S_U=j_U\Delta_U^{1/2}$, а $N'\xi_U$ инвариантно относительно F_U, тогда $N_a\xi_U$ инвариантно относительно Δ_U, сужение которого на $N_a\xi_U$ совпадает с модулярным оператором алгебры N. Следовательно, $N-\sigma_t^U$, $t\in\mathrm{R}$, —инвариантная подалгебра $\mathfrak{M}_U$, поэтому в силу [4] (или [47]) в $\mathfrak{M}_U$ на N существует т. норм. условное ожидание τ такое, что $\rho_U\cdot\tau=\rho_U$.

Докажем, что существует $\bar{x}=(x_n)\in\bar{M}_U^{\rho}$ такая, что если $\Pi(\bar{x})\bar{\xi}\sim(x_n\xi)\in H_U$, $\Pi(\bar{x})\bar{\xi}\neq 0$, то

$$\bar{j}\bar{x}^{\#}\bar{\xi}\sim(j_\rho x_n^{\#}\xi)\perp H_U. \qquad (2.9)$$

Пусть $A=\Pi(\bar{y})E_U\notin N$, где $\bar{y}=(y_n)\in\bar{M}_U^{\rho}$, тогда $\tau(A)=\Pi(\bar{z})E_U$, где $\bar{z}=(z_n)\in\bar{M}_U^{\rho}$ принадлежит N. Положим $x_n=y_n-z_n$, $\bar{x}=(x_n)$, очевидно $\bar{x}\in\bar{M}_U^{\rho}$. Теперь поскольку $\tau(\Pi(x^{\#})E_U)=0$, то при $m\in N$

$$(\Pi(\bar{x}^{\#})\xi_U,\ m^{*}\xi_U)=\rho_U(m\tau(\Pi(\bar{x}^{\#})))=0$$

и $\Pi(\bar{x}^{\#})\bar{\xi}\perp PH_U$, т. е. $\Pi(\bar{x}^{\#})\xi_U\in\operatorname{Ker}J$, а поэтому $\bar{j}\Pi(\bar{x}^{\#})\bar{\xi}\perp H_U$ и (2.9) выполнено.

Так как $*$-алгебра M_0, операторов с ограниченным —спектром, плотна в M (см. п. 1.3), то можно предполагать, что $\bar{x}=(x_n)$, где $x_n\in M_0$. Но тогда x_n можно представить в виде $x_n=a_n+b_n$,

$$a_n,\ b_n\in M_0,\quad \operatorname{Sp}a_n\subset e^{(-\infty,-\varepsilon)},\quad \operatorname{Sp}b_n\subset e^{(\varepsilon,\infty)}. \qquad (2.10)$$

Действительно, пусть f—финитная гладкая функция, равная единице на $(-\varepsilon,\ \varepsilon)$, причем $\operatorname{support}f\subset(-m,\ m)$, где $m\in\mathrm{N}$. Положим $c_n=\int\tilde{f}(t)\sigma_t^{\rho}(x)\,\mathrm{d}t$, где $\tilde{f}$—преобразование Фурье f. Тогда, как следует из леммы 2.4.2 (ниже), $\bar{c}=(c_n)\in\bar{M}$ и $\operatorname{Sp}c_n\in e^{(-m,m)}$. Опять, согласно лемме 2.4.2, $\Pi(\bar{c}^{\#})E_U\in N$, а значит $\tau(\Pi(\bar{x}^{\#})E_U)=\Pi(\bar{c}^{\#})E_U=0$. Поэтому имеет место (2.10). Теперь в силу (2.9), поскольку $(S_U\bar{x}^{\#}S_U)\bar{\xi}\sim(S_\rho x_n^{\#}S_\rho\xi)\in H_U$, находим, что

$$\lim_{n\in U}(x_n^{\#}\xi,\ \Delta_\rho^{1/2}x_n^{\#}\xi)=\lim_{n\in U}(j_\rho x_n^{\#}\xi,\ S_\rho x_n^{\#}\xi)=0.$$

Отсюда, ввиду (2.10), получаем, что

$$\lim_{n\in U}\|b_n\xi\|^2\leqslant e^{-\varepsilon/2}\lim_{n\in U}(\Delta_\rho^{1/2}b_n\xi,\ b_n\xi)=0,$$
$$\lim_{n\in U}\|a_n^{*}\xi\|^2\leqslant e^{-\varepsilon/2}\lim_{n\in U}(\Delta_\rho^{1/2}a_n^{*}\xi,\ a_n^{*}\xi)=0. \qquad (2.11)$$

Используя (2.11), заметим, что

$$0<\lim_{n\in U}\|x_n\xi\|^2=\lim_{n\in U}\|a_n\xi\|^2\leqslant e^{-\varepsilon}\lim_{n\in U}(\Delta_\rho^{1/2}a_n\xi,\ \Delta_\rho^{1/2}a_n\xi)$$
$$=e^{-\varepsilon}\lim_{n\in U}(\Delta_\rho^{1/2}a_n\xi,\ \Delta_\rho^{1/2}x_n\xi). \tag{2.12}$$

С другой стороны, поскольку

$$(\Delta_\rho^{1/2}a_n\xi,\ \Delta_\rho^{1/2}x_n\xi)=(S_\rho x_n\xi,\ S_\rho a_n\xi)=(x_n^*\xi,\ a_n^*\xi),$$

то

$$\lim_{n\in U}|(\Delta_\rho^{1/2}a_n\xi,\ \Delta_\rho^{1/2}x_n\xi)|=\lim_{n\in U}|(x_n^*\xi,\ a_n^*\xi)|$$
$$\leqslant\sup_n\|x_n^*\|\cdot\lim_{n\in U}\|a_n^*\xi\|=0,$$

что противоречит (2.12) и выбору $\bar{x}=(x_n)$ (см. (2.9) и выше).

Итак, оператор $\bar{j}$ в $\bar{H}$ коммутирует с E и $J=jE$. Но тогда $P=E$ и в силу (2.8) $J=j_U$, что доказывает (2.5). Отсюда и из (2.7) выводим, что $E\bar{\Delta}^{1/2}E=B=\Delta_U^{1/2}$ (см. (2.6)) ■

Следствие 2.2.5. Положим $\bar{M}_U'^\rho=(j(\bar{x})=(j_\rho x_n j_\rho):\bar{x}=(x_n)\in\bar{M}_U^\rho)$, тогда $\Pi(j(\bar{x}))=j_U\Pi(\bar{x})j_U$ и $j(\bar{x})\to\Pi(j(\bar{x}))$ есть $*$-представление $\bar{M}_U'^\rho$, причем $\Pi(\bar{M}_U'^\rho)E_U=\mathfrak{M}_U'$.

Доказательство. Поскольку $J=j_U$, то очевидно, что $\Pi(j(\bar{x}))=j_U\Pi(\bar{x})j_U$, отсюда, ввиду свойств j_U, вытекает, что $j(\bar{x})\to\Pi(j(\bar{x}))$ — $*$-представление $\bar{M}_U'^\rho$, а поскольку $\Pi(\bar{M}_U^\rho)E_U=\mathfrak{M}_U$, то и $\Pi(\bar{M}_U'^\rho)E_U=\mathfrak{M}_U'$ ■

Предложение 2.2.6. Для $\bar{x}=(x_n)\in\bar{M}_U^\rho$ справедливо соотношение

$$\sigma_t^U(\Pi(\bar{x}))E_U=\Pi(\bar{\sigma}_t(\bar{x}))E_U,\quad t\in\mathbf{R},$$

где $\bar{\sigma}_t(\bar{x})=(\sigma_t^\rho(x_n))\in\bar{M}_U^\rho$.

По поводу доказательства см. лемму 2.3.5 [2]

2.3. Изучим некоторые $*$-подалгебры C^*-алгебры $\bar{M}_U^\rho$.

Определение 2.3.1. Элемент $\bar{x}=(x_n)\in\bar{M}$ назовем ρ_U-аналитическим, если существуют $\bar{z}^{1,i}=(z_n^{1,i})$, $i=1, 2$, из $\bar{M}'$ такие, что

$$\lim_{n\in U}\|(x_n-z_n^{1,1})\xi\|=\lim_{n\in U}\|(x_n^*-z_n^{1,2})\xi\|=0. \tag{3.1}$$

В свою очередь, для $(\bar{z}^{1,i})^*$ существуют $\bar{x}^{1,i}$, $i=1, 2$, из $\bar{M}$ такие, что

$$\lim_{n\in U}\|((z_n^{1,i})^*-x_n^{1,\tilde{i}})\xi\|=0,\quad i=1, 2. \tag{3.2}$$

Далее для $(\bar{x}^{1,i})^*$ существует $\bar{z}^{2,i}$ из $\bar{M}$ и т. д. Множество всех ρ_U-аналитических элементов $\bar{M}$ условимся обозначать через M_U^ρ. Аналогично определим $M_U'^\rho$ для $\bar{M}'$.

Заметим, что M_U^ρ — $*$-подалгебра $\bar{M}$, более того, если $\bar{x}\in M_U^\rho$, то $\bar{x}^{k,i}=(x_n^{k,i})$ и $j(\bar{z}^{k,i})=(j_\rho z_n^{k,i} j_\rho)$, где $i=1, 2$, $k\in\mathbb{N}$, также принадлежат M_U^ρ, поэтому

$$j(M_U^\rho)=M_U'^\rho. \tag{3.3}$$

Лемма 2.3.2. Если $\bar{x}=(x_n)\in M_U^\rho$, то $\bar{x}\in\bar{M}_U^\rho$ и $\Pi(\bar{x})E_U\in\in(\mathfrak{M}_U)_a$, т. е. $\Pi(\bar{x})E_U$ — аналитический элемент алгебры $\mathfrak{M}_U$.

Доказательство. Так как $\Pi(\bar{x})\xi_U=\Pi(\bar{z}^{1,1})\xi_U$ и $\Pi(\bar{x}^*)E_U=\Pi(\bar{z}^{1,2})E_U$ (см. (3.1)), то $H_U=E_U H_{\rho_U}$-инвариантное подпространство для $\Pi(\bar{x})$ и $\Pi(\bar{x}^*)$, т. е. $(I-E_U)\Pi(\bar{x})E_U$, $(I-E_U)\Pi(\bar{x}^*)E_U=0$, а значит, $\Pi(\bar{x})=E_U\Pi(\bar{x})E_U+(I-E_U)\times\times\Pi(\bar{x})(I-E_U)$ и $E_U\Pi(\bar{x})=\Pi(\bar{x})E_U$, т. е. $\bar{x}\in\bar{M}_U^\rho$. Далее,

$$\Delta_U\Pi(\bar{x})\xi_U=F_U S_U\Pi(\bar{x})\xi_U=F_U\Pi(\bar{z}^{1,2})\xi_U=\Pi(\bar{x}^{1,2})\xi_U.$$

Аналогичный подсчет показывает, что

$$\begin{aligned}\Delta_U^k\Pi(\bar{x})\xi_U&=\Pi(\bar{x}^{k,2})\xi_U,\\ \Delta_U^{-k}\Pi(\bar{x})\xi_U&=\Pi(\bar{x}^{k,1*})\xi_U.\end{aligned} \tag{3.4}$$

Отсюда следует, что $\Pi(\bar{x})E_U\in(\mathfrak{M}_U)_a$ ■

Предложение 2.3.3. Последовательность $\bar{x}=(x_n)\in\bar{M}^\rho$ тогда и только тогда принадлежит M_U^ρ, когда $\Pi(\bar{x})E_U\in(\mathfrak{M}_U)_a$.

Доказательство. С учетом предыдущей леммы достаточно показать, что если $\bar{x}\in\bar{M}_U^\rho$ такова, что $\Pi(\bar{x})E_U$, $\Pi(\bar{x}^*)E_U\in\in(\mathfrak{M}_U)_a$, то $\bar{x}=(x_n)\in M_U^\rho$. Если $\Pi(\bar{x})E_U$, $\Pi(\bar{x}^*)E_U\in(\mathfrak{M}_U)_a$, то $S_U\Pi(\bar{x}^*)S_U E_U\in(\mathfrak{M}_U')_a$, а потому в силу следствия 2.2.5 существует $\bar{z}^{1,1}=(z_n^{1,1})\in\bar{M}_U'^\rho$ такой, что $S_U\Pi(\bar{x}^*)\xi_U=\Pi(\bar{z}^{1,1})\xi_U$, или $\Pi(\bar{x})\xi_U=\Pi(\bar{z}^{1,1})\xi_U$, причем $\Pi(\bar{z}^{1,1})E_U\subset(\mathfrak{M}_U')_a$. Докажем, что $\lim_{n\in U}\|(x_n-z_n^{1,1})\xi\|=0$, но это элементарно следует из соотношения

$$\|(x_n-z_n^{1,1})\xi\|^2=\|x_n\xi\|^2+\|z_n^{1,1}\xi\|-(x_n\xi, z_n^{1,1}\xi)^{-}(z_n^{1,1}\xi, x_n\xi),$$

поскольку $\lim_{n\in U}\|x_n\xi\|^2=\|\Pi(\bar{x})\xi_U\|^2$, $\lim_{n\in U}(x_n\xi, z_n^{11}\xi)=\lim_{n\in U}\rho(z_n^{1,1*}x_n)=$ $=(\Pi(\bar{x})\xi_U, \Pi(\bar{z}^{1,1})\xi_U)$. Далее, так как $\Pi(\bar{z}^{1,1})E_U\in(\mathfrak{M}_U')_a$, то существует $\bar{x}^{1,1}\in M_U^\rho$ такой, что $\Pi(\bar{z}^{1,1})^*\xi_U=\Pi(\bar{x}^{1,1})\xi_U$ и т. д. ■

В заключение этого пункта докажем следующее предложение

Предложение 2.3.4. Для любых $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}\in M_U^\rho$ и $k\in\mathbb{N}$

имеет место соотношение

$$(\Delta_U^k \Pi(\bar{y}) \Delta_U^{-k} \Pi(\bar{x}) \xi_U, \quad \Pi(\bar{z}) \xi_U = \lim_{n \in U} (\Delta_\rho^k y_n \Delta_\rho^{-k} x_n \xi, \ z_n \xi). \tag{3.5}$$

(Если $\bar{x} = (x_n) \in M_a^\rho$, то будем предполагать, что $x_n \in M_a$. Действительно, поскольку $M_a'' = M$, то по теореме Капланского о плотности [27] всегда x_n можно аппроксимировать сколь угодно точно на векторе $\xi \in H_\rho$ элементом $x_n^a \in M_a$, так, что $\| x_n^a \| \leqslant \| x_n \|$. В результате $\bar{x} = (x_n)$ заменится на эквивалентную последовательность $\bar{x}^a = (x_n^a)$ такую, что $\Pi(\bar{x})^\# E_U = \Pi(\bar{x}^a)^\# E_U$).

Доказательство. Пусть $k = 1$, поскольку $\Delta_U \Pi(\bar{x}) \xi_U \approx \approx (\Delta_\rho x_n \xi)$ (см. (3.4)), то для $\bar{b} = (b_n) \in M_U^\rho$

$$(\Delta_U \Pi(\bar{y}) \Delta_U^{-1} \xi_U, \quad \Pi(\bar{b}) \xi_U) = \lim_{n \in U} (\Delta_\rho y_n \xi, \ b_n \xi).$$

Возьмем $\bar{b} = (b_n)$ так, чтобы $b_n = z_n a_n$, где $\bar{z} = (z_n)$, $\bar{a} = (a_n) \in M_U^\rho$, причем $\Pi(\bar{a}) \xi_U = \Pi(\bar{a}') \xi_U$ и $\Pi(\bar{a}'^*) \xi_U = \Pi(\bar{x}) \xi_U$. Ввиду предложения 2.3.3, для всякого $\bar{x} = (x_n) \in M_U^\rho$ существует такое $\bar{a} = (a_n) \in M_U^\rho$, более того, $a_n = x_n^{1,1}$, если придерживаться обозначений определения 2.3.1. Тогда

$$(\Delta_U \Pi(\bar{y}) \Delta_U^{-1} \xi_U, \Pi(\bar{z}) \Pi(\bar{a}) \xi_U) = (\Delta_U \Pi(\bar{y}) \Delta_U^{-1} \Pi(\bar{a}')^* \xi_U, \Pi(\bar{z}) \xi_U) =$$
$$= (\Delta_U \Pi(\bar{y}) \Delta_U^{-1} \Pi(\bar{x}) \xi_U, \ \Pi(\bar{z}) \xi_U)$$

и

$$(\Delta_U \Pi(\bar{y}) \Delta_U^{-1} \Pi(\bar{x}) \xi_U, \Pi(\bar{z}) \xi_U) = \lim_{n \in U} (\Delta_\rho y_n \Delta_\rho^{-1} \xi, \ z_n a_n' \xi) =$$
$$= \lim_{n \in U} (\Delta_\rho y_n \Delta_\rho^{-1} x_n \xi, \ z_n \xi).$$

Тем самым (3.5) для $k = 1$ справедливо. Общий случай доказывается аналогично ∎

Следствие 2.3.5. Для $\bar{y} \in M_U^\rho$ и $k \in \mathbf{Z}$ справедливы соотношения

$$\| \Delta_U^k \Pi(\bar{y}) \xi_U \| = \lim_{n \in U} \| \Delta_\rho^k y_n \xi \|. \tag{3.6}$$

2.4. Рассмотрим операторы с ограниченным спектром алгебры $\mathfrak{M}_U$ (см. п. 1.3).

Определение 2.4.1. Будем говорить, что элемент $\bar{a} = (a_n) \in \bar{M}$ имеет ρ_U-ограниченный спектр, если существует ограниченное подмножество $E \subset \mathbf{R}_+$ ($E = e^{[-c, c]}$, где $c \in \mathbf{R}_+$) такое, что $a_n \in M(\sigma^\rho, E)$ для $\forall n$ (см. п. 1.3)). Множество всех элементов из $\bar{M}$ с ρ_U-ограниченным спектром обозначим через N_U^ρ, аналогичное подмножество в $\bar{M}'$ через — $N_U'^\rho$.

В силу результатов, приведенных в п. 1.3, N_U^ρ — *-подалгебра $\overline{M}$, причем если $\overline{a}=(a_n)\in N_U^\rho$, то $j(\overline{a})=(j_\rho a_n j_\rho)\in N_U'^\rho$, где j_ρ — антиунитарный оператор в H_ρ, задающий унитарную инволюцию в $M\xi_\rho$ (см. п. 1.1). Таким образом, $j(N_U^\rho)\subseteq N_U'^\rho$. Так как $j_\rho^2=I$, то из соображений симметрии получаем, что

$$j(N_U^\rho)=N_U'^\rho, \quad j(N_U'^\rho)=N_U^\rho. \tag{4.1}$$

Лемма 2.4.2. Пусть $x\in M(\sigma^\rho, E)$, где $E\subset e^{[-c,c]}$, а c — положительная константа, тогда для $k\in\mathbb{R}$.

$$\Delta_\rho^k x\Delta_\rho^{-k}\in M(\sigma^\rho, E), \quad \|\Delta_\rho^k x\xi\|\leqslant e^{c|k|}\|x\xi\|,$$
$$\|\Delta_\rho^k x\Delta_\rho^{-k}\|\leqslant d(k, E)\cdot\|x\|, \tag{4.2}$$

где $d(k, E)$ — положительная постоянная, зависящая от k и E.

Доказательство. Пусть f — гладкая финитная функция на $\mathbb{R}$, равная единице на $\ln E$ и нулю вне $(-(c+\varepsilon), c+\varepsilon)$. Тогда

$$x\xi_\rho=f(\ln\Delta_\rho)\,x\xi_\rho=\int\tilde{f}(t)\,\Delta_\rho^{it}x\xi_\rho dt,$$

где $\tilde{f}$ — преобразование Фурье функции f, или

$$x=\int\tilde{f}(t)\,\sigma_t^\rho(x)\,dt.$$

Интеграл понимается в слабом смысле).

Но тогда $\Delta_\rho^k x\Delta_\rho^{-k}=\int f_k(t)\,\sigma_t^\rho(x)\,dt$, где $f_k(t)$ — преобразование Фурье финитной функции $e^{kt}f(t)$ с носителем в $(-(c+\varepsilon), (c+\varepsilon))$. Осталось заметить, что

$$\|\Delta_\rho^k x\Delta_\rho^{-k}\|\leqslant\|f_k\|_{L_1}\cdot\|x\|,$$
$$\|\Delta_\rho^k x\xi\|=\|\Delta_\rho^k f(\ln\Delta_\rho)\,x\xi\|\leqslant e^{c|k|}\cdot\|x\xi\|.$$

Следствие 2.4.3. Если $\overline{x}=(x_n)\in N_U^\rho$, то $\overline{x}$ — является ρ_U-аналитическим, т. е. $N_U^\rho\subset M_U^\rho$, причем (см. определение 2.3.1)

$$x_n^{k,2}=\Delta_\rho^k x_n\Delta_\rho^{-k}, \quad x_n^{k,1}=\Delta_\rho^k x_n{}^*\Delta_\rho^{-k} \tag{4.3}$$

и если $x_n\in M(\sigma^\rho, E)$, то $x^{k,i}\in M(\sigma^\rho, E)$ (мы полагаем, что $E=E^{-1}$). Более того, существует константа $c(\overline{x})$, $(\ln E\subset(-c(\overline{x}), c(\overline{x}))$ такая, что

$$\|\Delta_\rho^k x_n\xi\|\leqslant e^{kc(\overline{x})}\|x_n\xi\|, \quad \|\Delta_\rho^{-k}x_n\xi\|\leqslant e^{kc(\overline{x})}\|x_n\xi\|, \tag{4.4}$$

и константа $d(\overline{x}, k)$ такая, что

$$\|x_n^{k,2}\|\leqslant d(\overline{x}, k)\cdot\|\overline{x}\|, \quad \|x_n^{k,1}\|\leqslant d(\overline{x}, k)\cdot\|\overline{x}\|. \tag{4.5}$$

Предложение 2.4.4. Если $\overline{x}\in N_U^\rho$ и $x_n\in M(\sigma^\rho, E)$, где $E\subset e^{[-c,c]}$, то $\Pi(\overline{x})\,E_U\in\mathfrak{M}_U(\sigma_U, E)$.

Предварительно докажем, что справедлива

Лемма 2.4.5. Пусть μ — борелевская σ-конечная мера на $\mathbf{R}$, A — оператор умножения в $L^2(\mathbf{R}, \mu)$ на функцию e^λ, f — вектор из $L^2(\mathbf{R}, \mu)$ такой, что

$$\| A^k f \| \leqslant e^{|k|c} \| f \|,$$

где $k \in \mathbf{Z}$, а $c > 0$ — константа. Тогда $f \equiv 0$ на $(-\infty, -c) \cup (c, \infty)$ по модулю нуль.

Доказательство. Пусть $f_1(\lambda) = f(\lambda)$ на $(c+\varepsilon, \infty)$ и $f_1(\lambda) \equiv 0$ вне $(c+\varepsilon, \infty)$, тогда при $k > 0$

$$e^{kc} \| f \| \geqslant \| A^k f \| \geqslant \| A^k f_1 \| = \left[\int_{c+\varepsilon}^{\infty} e^{2\lambda k} | f_1(\lambda) |^2 d\mu(\lambda) \right]^{1/2} \geqslant$$

$$\geqslant e^{(c+\varepsilon)k} \| f_1 \|,$$

т. е. $kc + \ln \| f \| \geqslant k(c+\varepsilon) + \ln \| f_1 \|$, но это исключено для достаточно больших k, если $\| f_1 \| > 0$ ■

Доказательство предложения 2.4.4. Итак, пусть $\bar{x} = (x_n) \in M_U^\rho$, $x_n \in M(\sigma^\rho, E)$. Из (4.3) и (4.4) следует, что

$$\| x_n^{k,2} \xi \| \leqslant e^{kc} \| x_n \xi \|; \quad \| (x_n^{k,1})^* \xi \| \leqslant e^{kc} \| x_n \xi \|.$$

Но тогда

$$\| \Pi(\bar{x}^{k,2}) \xi_U \| = \lim_{n \in U} \| x_n^{k,2} \xi \| \leqslant e^{kc} \lim_{n \in U} \| x_n \xi \| = e^{kc} \| \Pi(\bar{x}) \xi_U \|$$

и, в силу (3.4),

$$\| \Delta_U^k \Pi(\bar{x}) \xi_U \| \leqslant e^{kc} \| \Pi(\bar{x}) \xi_U \| \cdot$$

Аналогично находим, что при $k \in \mathbf{N}$

$$\| \Delta_U^{-k} \Pi(\bar{x}) \xi_U \| \leqslant e^{kc} \| \Pi(\bar{x}) \xi_U \|.$$

Теперь из леммы 2.4.5 следует, что $\Pi(\bar{x}) E_U \in \mathfrak{M}_U(\sigma^U, E)$ ■

Предложение 2.4.6. Пусть $A \in \mathfrak{M}_U(\sigma^U, e^{[-c,c]})$ (см. п. 1.3), тогда для всякого $\varepsilon > 0$ существует последовательность $\bar{a} = (a_n)$, где $a_n \in M(\sigma^\rho, e^{[-(c+\varepsilon), (c+\varepsilon)]})$, и $AE_U = \Pi(\bar{a}) E_U$, $A^* E_U = \Pi(\bar{a}^*) E_U$ (ср. с предложением 2.4.4).

Таким сбразом, $\Pi(\bar{x}) E_U \in \mathfrak{M}_{U,0}$ тогда и только тогда, когда $\bar{x} \in N_U^\rho$.

Доказательство. Так как $A = \Pi(\bar{x}) E_U$, $\bar{x} \in M_U^\rho$, $A \in \mathfrak{M}_U \times (\sigma^U, e^{|-c,c|})$, то

$$\| \Delta^k \Pi(\bar{x}) \xi_U \| \leqslant e^{|k|c} \| \Pi(\bar{x}) \xi_U \|, \quad k \in \mathbf{Z}. \tag{4.6}$$

Пусть $E_{c+\varepsilon}$ — спектральный проектор Δ_ρ такой, что $\mathrm{Sp}(\Delta_\rho E_{c+\varepsilon}) = \{\lambda \in \mathbf{R}_+, \lambda > e^{c+\varepsilon}\}$. Тогда

$$\| \Delta_\rho^k x_n \xi \|^2 = \| \Delta_\rho^k E_{c+\varepsilon} x_n \xi \|^2 + \| (I - E_{c+\varepsilon}) \Delta_\rho^k x_n \xi \|^2, \quad n \in \mathbf{N}, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Предположим, что

$$a(c+\varepsilon)=\lim_{n\in U}\|E_{c+\varepsilon}x_n\xi\|>0. \tag{4.7}$$

Тогда для некоторого $\alpha>0$, $0<\alpha<1$, $a(c+\varepsilon)=\alpha\|\Pi(\overline{x})\xi_U\|$ и в силу (3.6) справедливы оценки

$$\|\Delta_U^k\Pi(\overline{x})\xi_U\|=\lim_{n\in U}\|\Delta_\rho^k x_n\xi\|\geqslant\lim_{n\in U}\|\Delta_\rho^k E_{c+\varepsilon}x_n\xi\|\geqslant$$

$$\geqslant e^{k(c+\varepsilon)}\alpha\|\Pi(\overline{x})\xi_U\|.$$

Но при больших k эта оценка противоречит (4.6). Следовательно, (4.7) не имеет место. Аналогично, $\lim_{n\in U}\|(I-E_{-(c+\varepsilon)})x_n\xi\|=0$.

Итак, для любого $\varepsilon>0$

$$\lim_{n\in U}\|E_{-(c+\varepsilon)}x_n\xi\|=\lim_{n\in U}\|(I-E_{-(c+\varepsilon)})x_n\xi\|=0. \tag{4.8}$$

Пусть $\overline{f}$ — гладкая финитная функция, равная единице на $[-(c+\varepsilon),(c+\varepsilon)]$ и нулю вне $[-(c+\varepsilon+\varepsilon_1),\ c+\varepsilon+\varepsilon_1]$, где $\varepsilon_1>0$. Положим $x_n(f)=\int f(t)\sigma_t^\rho(x_n)\,dt$, где f — преобразование Фурье $\overline{f}$. Тогда

$$\|x_n(f)\|\leqslant\|f\|_{L_1}\cdot\|\overline{x}\|,$$

$$x_n(f)\in M(\sigma^\rho,\ e^{[-(c+\varepsilon+\varepsilon_1),\ c+\varepsilon+\varepsilon_1]})$$

и $\lim_{n\in U}\|(x_n-x_n(f))\xi\|=\lim_{n\in U}\|(x_n^*-x_n(f)^*)\xi\|=0$, что легко следует, если учесть оценки вида (4.8). Итак, $\overline{x(f)}=(x_n(f))\in N_U^\rho$ (см. определение 2.4.1) и $A=\Pi(\overline{x(f)})E_U$, $A^*=\Pi(\overline{x(f)^*})E_U$ ■

§ 3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ АЛГЕБРЫ И ЕЕ СВОЙСТВА

В этом параграфе каждому фактору M с т. норм. состоянием ρ и м. о. Δ_ρ канонически ставится в соответствие алгебра Неймана C_M^U, называемая нами асимптотической (U — свободный ультрафильтр на $\mathbf{N}$) с т. норм. состоянием ρ_U и м. о. Δ_U, которые канонически определяются по ρ и Δ_ρ соответственно. Затем рассматриваются C_M^U, ρ_U и строится классификация алгебр C_M^U (см. [2, 3]).

3.1. Напомним, что через M_d мы обозначили подалгебру $\overline{M}=l^\infty(M,\mathbf{N})$, элементами которой являются последовательности вида $\overline{x}=(x_n)$, где $x_1=x_2=\dots$ и $x_1\in M$. Понятно, что $\overline{M}_d\subset\overline{M}_U^\rho$. Действительно, если $x\in M_a$, то $\overline{x}=(x_n)$, где $x_n=x$, принадлежит M_a^ρ (см. определение 2.3.1). Поскольку M_a — сильно (слабо) плотная *-подалгебра M, то $\overline{M}_d \subset \overline{M}^{\rho}_U$ (см. лемму 2.2.2), а значит, $\Pi(\overline{M}_d)E_U$ является подалгеброй Неймана $\mathfrak{M}_U$.

Определение 3.1.1. Алгебру Неймана $C^U_M = \mathfrak{M}_U \cap \Pi(M_d)'$ назовем асимптотической алгеброй для M.

Лемма 3.1.2. $\rho_U|_{C^U_M}$ определяет т. норм. состояние на C^U_M, σ^U_t, $t \in \mathbf{R}$, — г. м. а. C^U_M, отвечающая этому состоянию.

Действительно, в силу предложения 2.2.6 $\sigma^U_t(\Pi(\overline{M}_d E_U) = \Pi(\overline{M}_d)E_U$, отсюда и из определения 3.1.1, следует, что $\sigma^U_t(C^U_M) = C^U_M$.

Докажем, что C^U_M не зависит от выбора т. норм. состояния ρ на M.

Теорема 3.1.3. Пусть M — фактор в сепарабельном гильбертовом пространстве H, $\rho(x) = (x\xi, \xi)$ и $\omega(x) = (x\eta, \eta)$, где ξ, $\eta \in H$, — т. норм. состояния на M. Если $C^U_{M,\rho}$ и $C^U_{M,\omega}$ — асимптотические алгебры, отвечающие ρ и ω, соответственно, то $C^U_{m,\rho} = C^U_{M,\omega} = C^U_M$ и $\rho_U = \omega_U$.

Доказательство. По состоянию ρ на M построим представление Π алгебры $\overline{M}$ в пространстве H_{ρ_U} как описано в п. 2.1. Пусть $\overline{\eta} = (\eta, \eta, \ldots)$ — вектор в пространстве $[\Pi(\overline{M}_d)\xi_U] \subset H_{\rho_U}$ (см. определение 2.2.3), тогда, очевидно, для $\overline{x} = (x_n) \in \overline{M}$

$$\omega_U(\overline{x}) = \lim_{n \in U}(x_n\eta, \eta) = (\Pi(\overline{x})\overline{\eta}, \overline{\eta}).$$

Это соотношение показывает, что представление $\overline{M}$, отвечающее состоянию ω_U, можно реализовать в пространстве H_{ρ_U} с помощью операторов $\Pi(\overline{x})$, $\overline{x} \in \overline{M}$, представления $\overline{M}$, построенного по состоянию ρ_U. Далее, так как $[M\eta] = H_\rho = [M'\eta]$, то $[\Pi(\overline{M})'\overline{\eta}] = E_U H_{\rho_U} = H_U$. Следовательно, $\Pi(\overline{M}^{\rho}_U)E_U = \Pi(\overline{M}^{\omega}_U)E_U = \mathfrak{M}_U$ и $\Pi(\overline{M}'^{\omega}_U)E_U = \Pi(\overline{M}'^{\rho}_U)E_U = \mathfrak{M}'_U$.

Пусть теперь $A \in (C^U_{M,\rho})_a$, тогда $A = \Pi(\overline{x})E_U$, где $\overline{x} = (x_n) \in M^{\rho}_U$ (см. предложение 2.3.3). Докажем, что $\overline{x} = (x_n) \in M^{\omega}_U$. Согласно определению 2.3.1, существуют $\overline{z}^{k,i} \in M'^{\rho}_U$ и $\overline{x}^{k,i} \in M^{\rho}_U$ $(i = 1, 2;$ $k \in \mathbf{N})$ такие, что выполнено (3.1) и (3.2) п. 1.2. Далее, так как $[M\xi] = H_\rho$, то для произвольного $\varepsilon > 0$ существует $k_\varepsilon \in M$, для которого

$$\|\eta - k_\varepsilon\xi\| < \varepsilon, \quad \|k_\varepsilon\xi\| = 1, \tag{1.1}$$

а поскольку $A = \Pi(\overline{x})E_U \in C^U_{M,\rho}$, то при $m \in M$

$$\lim_{n \in U}\|[x_n, m]\xi\| = \|[\Pi(\overline{x}, \Pi(\overline{m})]\xi_U\| = 0. \tag{1.2}$$

Отсюда следует, что при достаточно больших n выполнены следующие оценки

$$\|(x_n - z_n^{1,1})\eta\| \leqslant \|(x_n - z_n^{1,1}) k_\varepsilon \xi\| + \|(x_n - z_n^{1,1})(\eta - k_\varepsilon \xi)\| < 3C\varepsilon,$$

где $C = \sup(\|\bar{x}\|, \|\overline{z^{1,1}}\|)$. Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$, получаем, что

$$\|(\Pi(\bar{x}) - \Pi(\overline{z^{1,1}}))\bar{\eta}\| = \lim_{n \in U} \|(x_n - z_n^{1,1})\eta\| = 0.$$

Из аналогичных соображений находим, что $\lim\limits_{n \in U} \|(x_n^* - z_n^{1,2})\eta\| = 0$ и т. д. Следовательно, $\bar{x} = (x_n) \subset M_U^\omega$, а ввиду (1.2), получаем, что $A = \Pi(\bar{x}) E_U \in (C_{M,\omega}^U)_a$. Таким образом, $(C_{M,\rho}^U)_a \subseteq (C_{M,\omega}^U)_a$ и, следовательно, $C_{M,\rho}^U \subseteq C_{M,\omega}^U$. Из соображений симметрии заключаем, что $C_{M,\rho}^U = C_{M,\omega}^U = C_M^U$.

Докажем теперь, что если $A \in C_M^U$, то $\omega_U(A) = \rho_U(A)$. Действительно, в силу (1.2) $w\text{-}\lim\limits_{n \in U} x_n = \rho_U(A) I$, поэтому если $\bar{m} \in \bar{M}_d$, то

$$\rho_U(A\Pi(\bar{m})) = \lim_{n \in U} \rho(x_n m) = \rho_U(A)\rho(m). \tag{1.3}$$

Но тогда, учитывая (1.1), получим, что

$$\omega_U(A) = (A\bar{\eta}, \bar{\eta}) = (A(\bar{\eta} - \Pi(\bar{k}_\varepsilon)\xi_U), \bar{\eta}) + (A\Pi(\bar{k}_\varepsilon)\xi_U, \Pi(\bar{k}_\varepsilon)\xi_U) +$$
$$+ (A\Pi(\bar{k}_\varepsilon)\xi_U, \bar{\eta} - \Pi(\bar{k}_\varepsilon)\xi_U).$$

В силу (1.1) и (1.3) средний член в правой части этого равенства равен $\rho_U(A)$, а ввиду (1.1) сумма модулей крайних членов не превосходит $2\varepsilon\|\bar{x}\|$, поэтому

$$|\omega_U(A) - \rho_U(A)| < 2\varepsilon \|\bar{x}\|.$$

Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ получаем, что $\omega_U(A) = \rho_U(A)$ для $A \in C_M^U$ ∎

Следствие 3.1.4. (i) Алгебра C_M^U, состояние ρ_U на C_m^U, г. м. а. σ_t^U, отвечающая ρ_U, являются алгебраическими инвариантами M и не зависят от выбора, т. норм. состояния ρ на M.

(iii) Алгебры $\bar{M}_U^{\rho c} = \{\bar{x} = (x_n) \mid \bar{x} \in \bar{M}_U^\rho, \Pi(\bar{x}) E_U \in C_M^U\}$, $M_U^{\rho c} = \{\bar{x} = (x_n) \mid \bar{x} \in M_U^\rho, \Pi(\bar{x}) E_U \in (C_M^U)_a\}$, $N_U^{\rho c} = \{\bar{x} \mid \bar{x} \in N_U^\rho, \Pi(\bar{x}) E_U \in (C_M^U)_0\}$ являются алгебраическими инвариантами M.

3.2. Основные свойства алгебр C_M^U можно сформулировать в виде двух теорем.

Теорема 3.2.1. Алгебра C_M^U не содержит минимальных проекторов. Пусть $Z(C_M^U)$ — центр C_M^U; если $C_M^U \neq Z(C_M^U)$, то

C_M^U не содержит абелевых проекторов, т. е. в этом случае C_M^U не может иметь компонент типа I. Аналогичными свойствами обладает алгебра $(C_M^U)_{\rho_U}$.

Доказательство приведено в [3], теорема 1.4.1

Теорема 3.2.2. Пусть M—фактор с т. норм. состоянием ρ, C_M^U —отвечающая ему асимптотическая алгебра с т. норм. состоянием ρ_U (см. п. 2.1), а Δ_U—модулярный оператор C_M^U, построенный по ρ_U. Тогда $\mathrm{Sp}\,\Delta_U$ обладает свойствами:

(i) $\mathrm{Sp}\,\Delta_U$—алгебраический инвариант M, не зависящий от U;

(ii) $\mathrm{Sp}\,\Delta_U \subseteq S(M) = \bigcap\limits_{\rho \in I} \mathrm{Sp}\,\Delta_\rho$, где Δ_ρ—модулярный оператор M, отвечающий т. норм. состоянию ρ на M, а I—множество всех таких состояний.

(iii) Точки $\mathrm{Sp}\,\Delta_U \setminus 0$ составляют замкнутую подгруппу $\mathbf{R}_+^*$, т. е. $\mathrm{Sp}\,\Delta_U \setminus 0 = \{1\}$; $(\lambda^n,\ n \in \mathbf{Z})$, $0<\lambda<1$; $(0,\ \infty)$.

По поводу доказательства см. [3] теорему 1.5.1

3.3. Теоремы, приведенные в 3.2, дают возможность построить классификацию алгебр C_M^U.

Лемма 3.3.1. Если $C_M^U \neq Z(C_M^U)$, то C_M^U не содержит прямых компонент типа I_n, $n>1$.

Лемма 3.3.2. Если $C_M^U \neq Z(C_M^U)$ и $\mathrm{Sp}\,\Delta_U = \{1\}$, то C_M^U — алгебра типа II_1.

Действительно, в этом случае ρ_U является т. норм. конечным следом на C_M^U, и в силу леммы 3.3.1 можно утверждать, что C_M^U имеет тип II_1.

Лемма 3.3.3. Если M—фактор типа II_∞ или III_0 и $C_M^U \neq Z(C_M^U)$, то C_M^U —алгебра типа II_1.

Действительно, так как согласно [20] $S(M)$ есть множество $\{0,\ 1\}$, а в силу (ii) теоремы 3.2.2 $\mathrm{Sp}\,\Delta_U \subseteq S(M)$, то $\mathrm{Sp}\,\Delta_U = \{1\}$, справедливость леммы теперь следует из леммы 3.3.2.

Лемма 3.3.4. Пусть $(C_M^U)_{\rho_U}$—централизатор ρ_U в C_M^U, P—проектор из $(C_M^U)_{\rho_U}$. Через $(C_M^U)_P$ обозначим алгебру фон Неймана в пространстве $H_P = P j_U P j_U H_U$, порожденную операторами $(j_U P j_U) PAP$, где $A \in C_M^U$, а через Δ_P—сужение Δ_U на H_P. Тогда $\mathrm{Sp}\,\Delta_P = \mathrm{Sp}\,\Delta_U$.

Лемма доказывается с помощью тех же соображений, что и теоремы 3.2.1 и 3.2.2.

В [8] построена классификация глобальных алгебр Неймана, аналогично известной классификации факторов. Согласно этой классификации, из леммы 3.3.4 следует ввиду (iii) теоремы 3.2.2, что $C_M{}^U$ может быть алгеброй типа III_λ $(0<\lambda\leqslant 1)$, II_1, коммутативной алгеброй без минимальных проекторов и $\mathbf{C}$.

Таким образом, справедлива следующая теорема

Теорема 3.3.5. Если M—фактор с сепарабельным преддуалом, то алгебра C_M^U — имеет определенный тип (т. е. ее нельзя представить в виде прямой суммы алгебр разных типов), причем типы I_n $(n>1)$, II_∞ и III_0 исключены. Далее, если M — фактор типа III_1 и $C_M^U \neq Z(C_M^U)$, то C_M^U — может быть фактором или алгеброй типа II_1, III_λ $(0<\lambda\leqslant 1)$; если M — фактор типа III_λ и $C_M^U \neq Z(C_M^U)$, то C_M^U — фактор или алгебра типа II_1, III_μ, где $\mu=\lambda^k$, $k\in\mathbf{N}$; если M — типа III_0 и $C_M^U \neq Z(C_M^U)$, то C_M^U может быть лишь алгеброй типа II_1 (в этом случае $Z(C_M^U)\neq \mathbf{C}$ (см. [22]). Наконец, если M — фактор типа II_1 и $C_M^U \neq Z(C_M^U)$, то C_M^U — алгебра типа II_1.

Для факторов M типа III_λ $(0<\lambda\leqslant 1)$ C_M^U может совпадать с $Z(C_M^U)$ и $\mathbf{C}$.

В работе [3] доказано, что все перечисленные возможности реализуются (т. е. доказана теорема существования). Тип C_M^U и наличие центра $Z(C_M^U)\neq\mathbf{C}$ — инварианты исходного фактора M, эти свойства не зависят также от выбора ультрафильтра U (см. [3]).

§ 4. МНОЖЕСТВО АСИМПТОТИЧЕСКИХ ОТНОШЕНИЙ АРАКИ — ВУДСА И АСИМПТОТИЧЕСКИЕ АЛГЕБРЫ

4.1. В [19] Араки и Вудс ввели асимптотический инвариант для классификации факторов, который они назвали множеством асимптотических отношений $A(M)$ фактора M. Пусть $\lambda\in\mathbf{R}_+$ и $0<\lambda<1$, говорят, что числа λ, λ^{-1} принадлежат $A(M)$, если $M\otimes R_\lambda \sim M$, где R_λ — фактор Пауэрса типа III_λ (см. п. 1.4). Из этого определения ясно, что $A(M)$ несет информацию о структуре фактора M. В настоящем параграфе будет указана связь $A(M)$ с модулярными операторами и асимптотическими алгебрами, а именно, мы докажем, что $A(M)=\mathrm{Sp}\,\Delta_U$ и укажем приложение этого факта.

Напомним результаты Араки — Вудса [19] по классификации факторов, которые они получили с помощью $A(M)$. Пусть фактор M типа III является бесконечным тензорным произведением факторов M_i типа I_{n_i}, где $n_i<\infty$. Такие факторы теперь принято называть факторами Араки — Вудса. Все факторы Араки — Вудса, у которых $A(M)=\mathbf{R}_+$, изоморфны между собой и изоморфны фактору вида $R_\infty = R_{\lambda_1}\otimes R_{\lambda_2}$, где R_{λ_i}, $i=1, 2$, — факторы Пауэрса, причем числа $\ln\lambda_i$, $i=1, 2$, рационально не соизмеримы. Далее, все факторы Араки — Вудса типа III_λ изоморфны R_λ.

4.2. Перейдем к изучению связи между $A(M)$ и $\mathrm{Sp}\,\Delta_U$.

Теорема 4.2.1. Для того чтобы число λ из $\mathbf{R}_+$ принадлежало $A(M)$, необходимо и достаточно, чтобы λ было собственным значением для Δ_U, а $C_M^U \neq Z(C_M^U)$, где $Z(C_M^U)$ — центр C_M^U.

Наметим доказательство, для этого приведем несколько вспомогательных лемм.

Лемма 4. 2. 2. Пусть M — алгебра Неймана в гильбертовом пространстве H, ξ — циклический отделяющий вектор для M в H, Δ_ρ — отвечающий ξ м. о. Если число λ ($\lambda>0$) является собственным значением для Δ_ρ, то существует частичная изометрия $u\in M$ такая, что

$$\Delta_\rho^{1/2}u\xi=\lambda^{1/2}u\xi,\quad \Delta_\rho^{1/2}u^*\xi=\lambda^{-1/2}u^*\xi.$$

Лемма 4.2.3. Пусть число λ ($0<\lambda<1$) является собственным значением Δ_U. Через D_λ обозначим подалгебру Неймана C_M^U, порожденную операторами из $(C_M^U)_{\rho_U}$ и операторами v из C_M^U, для которых $\Delta_U^{1/2}v\xi_U=\lambda^{1/2}v\xi_U$ (см. лемму 4.2.2). Если $Z(D_\lambda)$ — центр D_λ, то $Z(D_\lambda)=Z((C_M^U)_{\rho_U})$, где $Z((C_M^U)_{\rho_U})$ — центр $(C_M^U)_{\rho_U}$, Более того, D_λ — алгебра типа III_λ.

Следствие 4.2.4. Если выполнены условия леммы 4.2.3, то в D_λ существует частичная изометрия V со свойствами:

1. $\Delta_U^{1/2}V\xi_U=\lambda^{1/2}V\xi_U$, $\Delta_U^{-1/2}V^*\xi_U=\lambda^{1/2}V^*\xi_U$;
2. $VV=0$, $V^*V+VV^*=1$.

Теперь теорема 4.2.1 вытекает из теоремы 1.3 [15], поскольку, ввиду следствия 4.2.4, фактор M обладает свойством L_x' (см. определение 1.2 [16]), где $x=\frac{1}{1+\lambda}$.

4.3. Продолжим изучение связи между $A(M)$ и $\mathrm{Sp}\,\Delta_U$.

Теорема 4.3.1. Пусть M — фактор в сепарабельном гильбертовом пространстве H, $C_M^U\neq Z(C_M^U)$, тогда $A(M)=\mathrm{Sp}\,\Delta_U$.

Для доказательства теоремы нам понадобятся три вспомогательные леммы. Понятие глобальной алгебры типа III_1 введено в [8].

Лемма 4.3.2. Пусть R — алгебра типа III_1 в сепарабельном гильбертовом пространстве H, φ и ψ — нормальные состояния на R с одинаковыми центральными носителями. Пусть $Z(R)$ — центр R. Если $\varphi|_{Z(R)}=\psi|_{Z(R)}$, тогда для всякого $\varepsilon>0$ существует унитарный оператор v из R такой, что $\|\psi-\varphi_v\|<\varepsilon$, где $\varphi_v(\cdot)=(\varphi\cdot\mathrm{Ad}v)(\cdot)$.

Доказательство проводится аналогично доказательству для факторов [25].

Лемма 4.3.3. Пусть F — алгебра Неймана, φ — т. норм. состояние на M, $\lambda_i\in\mathrm{Sp}\,\Delta_\rho$, $i=1, 2$, где $\ln\lambda_i$ — рационально не соизмеримы. Если $R=\left(\bigotimes_{i=-\infty}^{\infty}F_i\right)''$ — тензорное произведение счетного числа экземпляров F с т. норм. состоянием $\rho=\prod_{i=-\infty}^{\infty}\varphi_i$, где $F_i=F$, $\varphi_i=\varphi$, то R — алгебра типа III_1.

Лемма 4.3.4. Если C_M^U — алгебра типа III_1, то C_M^U содержит в качестве подалгебры σ_t^U, $t\in\mathbf{R}$, инвариантную сепарабельную алгебру Неймана R типа III_1, такого же вида, как и в лемме 4.3.3.

Доказательство теоремы 4.3.1. Если C_M^U — алгебра типа II_1 или III_λ, $0<\lambda<1$, то $\mathrm{Sp}\,\Delta_U$ есть либо $\{1\}$, либо $(\lambda^n, n\in Z)^-$. Из теоремы 4.2.1 вытекает, что в этих случаях $A(M)=\mathrm{Sp}\,\Delta_U$.

Пусть C_M^U — алгебра типа III_1, покажем, что в этом случае каждое $\lambda\in\mathbf{R}_+$, $\lambda>0$, является собственным значением для Δ_U. Пусть R — σ_t^U, $t\in\mathbf{R}$, инвариантная сепарабельная подалгебра C_M^U типа III_1, построенная в лемме 4.3.4.

Положим $\varphi=\rho_U|_R$ и через R_2 обозначим I_2-подфактор R с матричными единицами e_{ij}, $i, j=1, 2$, $Z(R)$-носитель которых равен I. Пусть $R^c=R_2'\cap R$. Рассмотрим на R т. норм. состояние ψ вида $\omega_\lambda\otimes\psi_1$, где ω_λ — состояние на R_2 вида $\omega_\lambda(\cdot)=$ $=\mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix}\frac{1}{1+\lambda} & 0\\ 0 & \frac{\lambda}{1+\lambda}\end{pmatrix}\cdot\right)$, а ψ_1 — состояние на R^c, являющееся сужением φ на R^c. В силу леммы 4.3.2, существует унитарный v такой, что $\|\varphi-\psi_v\|<\varepsilon^2$. Ввиду результатов § 6 [19], ψ_v, можно представить в виде $\psi_v(A)=(A\eta, \eta)$, где $A\in R$, а вектор η принадлежит самодуальному конусу $P^\natural$, построенному для R по вектору ξ_U (см. [32], или [13]). Так как $\|\xi_U-\eta\|^2\leqslant\|\varphi-\psi_v\|\leqslant\varepsilon^2$ [32], то

$$\|\xi_U-\eta\|<\varepsilon. \tag{3.1}$$

Далее, из построения следует, что в R существует частичная изометрия a_1 такая, что $\sigma_t^\psi(a_1)=\lambda^{it}a_1$, $t\in\mathbf{R}$; $a_1a_1=0$, $a_1^*a_1+$ $+a_1a_1^*=\mathrm{I}$. Но тогда $a=\mathrm{Ad}\,v^*\cdot a_1$, обладает свойствами: $\sigma_t^{\psi_v}(a)=\lambda^{it}a$, где $\sigma_t^{\psi_v}=\mathrm{Ad}\,v^*\cdot\sigma_t^\psi\cdot\mathrm{Ad}\,v$ и

$$aa=0,\quad a^*a+aa^*=I. \tag{3.2}$$

Поэтому $\Delta_\eta^{1/2}a\eta=\sigma^\psi_{-i/2}(a)\eta=\lambda^{1/2}a\eta$, $\Delta_\eta^{1/2}a^*\eta=\lambda^{-1/2}a^*\eta$. Теперь поскольку ξ_U, $\eta\in P^\natural$, то $S_U=j_U\Delta_U^{1/2}$ и $\bar{S}_\eta=j_U\Delta_\eta^{1/2}$, где Δ_η — м. о. алгебры R, отвечающий вектору η. Следовательно, из (3.1) получим, что

$$\|\Delta_\eta^{1/2}a\eta-\Delta_U^{1/2}a\xi_U\|=\|j_U(\Delta_\eta^{1/2}a\eta-\Delta_U^{1/2}a\xi_U)\|=\|a^*\eta-a^*\xi_U\|<\varepsilon$$

и

$$\|\Delta_\eta^{1/2}a^*\eta-\Delta_U^{1/2}a^*\xi_U\|<\varepsilon.$$

Таким образом,

$$\|\Delta_U^{1/2}a\xi_U-\lambda^{1/2}a\xi_U\|<\varepsilon(1+\lambda^{1/2}),$$

$$\|\Delta_U^{1/2}a^*\xi_U-\lambda^{-1/2}a^*\xi_U\|<\varepsilon(1+\lambda^{-1/2})$$

и

$$\| a^*\xi_U-\lambda^{1/2}j_U a\xi_U\| < \varepsilon(1+\lambda^{1/2}),$$
$$\| a\xi_U-\lambda^{-1/2}j_U a^*\xi_U\| < \varepsilon(1+\lambda^{-1/2}). \qquad (3.3)$$

Итак, для $\varepsilon_n=1/2^n$ существует частичная изометрия $\bar{a}^n$, обладающая свойствами (3.2) и (3.3), где $\bar{a}^n=(a_k^n)\in M_U^{\rho c}$, $k\in\mathbf{N}$. Ввиду предложения 5.2.1 можно предполагать, что $\bar{a}^n$ — ц. п. в M, а a_k^n — частичные изометрии в M, удовлетворяющие (3.2) и (3.3) в предположении, что ξ_U, j_U и ε заменены на ξ, j_ρ и ε_n, соответственно.

Пусть D — сепарабельная *-подалгебра M с единицей, плотная в M. Тогда можно построить последовательность $\bar{u}=(u_m)$, где $u_m=a_{k(m)}^{n(m)}$, со свойствами

$$u_n u_n=0, \quad u_n^* u_n+u_n u_n^*=I;$$
$$\lim_{n\to\infty}\|[d, u_n]\xi\|=\lim_{n\to\infty}\|[d, u_n^*]\|=0, \quad d\in D; \qquad (3.6)$$

$$\lim_{n\to\infty}\|(u_n^*-\lambda^{1/2}j_\rho u_n j_\rho)\xi\|=\lim_{n\to\infty}\|(u_n-\lambda^{-1/2}j_\rho u_n^* j_\rho)\xi\|=0. \quad (3.7)$$

Из (3.7) вытекает, что $\bar{u}\in M_U^\rho$ (см. опред. 2.3.1), а из (3.6) и (3.7) следует, что $\bar{u}$ — ц. п. (см. лемму 1.4.2), а поэтому $\bar{u}\in M_U^{\rho c}$. Таким образом, $\Pi(\bar{u})E_U\in C_M^U$ и из (3.7) и предложения 2.2.4 выводим, что $\Delta_U^{1/2}\Pi(\bar{u})\xi_U=\Pi(\bar{u})\xi_U$ ■

Следствие 4.3.5. Если $C_M^U\neq Z(C_M^U)$, то $(C_M^U)_{\rho_U}$ — централизатор состояния ρ_U в C_M^U — алгебра типа II_1.

4.4. Применим развитую теорию к изучению Г-асимптотических абелевых W^*-алгебр M с Г-инвариантным состоянием, где Г — счетная подгруппа $\operatorname{Aut} M$.

Определение 4.4.1. [43] W^*-алгебра M называется асимптотически абелевой, если существует последовательность (γ_n) автоморфизмов M такая, что $s\text{-}\lim_{k\to\infty}[x, \gamma_n(y)]=0$ для любых $x, y\in M$. Пусть γ_n порождает группу Г, тогда M назовем Г — асимптотической абелевой (Г. — а. а.).

Построим примеры а. а. алгебр Неймана, возникающих в связи с представлениями а. а. C^*-алгебр. Пусть A — C^*-алгебра, Г — группа $*$-автоморфизмов A, относительно которой A является а. а., т. е. существует последовательность γ_n, где $\gamma_n\in\Gamma$ такая, что для любых $x, y\in A$

$$\lim_{n\to\infty}\|[\gamma_n(x), y]\|=0. \qquad (4.1)$$

При рассмотрении квантовых спиновых систем C^*-алгебра A возникает как алгебра квазилокальных наблюдаемых, Г —

как группа пространственных трансляций [14]. В этой ситуации ρ—Γ-инвариантное состояние, удовлетворяющее условиям КМШ (см. п. 1.1) относительно однопараметрической группы автоморфизмов G, ρ интерпретируется как равновесное состояние системы, оно является пределом гиббсовских состояний в конечных объемах, а G — как группа временной эволюции системы.

Теорема 4.4.2. Пусть A — C^*-алгебра, Γ — группа автоморфизмов A, относительно которой A — а. а., ρ — Γ-инвариантное состояние на A. Предположим, что π_ρ — представление A, построенное по ρ, согласно конструкции ГНС, и что ρ продолжается до т. норм. состояния на $M=\pi_\rho(A)''$ (если ρ — КМШ-состояние на A относительно G, то ρ продолжается до КМШ-состояния на M [46]). Тогда если $\bar{M}_\gamma=(\bar{\gamma}(\bar{x})=\gamma_n(x)_{n\in N},\ x\in M)$, то $\Pi(\bar{M}_\gamma)E_U$ — σ_t^U-инвариантная подалгебра C_M^U, изоморфная M.

Доказательство. Пусть гильбертово пространство H является пространством представления $M=\pi_\rho(A)''$. Тогда $\rho(x)=(x\xi,\ \xi)$, где $x\in M$, а ξ — циклический вектор для M в H, который в силу предположений теоремы является и отделяющим для M. Согласно конструкции ГНС, в H существует унитарное представление $\Gamma:\gamma\to U_\gamma$, для которого $\pi_\rho(\gamma(a))=$ $=U_\gamma\pi_\rho(a)U_\gamma$ при $a\in A$, $\gamma\in\Gamma$ и $U_\gamma\xi=\xi$, причем поскольку ρ — Γ-инвариантное состояние, то U_γ, $\gamma\in\Gamma$, коммутирует с Δ_ρ^{it}, $t\in R$ [33].

Так как $\pi_\rho(\gamma(a))=U_\gamma\pi_\rho(a)U_\gamma^*$, то γ, $\gamma\in\Gamma$, расширяется до автоморфизма M, а так как ρ — Γ-инвариантно, то $\rho\circ\gamma=\rho$, поэтому при $x\in M$

$$(\Pi_U(\bar{\gamma}(\bar{x}))\xi_U,\ \xi_U)=\rho_U(\bar{\gamma}(\bar{x}))=\lim_{n\in U}\rho(\gamma_n(x))=\rho(x).$$

Таким образом, $\rho_U|_{\bar{M}_\gamma}=\rho$ и $\Pi(\bar{M}_\gamma)E_U\sim M$. Поскольку при $x\in M_a$ последовательность $\bar{\gamma}(x)\in M_U^\rho$, то $\bar{M}_\gamma\subset\bar{M}_U^\rho$ (см. предложения 2.3.3). Но тогда ввиду (4.1) $\bar{M}_\gamma\subset\bar{M}_U^{\rho c}$. Поскольку $\gamma\circ\sigma_t^\rho=$ $=\sigma_t^\rho\circ\gamma$, то из 2. 2. 6, делаем вывод о том, что алгебра $\Pi(\bar{M}_\gamma)E_U$ инвариантна относительно σ_t^U, $t\in R$ ■

Следствие 4.4.3. Пусть выполнены предположения теоремы.

(i) $\bar{M}_\gamma\subset C_M$, где C_M — множество всех центральных последовательностей $\bar{x}=(x_n)$ в M таких, что $\bar{x}^*=(x_n^*)$ также ц. п. в M.

(ii) M — а. а. алгебра фон Неймана.

(iii) $\mathrm{Sp}\,\Delta_\rho=\mathrm{Sp}\,\Delta_U=S(M)$, где Δ_U и Δ_ρ — м. о. для C_M^U и M, соответственно.

(iv) Положительные точки $\mathrm{Sp}\,\Delta_\rho$ образуют группу по умножению.

(v) $A(M)=\mathrm{Sp}\,\Delta_\rho$.

(vi) M не может быть алгеброй типа I, II_∞ и III_0.

((iv) доказали независимо Араки [17] и Штормер [43], (v) — Тестард [49]).

Доказательство. (i) Так как, согласно теореме 4.4.2, $\Pi(\bar{M}_\gamma)E\subset C_M^U$ для любого свободного ультрафильтра U на $\mathbb{N}$, то $\bar{M}_\gamma\subset C_M$ и M — а. а.; (iii) согласно теореме 3.2.2, $\mathrm{Sp}\,\Delta_U\subseteq\subseteq S(M)\subseteq\mathrm{Sp}\,\Delta_\rho$, а поскольку $M\sim\Pi(\bar{M}_\gamma)E_U$, и $\Pi(\bar{M}_\gamma)E_U$, по теореме 4.4.2, σ_t^U — инвариантная подалгебра C_M^U, то $\mathrm{Sp}\,\Delta_\rho\subseteq\mathrm{Sp}\,\Delta_U\subseteq\subseteq S(M)$ и (iii) имеет место. Отсюда и из теоремы 3.2.2, следует (iv), а из (iii) и теоремы 4.3.1 вытекает (v). Из теоремы 3.4.5 следует (vi) ■

Замечание 4.4.4. В этом пункте мы рассмотрели Г-а. а. алгебру Неймана M в предположении, что на M существует т. норм. Г-инвариантное состояние ρ. В дальнейшем мы рассмотрим Г-а. а. алгебры Неймана, не предполагая существование Г-инвариантного состояния. Мы покажем, что в этом случае $C_M{}^U\neq Z(C_M{}^U)$, а если Г является абелевой, то на M существует т. норм. Г — инвариантное состояние и тем самым имеет место ситуация, рассмотренная в теореме 4.4.2.

§ 5. ЦЕНТРАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И АСИМПТОТИЧЕСКИЕ АЛГЕБРЫ

5.1. Пусть C_M — множество всех ц. п. в факторе M таких, что если $\bar{x}=(x_n)\in C_M$, то $\bar{x}^*=(x_n{}^*)\in C_M$. Ниже будет доказан что C_M — C^*-подалгебра $\bar{M}=l^\infty(M,\mathbb{N})$. Это, в свою очередь, позволит доказать, что III_0 (как и II_∞)-факторы не могут быть асимптотически абелевыми. С точки зрения алгебр C_M^U рассмотрено свойство «L» Пуканского, и в заключение параграфа изучается связь между $\mathrm{Aut}\,M$ и $\mathrm{Aut}\,C_M^U$.

5.2. Начнем с доказательства следующего предложения.

Предложение 5.2.1. Пусть $\bar{x}=(x_n)\in\bar{M}_U^{\rho c}$, т. е. $A=\Pi(\bar{x})E_U\in C_M^U$, тогда (x_n) содержит подпоследовательность $(x_{n_k})\in C_M$.

Докажем вспомогательную лемму.

Лемма 5.2.2. Пусть $\bar{x}=(x_n)\in\bar{M}$ и $\exists$ постоянная $c\,(0<c<\infty)$ такая, что для любого $\varepsilon>0$ найдется ц. п. (x_n^ε), где $x_n^\varepsilon\in M$, обладающая свойствами:

(i) $\|x_n^\varepsilon\|<c$ (c не зависит от ε);

(ii) при достаточно больших n выполнена оценка $\|(x_n-x_n^\varepsilon)\xi\|<\varepsilon$, где ξ — циклический отделяющий вектор для M.

Тогда (x_n) — ц. п. в M.

Доказательство. Пусть $a\in M_a$, тога $S_\rho a^*S_\rho\in M_a'$ и $a\xi=S_\rho a^*S_\rho\xi$. Докажем, что

$$\lim_{n\to\infty}\|[x_n, a]\,\xi\|=0. \tag{2.1}$$

Пусть $C_1=\max(\|a\|, \|S_\rho a^* S_\rho\|)$. Для $\varepsilon>0$ выберем ц. п (x_n^ε) так, чтобы выполнялись предположения (i) и (ii) леммы Тогда при достаточно больших n имеем оценку

$$\|[x_n, a]\xi\| \leqslant \|[x_n^\varepsilon, a]\xi\| + \|a\|\cdot\|(x_n - x_n^\varepsilon)\xi\| +$$
$$\|S_\rho a^* S_\rho\|\cdot\|(x_n - x_n^\varepsilon)\xi\| \leqslant \|[x_n^\varepsilon, a]\xi\| + 2C_1\varepsilon.$$

Так как (x_n^ε) — ц. п., то первое слагаемое стремится к нулю при $n\to\infty$, а так как C_1 не зависит от $\varepsilon>0$, то из произвольности $\varepsilon>0$ вытекает (2.1).

Пусть теперь a — произвольный элемент из M. Тогда поскольку $M_0''=M$ (по поводу M_0 см. п. 1.3) и M_0—$*$-подалгебра M, то по теореме Капланского о плотности для $\varepsilon>0$ существует оператор $a_\varepsilon \in M_0$ такой, что

$$\|(a-a_\varepsilon)\xi\| < \varepsilon, \quad \|a_\varepsilon\| \leqslant \|a\|. \tag{2.2}$$

Тогда

$$\|[x_n, a]\xi\| \leqslant \|[x_n, a_\varepsilon]\xi\| + \|[x_n^\varepsilon, a-a_\varepsilon]\xi\| + \|[x_n - x_n^\varepsilon, a-a_\varepsilon]\xi\|.$$

В силу (2.1), первое слагаемое стремится к нулю при $n\to\to\infty$, второе стремится к нулю, так как (x_n^ε) — ц. п., а третье — в силу предположений леммы и (2.2) допускает оценку при достаточно больших n

$$\|[x_n - x_n^\varepsilon, a-a_\varepsilon]\xi\| \leqslant \varepsilon(2C + 2\|a\|).$$

Отсюда ввиду произвольности $\varepsilon>0$ (C, $\|a\|$ не зависят от $\varepsilon>0$) делаем вывод о справедливости леммы.

Окончание доказательства предложения 5.2.1 приведено в [3], лемма 2.6.2.

5.3.

Лемма 5.3.1. Пусть M — фактор в сепарабельном гильбертовом пространстве H, ρ — т. норм. состояние на M. Тогда $\overline{M}=l^\infty(M, \mathbb{N})$ не может содержать элемент $\overline{u}=(u_n)$ со свойствами:

1) u_n — частичная изометрия;

2) проекторы $q_n'=u_n u_n^*$, $q_n=u_n^* u_n$ попарно ортогональны $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(q_n')=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(q_n)>0$;

3) $(u_n^\#)$, (q_n)—ц. п. в M (а значит, (q_n') и (p_n), где $p_n= =I-q_n-q_n'$, также ц. п. в M).

Приведем набросок доказательства. Пусть M_1—I_3— подфактор M, матричные единицы e_{ij}^1, $i, j=1, 2, 3$, которого равны $e_{11}^1=q_1^1$, $e_{22}^1=q_1$, $e_{33}^1=p_1$, $e_{12}^1=u_1$. Так как $(u_n^\#)$, (q_n)—ц. п. в M, то

$$v_n^\#=\sum_{i=1}^{3} e_{i1}u_n^\# e_{1i}, \quad r_n=\sum_{i=1}^{3} e_{i1}q_n e_{1i}, \quad n\geqslant 2,$$

также ц. п. в M, причем $v_n^{\#}$, $r_n \in M_1{}^c = M_1{}' \cap M$. Далее, воспользовавшись методами, которые были развиты при доказательстве леммы 1.1.4 [23], для всякого $\varepsilon > 0$ можно доказать существование попарно ортогональных проекторов e_{ii}^2, $i=1, 2, 3$, и частично изометрического оператора e_{12}^2 из $M_1{}^c$, где $e_{11}^2 = e_{12}^2 e_{21}^2$, $e_{22}^2 = e_{21}^2 e_{12}^2$ и $e_{21}^2 = (e_{12}^2)^*$ таких, что для некоторого $n \in \mathrm{N}$

$$\|(u_n - e_{12}^2)^{\#} \xi\| < \varepsilon, \quad \|(q_n{}^1 - e_{11}^2)\xi\| < \varepsilon, \quad \|(q_n - e_{22}^2)\xi\| < \varepsilon,$$

$$|\rho(e_{ii}^1 e_{kk}^2) - \rho(e_{ii}^1)\rho(e_{kk}^2)| < \varepsilon, \quad 0 < \rho(e_{11}^1) < \varepsilon \quad (i, k = 1, 2, 3).$$

Понятно, что в $M_1{}^c$ существует I_3-подфактор M_2, матричные единицы e_{ii}^2, $i=1, 2, 3$, и e_{12}^2, e_{21}^2 которого уже определены. Поэтому можно рассмотреть фактор $M_2{}^c = M_1{}^c \cap M_2{}'$ и продолжить индукцию.

В результате мы построим последовательность операторов e_{ij}^k, $i, j = 1, 2, 3$, $k \in \mathrm{N}$, из M со свойствами:

(i) e_{ij}^k — матричные единицы I_3-подфактора;

(ii) e_{ij}^k попарно коммутируют между собой при разных k;

(iii) — существуют такие $k_n \in \mathrm{N}$, что

$$\|(u_{k_n} - e_{12}^n)\xi\| < 1/2^{n+1}, \quad \|(q_{k_n} - e_{22}^n)\xi\| < \frac{1}{2^{n+1}},$$

$$\|(q'_{k_n} - e_{11}^n)\xi\| < \frac{1}{2^{n+1}};$$

(iv) $\rho(e_{11}^n) < 1/2^n$;

(v) $|\rho(a e_{tt}^n) - \rho(a)\rho(e_{tt}^n)| < \frac{1}{2^{n+1}}$, $a = \prod_{s=1}^{p} e_{i_s j_s}^{k_s}$, $1 \leqslant k_s$, $p < n$.

Но тогда если положить $e_k = e_{22}^k + e_{33}^k$ и $f_k = \prod_{s=1}^{k} e_s$, то $s\text{-}\lim_{k\to\infty} f_k = f$ существует и $f \neq 0$ (см. свойства (iv) и (v)). Положим $v_k = e_{12}^k + e_{21}^k + e_{33}^k$. Очевидно, (v_k) — ц. п. в M, поскольку, согласно предположению 3) леммы и (iii), (e_{12}^k), (e_{21}^k) и (e_{33}^k) — ц. п. в M. Далее, так как $v_k{}^* = v_k$, то должно быть $s\text{-}\lim_{k\to\infty} v_k f v_k = f \neq 0$.

С другой стороны, поскольку $e_{21}^k f = 0$, а $s\text{-}\lim_k f e_{21}^k = s\text{-}\lim_k e_{12}^k f = 0$, то $s\text{-}\lim_k v_k f v_k = s\text{-}\lim_{k\to\infty} e_{33}^k f e_{33}^k = s\text{-}\lim_k e_{33}^k f$. Так как ввиду предположения 2) леммы $w - \lim_k e_{33}^k \neq f$, то получается противоречие, которое доказывает лемму ■

5.4. После приготовлений предыдущего пункта можно приступить к доказательству следующей важной теоремы.

Теорема 5.4.1. Пусть M — фактор в сепарабельном гильбертовом пространстве H, $\bar{x}=(x_n)\in C_M$, тогда для всякого свободного ультрафильтра U на $\mathbf{N}$ $\Pi(\bar{x})E_U\in C_M^U$ (т. е. $\bar{x}\in\bar{M}_U^{0c}$ в обозначениях следствия 3.1.4).

Доказательство. Так как $\bar{x}\in C_M$, то $\bar{x}$ и $\bar{x}^*$ — ц. п., поэтому можно предполагать, что $\bar{x}=\bar{x}^*$. Пусть $B=\Pi(\bar{x})E_U$, положим $\Phi(B)=E_UBE_U+(I-E_U)B(I-E_U)$. Оператор $\Phi(B)$ является самосопряженным оператором из $\Pi(\bar{M}_U^0)$. Докажем, что $B=\Phi(B)$. Предположим противное и обозначим $A=(I-E_U)\times\times BE_U$, тогда $A^*=E_UB(I-E_U)$ и $B-\Phi(B)=A+A^*$.

Так как

$$[B, \Pi(z)]E_U=0, \quad \bar{z}\in\bar{M}_d, \tag{4.1}$$

то, учитывая $[\Pi(\bar{z}), E_U]=0$, $\bar{z}\in\bar{M}_d$, получим $[\Phi(B), \Pi(\bar{z})]E_U==0$, откуда следует, что

$$\Phi(B)E_U\in C_M'. \tag{4.2}$$

Из (4.1) и $[\Pi(\bar{z}), E_U]=0$ находим, что

$$[A, \Pi(\bar{z})]E_U=0, \quad \bar{z}\in\bar{M}_d. \tag{4.3}$$

Докажем равенство

$$[A^*A, \Pi(\bar{z})]E_U=0, \quad \bar{z}\in\bar{M}_d. \tag{4.4}$$

Так как ввиду (4.1) $E_UB\Pi(\bar{z})=E_U\Pi(\bar{z})B$, $\bar{z}\in\bar{M}_d$, то, учитывая (4.3), можно написать

$$A^*A\Pi(\bar{z})E_U=A^*\Pi(\bar{z})AE_U=E_UB(I-E_U)\Pi(\bar{z})AE_U=$$
$$=E_UB\Pi(\bar{z})(I-E_U)AE_U=E_U\Pi(\bar{z})B(I-E_U)AE_U=$$
$$=\Pi(\bar{z})A^*AE_U,$$

что и доказывает (4.4). Следовательно, $A^*A\in C_M^U$, а поэтому $|A|=(A^*A)^{1/2}\in C_M^U$. Выберем удобную «параметризацию» для A. Так как $|A|\in C_M^U$, то по лемме 2.2.2 существует $\bar{d}=(d_n)\in\bar{M}_{U+}^0$ такая, что $|A|E_U=\Pi(\bar{d})E_U$. Пусть $A=U|A|$ — полярное разложение для A. Согласно лемме 2.1.2, существует $\bar{y}=(y_n)\in\bar{M}$, для которого $U\xi_U=\Pi(\bar{y})\xi_U$, поскольку $U\in\Pi(\bar{M})''$. Рассмотрим векторы ξ_U и $\bar{\eta}\sim(y_n\xi)$. Повторяя доказательство леммы 2.1.2 применительно к ξ_U и $\bar{\eta}$ (вместо ξ_U, как в лемме 2.1.2), можно доказать существование элемента $\bar{v}=(v_n)\in\bar{M}$, для которого

$$\Pi(\bar{v})\xi_U=U\xi_U, \quad \Pi(\bar{v})^*\bar{\eta}=U^*\bar{\eta},$$
$$\Pi(\bar{v})^*\xi_U=U^*\xi_U=0, \quad \Pi(\bar{v})\bar{\eta}=U\bar{\eta}=0. \tag{4.5}$$

Так как $\bar{\eta}=U\xi_U=\Pi(\bar{v})\xi_U$, то

$$\Pi(\bar{v}^*\bar{v})\xi_U=\Pi(\bar{v})^*\bar{\eta}=U^*\bar{\eta}=U^*U\xi_U=Q\xi_U, \tag{4.6}$$

где $Q=U^*U$ — проектор из C_M^U, для которого $Q|A|=|A|$. Следовательно, $\bar{v}^*\bar{v}=(v_n^*v_n)\in\bar{M}_U^\rho$. Положим $v_n^*v_n=|v_n|^2$ и через $\tilde{q}_n$ обозначим минимальный проектор из M, для которого $\tilde{q}_n|v_n|=|v_n|$. Согласно лемме 2.2.2, существует элемент $\bar{q}'=(q_n')\in\bar{M}_U^\rho$, где q_n' — проектор из M, причем $q_n'\leqslant\tilde{q}_n$, такой, что $\Pi(\bar{q}')E_U=Q$. Рассмотрим полярное разложение $v_n=w_n|v_n|$ для v_n и положим $u_n'=w_nq_n'$, $\bar{u}'=(u_n')$. Так как $\bar{v}^*\bar{v}\in\bar{M}_U^\rho$, то $B^2=\Pi(\bar{v}^*\bar{v})$ коммутирует с E_U и $B^2E_U=Q$, но тогда и $BE_U=Q$, где $B=\Pi(|\bar{v}|)$, а $|\bar{v}|=(|v_n|)$. Следовательно,

$$\Pi\overline{(u')}E_U=\Pi\overline{(wq')}E_U=\Pi\overline{(w)}QE_U=\Pi\overline{(w)}\Pi(|\bar{v}|)_U=$$
$$=\Pi(\bar{v})E_U=UE_U=U.$$

Пусть p_n' — конечный проектор для u_n' и $\bar{p}'=(p_n')$. Так как $(I-E_U)\Pi(\bar{u}')E_U=UE_U=\Pi(\bar{u}')E_U$, то $\Pi(\bar{p}')E_U=0$. Следовательно, $\Pi((1-\bar{p}')\bar{q}'(1-\bar{p}'))E_U=\Pi(\bar{q}')E_U$, или $\lim\limits_{n\in U}\|(q_n'-(I-p_n')q_n'(I-p_n'))\xi\|=0$.

В силу леммы 2.1.3 существует проектор $\bar{r}=(r_n)\in\bar{M}_U^\rho$, где r_n — проекторы из M и $r_np_n'=0$, причем $\Pi(\bar{r})E_U=\Pi(\bar{q}')E_U=Q$. Далее, $\bar{r}$, $\bar{q}'\in\bar{M}_U^\rho$, поэтому $\bar{q}'\bar{r}\in\bar{M}_U^\rho$ и $\Pi(\bar{q}'\bar{r})E_U=\Pi(\bar{q}')E_U\Pi(\bar{r})E_U=Q^2=Q$. Пусть $q_n'r_n=o_n|q_n'r_n|$ — полярное разложение для $q_n'r_n$, где o_n — частичная изометрия. Тогда $q_n=o_n^*o_n$, $q_np_n'=0$, $o_no_n^*\leqslant q_n'$, причем если $\bar{o}=(o_n)$, то

$$\Pi(\bar{o})E_U=\Pi(\bar{o})QE_U=\Pi(\bar{o})\Pi(|\bar{q}'\bar{r}|)E_U=\Pi(\bar{q}'\bar{r})E_U=Q,$$

поскольку $\Pi(|\bar{q}'\bar{r}|^2)E_U=Q$ и $|\bar{q}'\bar{r}|^2\in\bar{M}_U^\rho$.

Теперь положим $u_n=u_n'o_n$. Тогда $q_n=u_n^*u_n=o_n^*u_n'^*u_n'o_n=o_n^*o_n$. Положим, далее, $p_n=u_nu_n^*$, $\bar{u}=(u_n)$, $\bar{p}=(p_n)$ и $\bar{q}=(q_n)$. Имеют место следующие соотношения

$$q_np_n=0\ (q_n\leqslant r_n,\ p_n\leqslant p_n',\ r_np_n'=0);\tag{4.7}$$

$$\lim_{n\in U}\rho(p_n)=0;\tag{4.8}$$

$$\Pi(\bar{u})E_U=\Pi(\bar{u}')\Pi(\bar{o})E_U=\Pi(\bar{u}')QE_U=U;\tag{4.9}$$

$$\Pi(\bar{q})E_U=\Pi(\bar{u}^*\bar{u})E_U=\Pi(\bar{o}^*\bar{o})E_U=Q\ (\bar{q}\in\bar{M}_U^\rho).\tag{4.10}$$

Введем обозначения $a_n=u_nd_n$. Учитывая, что $|A|E_U=\Pi(\bar{d})E_U$ и (4.9) получим $\Pi(\bar{a})E_U=\Pi(\bar{u})\Pi(\bar{d})E_U=\Pi(\bar{u})E_U|A|=U|A|=A$ и $\Pi(\bar{a}^*)\Pi(\bar{a})E_U=|A|^2$. Итак, нужная параметризация для A выбрана. Сделаем

Замечание 5.4.2. Пусть $E_UBE_U=\Pi(\bar{b})E_U$, где $\bar{b}=(b_n)\in\bar{M}_U^\rho$, тогда $BE_U=(A+E_UB)E_U$, или $AE_U=BE_U-E_UBE_U$

Последнее означает, что $\lim\limits_{n\in U}\|(a_n-x_n+b_n)\xi\|=0$. Так как в силу (4.2) $\Phi(B)E_U=\Pi(\bar{b})E_U\in C_M^U$, то существует такая последовательность индексов n_k, что (b_{n_k}) — ц. п. в M (см. Предложение 5.2.1) и $\lim\limits_{k\to\infty}\|(a_{n_k}-x_{n_k}+b_{n_k})\xi\|=0$. Но (x_n) — ц. п. согласно предположению теоремы 5.4.1, поэтому $(x_{n_k}-b_{n_k})$ — ц. п. в M. Следовательно, (a_{n_k}) — также ц. п. в M, эквивалентная $(x_{n_k}-b_{n_k})$. Поэтому, без ограничения, в общности можно предполагать, что (a_n) — ц. п. в M.

Вернемся к доказательству теоремы. Наша цель состоит теперь в том, чтобы из (u_n) и (q_n) извлечь подпоследовательности, которые являлись бы ц. п. в M и имели бы одинаковые индексы. Докажем сначала, что

$$[U,\ \Pi(\bar{z})]E_U=0,\quad \bar{z}\in\bar{M}_d. \tag{4.11}$$

Через Q_n обозначим подпроектор Q из C_M^U, для которого $1/nQ_n\leqslant Q_n|A|$. Тогда $H_n=|A|^{-1}Q_n\in C_M^U$ и $AH_n=UQ_n=U_n$. Поэтому, принимая во внимание (4.3) и учитывая, что $[H_n, E_U]=$ $=[\Pi(\bar{z}), E_U]=0$, $\bar{z}\in\bar{M}_d$, получим равенство для $\bar{z}\in\bar{M}_d$

$$\Pi(\bar{z})U_nE_U=\Pi(\bar{z})AH_nE_U=\Pi(\bar{z})AE_UH_n=A\Pi(\bar{z})H_nE_U=$$
$$=AH_nE_U\Pi(\bar{z})E_U=U_n\Pi(\bar{z})E_U.$$

Следовательно,

$$\Pi(\bar{z})UE_U=s\text{-}\lim_{n\to\infty}\Pi(\bar{z})U_nE_U=s\text{-}\lim_{n}U_n\Pi(\bar{z})E_U=U\Pi(\bar{z})E_U$$

и (4.11) имеет место, причем $s-\lim\limits_{n\to\infty}AH_n=s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}UQ_n=U$. Положим $H_n=\Pi(\bar{h}^n)E_U$, где $h^n=(h_s^n)\in\bar{M}_U^{\rho c}$. Поскольку $H_n\in C_M^U$, то существуют операторы $H_{n,k}=\Pi(\bar{h}^{n,k})E_U$ из $(C_M^U)_0$, где $\bar{h}^{n,k}=$ $=(h_s^{n,k})\in N_U^{\rho c}$ (см. следствие 3.1.4) такие, что

$$\|(H_n-H_{n,k})\xi_U\|<1/2^k,\quad \|H_{n,k}\|\leqslant\|H_n\|, \tag{4.12}$$

$$\bar{h}^{n,k}=(h_s^{n,k})\in N_U^{\rho c},\quad \sup_{s,k}\|h_s^{n,k}\|\leqslant C_n<\infty. \tag{4.13}$$

Пусть S — счетная $*$-подалгебра M с единицей такая, что $S''=M$. Через D обозначим C^*-подалгебру $\bar{M}$, порожденную элементами $\bar{s}=(s,\ s,\ldots)$, где $s\in S$, $\bar{a}=(a_n)$, $h^n=(h_l^n)$, $\bar{h}^{n,k}=$ $=(h_l^{n,k})$, $\bar{u}=(u_n)$. Кроме того, включим в D элементы $\bar{q}^n=(q_l^n)$ и $\bar{u}^n=(u_l^n)$, $n\in\mathbf{N}$, где $\Pi(\bar{q}^n)E_U=Q_n$, $\Pi(\bar{u}^n)E_U=U_n=UQ_n$, причем q_l^n — подпроектор q_n, а $u_l^n=u_nq_l^n$. Тогда D содержит счетное всюду плотное подмножество относительно нормы и, согласно лемме 2.1.1, существует подпоследовательность индексов (n_i) такая, что для любого $\bar{d}=(d_i)\in D$

$$\rho_U(\bar{d})=\lim_{k\to\infty}\rho(d_{n_k}). \qquad (4.14)$$

Поскольку $H_{n,k}\in C_M^U$, то из (4.14) следует, что для $s\in S$

$$\lim_{i\to\infty}\|[h_i^{n,k},\ s]\,\xi\|=\|[H^{n,k},\ \Pi(\bar{s})]\,\xi_U\|=0, \qquad (4.15)$$

а в силу (4.12)

$$\lim_{i\to\infty}\|(h_{n_i}^n-h_{n_i}^{n,k})\,\xi\|=\|(H_n-H_{n,k})\,\xi_U\|\leqslant 1/2^k. \qquad (4.16)$$

Далее, так как $\bar{u}^n=(u_i{}^n)\in D$ и $U_nE_U=\Pi(\bar{u}^n)E_U=AH_n$, то

$$\lim_{i\to\infty}\|(a_{n_i}h_{n_i}^n-u_{n_i}^n)\,\xi\|=\|(AH_n-U_n)\,\xi_U\|=0, \qquad (4.17)$$

а поскольку $\bar{u}^k$, $\bar{u}\in D$, то

$$\lim_{i\to\infty}\|(u_{n_i}-u_{n_i}^k)\,\xi\|=\lim_{i\to\infty}\|u_{n_i}(q_{n_i}-q_{n_i}^k)\,\xi\|=\rho_U(Q-Q_k)^{1/2}. \qquad (4.18)$$

Докажем теперь, что (u_{n_i}) — ц. п. В силу (4.13) и (4.15), $(h_{n_i}^{n,k})_{i=1}^{\infty}$ — ц. п. в M (см. предложение 2.4.6). Так как (a_n) — ц. п. (см. замечание 5.4.2), то для $y\in M$

$$\|[a_{n_i}h_{n_i}^{n,k},\ y]\,\xi\|<\|a_{n_i}[h_{n_i}^{n,k},\ y]\,\xi\|+\|[a_{n_i},\ y]\,h_{n_i}^{n,k}\xi\|<$$
$$<C_1\|[h_{n_i}^{n,k},\ y]\,\xi\|+C_2\|[a_{n_i},\ y]\,\xi\|,$$

где $C_1=\operatorname{Sup}_n\|a_n\|<\infty$, а $C_2=\operatorname{Sup}_n\|S_\rho(h_{n_i}^{n,k})^*S_\rho\|<\infty$, поскольку $h_i^{n,k}\in M(\sigma^\rho,\ e^{[-c,c]})$ для всех $i\in\mathbb{N}$ и некоторого $C\,(0<C<\infty)$ (см. предложение 2.4.6). Понятно, что первое слагаемое стремится к нулю при $i\to\infty$, поскольку $(h_{n_i}^{n,k})_{i=1}^{\infty}$ — ц. п., второе — так как (a_{n_i}) — ц. п. Таким образом, $(a_{n_i}h_{n_i}^{n,k})_{i=1}^{\infty}$ — ц. п. в M.

Далее, при достаточно больших n_i, в силу (4.16),

$$\|(a_{n_i}h_{n_i}^n-a_{n_i}h_{n_i}^{n,k})\,\xi\|\leqslant C_1\|(h_{n_i}^n-h_{n_i}^{n,k})\,\xi\|<C_1\frac{1}{2^k}, \qquad (4.19)$$

а благодаря (4.13),

$$\|a_{n_i}h_{n_i}^{n,k}\|<C_1C_n<\infty, \qquad (4.20)$$

где C_1C_n не зависит от n_i и k. Ввиду (4.19), из леммы 5.2.2 следует, что $(a_{n_i}h_{n_i}^n)_{i=1}^{\infty}$ — ц. п. в M. Но тогда из (4.17) находим, что $(u_{n_i}^n)_{i=1}^{\infty}$ — ограниченная по норме последовательность, эквивалентная ц. п. $(a_{n_i}h_{n_i}^n)_{i=1}^{\infty}$. Следовательно, $(u_{n_i}^n)_{i=1}^{\infty}$ — также ц. п. в M. Опять поскольку $\|u_{n_i}^n\|=\|u_nq_{n_i}^n\|\leqslant 1$, то, учитывая (4.18), и вспоминая, что $s\text{-}\lim_n Q_n = Q$, из леммы 5.2.2 выводим, что (u_{n_l}) — ц. п. в M.

Итак, (u_{n_l}) — ц. п., в силу (4.8) $s\text{-}\lim\limits_{l\to\infty} p_{n_l}=0$, но тогда $(u^*_{n_l})$ — также ц. п. в M. Можно считать, что индексы выбраны таким образом, что и (q_{n_l}) — ц. п. в M (так как $Q=\Pi(\overline{q})E_U\in C^U_M$, то для правильного выбора индексов (n_l) нужно было расширить C^*-алгебру D, включая туда $\overline{q}=(q_{n_l})$, $\overline{r}^l=(r_n{}^l)$, где $\Pi(\overline{r}^l)E_U\in(C^U_M)_0$ и $s\text{-}\lim \Pi(\overline{r}^l)E_U=\Pi(\overline{q})E_U$, а затем применить лемму 5.2.2). Но тогда $t_{n_l}=I_M-q_{n_l}-p_{n_l}$ — проектор в M, а (t_{n_l}) — ц. п. в M. Следовательно, (u_{n_l}), $(u^*_{n_l})$, (q_{n_l}) и (t_{n_l}) — ц. п. в M. Существование таких ц. п. в M противоречит лемме 5.3.1. Следовательно, $A=0$ и $B=\Phi(B)$ (см. начало доказазательства), поэтому $[B, E_U]=0$ и $BF_U\in C^U_M$ ■

Следствие 5.4.3. Если $\overline{x}=(x_n)\in C_M$ и $\overline{x}$ — тривиальная последовательность, то $\overline{x}^*=(x_n{}^*)$ — также тривиальна.

5.5. Из теоремы 5.4.1 можно извлечь ряд любопытных следствий.

Следствие 5.5.1. C_M — C^*-подалгебра $\overline{M}=l^\infty(M, \mathrm{N})$ и $C_M=\bigcap \overline{M}^{\varrho c}_U$, где пересечение берется по всем свободным ультрафильтрам U на N.

Действительно, понятно, что $\bigcap\limits_n \overline{M}^{\varrho c}_U \subseteq C_M$, где $\overline{M}^{\varrho c}_U$ определено в следствии 3.1.4. С другой стороны, в силу теоремы 5.4.1 $\Pi_U(C_M)E_U\subset C^U_M$. Следовательно, $C_M=\bigcap\limits_U \overline{M}^{\varrho c}_U$, поэтому C_M — C^*-подалгебра $\overline{M}$.

Следствие 5.5.2. Пусть фактор M является Γ — а. а., положим $\overline{M}_\gamma=(\overline{\gamma}(x)=(\gamma_n(x), x\in M)$, тогда $\Pi(\overline{M}_\gamma)E_U$ — подфактор C^U_M, изоморфный M.

Доказательство. Так как ξ_U — циклический отделяющий вектор для C^U_M, то C^U_M — конечная либо σ-конечная собственно бесконечная W^*-алгебра, а $x\to\Pi(\overline{\gamma}(x))E_U$ есть *-изоморфизм M в C^U_M. Согласно теореме 7 [48], это отображение *-слабо непрерывно, но тогда $\Pi(\overline{M}_\gamma)E_U$ — подфактор C^U_M, изоморфный M ■

Теорема 5.5.3. Факторы типа II_∞ и III_0 не являются а.а. (случай II_∞ рассмотрен в [31], случай III_0 сформулирован в качестве проблемы в [26]).

Доказательство. Если M — фактор типа III_0 (а также II_∞) и $C^U_M\neq Z(C^U_M)$, то по лемме 3.4.3 алгебра C^U_M имеет тип II_1. Поэтому C^U_M не может содержать в качестве подфактора фактор типа III_0 (а также II_∞), так как последние содержат бесконечные проекторы. Отсюда и из следствия 5.5.2 вытекает справедливость теоремы 5.5.3 ■

Перейдем к обсуждению свойства L Пуканского.

Определение 5.5.4 [40]. Говорят, что фактор M обладает свойством L, если в M существует ц. п. унитарных операторов (u_n) такая, что $w=\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$.

Условимся говорить, что фактор M обладает свойством L^*, если в M существуют ц. п. унитарных операторов $u^\#=(u_n^\#)$, причем $w=\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$.

Теорема 5.5.5 [3]. Для того чтобы фактор M обладал свойством L^*, необходимо и достаточно чтобы $C_M^U \neq \mathbf{C}$. Более того, если $s=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,[u_n, u_n^*]\neq 0$, то $C_M^U\neq Z(C_M^U)$.

5.6. Изучим связь между автоморфизмами M и C_M^U.

Теорема 5.6.1. Пусть $\theta\in\mathrm{Aut}\,M$, тогда отображение $\overline{x}=\langle x_n\to\overline{\theta}(\overline{x})=\langle\theta\langle x_n\rangle\rangle$ определяет автоморфизм $\overline{\theta}$-алгебры $\overline{M}=l^\infty(M, \mathbf{N})$ и ее подалгебр $\overline{M}_U^\rho$ и $\overline{M}_U^{\rho c}$ (см. лемму 2.2.2 и следствие 3.1.4 соответственно). Этот автоморфизм индуцирует автоморфизм θ_U алгебры Неймана C_M^U, причем $\rho_U\circ\theta_U=\rho_U$ (следовательно, $\sigma_t^U\cdot\theta_U=\theta_U\circ\sigma_t^U$, $t\in\mathbf{R}$).

Доказательство по существу следует из ссотношения $\rho_U=(\rho\circ\theta)_U$ (см. теор. 3.1.3, детали приведены в [3]).

Теорема 5.6.2. Пусть M фактор типа III, $\theta\in\mathrm{Aut}\,M$ и существует последовательность n_k такая, что для любых x, $y\in M$ $s^*=\lim\limits_{k\to\infty}[\theta^{n_k}(x), y]=0$, где $[a, b]=ab-ba$. Тогда на M существует т. норм. состояние ψ, инвариантное относительно θ. (Теорема дает ответ на вопрос, поставленный в [26]).

Доказательство. Положим $\overline{M}_\theta=\{\overline{\theta(x)}=(\theta^{n_k}(x), \ x\in M\}$, тогда $\overline{M}_\theta$ — C^*-подалгебра $\overline{M}=l^\infty(M, \mathbf{N})$. Согласно следствию 5.5.2, $\Pi_U(\overline{M}_\theta)E_U$ — подфактор C_M^U, изоморфный M. Сужение ρ_U на $\Pi(\overline{M}_\theta)E_U$ является нормальным состоянием, точность его — следствие точности ρ_U на C_M^U. Обозначим $\psi=\rho_U|_{\Pi(\overline{M}_\theta)E_U}$. Так как при $x\in M$, $\theta(x)\in M$, то $\overline{\theta}(\overline{\theta(x)})=(\theta^{n_k}(\theta(x))_{k=1}^\infty=(\overline{\theta(\theta(x)}))$, поэтому алгебра $\Pi(\overline{M}_\theta)E_U$ инвариантна относительно θ_U, действие которого на $\Pi(\overline{M}_\theta)E_U$ совпадает с действием θ на M. Так как в силу предыдущей теоремы $\rho_U\circ\theta_U=\rho_U$, то $\psi\circ\theta=\psi$, т. е. ψ — т. норм. θ — инвариантное состояние на M ■

Следствие 5.6.3. Пусть M, θ и ψ — такие же, как в теореме 5.6.3, тогда ψ — единственно и для любого т. норм. состояния ρ на M

$$\psi(x)=\lim_{k\to\infty}\rho(\theta^{n_k}(x)).$$

Заметим, что далеко не для каждого θ из $\operatorname{Aut} M$ существует т. норм., θ-инвариантное состояние.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Голодец В. Я.*, Спектральные свойства модулярных операторов, Функц. анализ и его прил. 1972, *6*, № 1, 70—72 (РЖМат, 1972, 7Б709)
2. —, Спектральные свойства модулярных операторов и множество асимптотических отношений. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1975, *39*, № 9, 635—656 (РЖМат, 1975, 9Б751)
3. Модулярные операторы и асимптотическая коммутативность в алгебрах Неймана. Успехи мат. наук 1978, *23*, № 1, 43—94
4. —, Условные ожидания, модулярные автоморфизмы неймановских алгебр. Функц. анализ и его прил. 1972, *6*, № 3, 77—78 (РЖМат, 1972, 11Б862)
5. —, Об изоморфизме аппроксимативно конечных факторов типа III_1, с почти-периодическим весом. Мат. заметки, 1981, *30*, № 5, 669—678 (РЖМат, 1982, 3Б847)
6. —, Автоморфизмы факторов Араки — Вудса типа III_1. Укр. мат. ж, 1983, 35, № 5, 613—617 (РЖМат, 1984, 3Б1031)
7. —, Автоморфизмы инъективных факторов типа III_0, J. Operator theory (принято к печати)
8. —, *Демьяненко Г. Г.*, Классификация глобальных алгебр типа III и свойства однородных алгебр типа III_λ $0\leqslant\lambda\leqslant 1$. Докл. АН СССР, 1983, *272*, № 2, 278—281 (РЖМат, 1984, 1Б1052)
9. —, *Нессонов Н. И.*, Асимптотическая алгебра и внешне сопряженные классы автоморфизмов факторов. Изв. АН СССР, сер. матем., 1980, *44*, № 6, 510—632 (РЖМат, 1980, 9Б700).
10. *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы. Общая теория. Ч. I. Пер. с англ. М., Изд. ин. лит. 1962, 895 с. (РЖМат, 1963, 3Б330К)
11. *Макдуфф Д.*, К структуре II_1-факторов. Успехи мат. наук, 1970, *25*, № 6, 29—51 (РЖМат, 1971, 6Б741)
12. *Наймарк М. А.*, Нормированные кольца. М.: Наука, 1968, 664 с. (РЖМат, 1969, 4Б520К)
13. *Нессонов Н. И.*, О структуре факторов типа III_λ, $0\leqslant\lambda\leqslant 1$. Укр. мат. ж., 1980, *32*, № 3, 348—354 (РЖМат, 1980, 11Б919)
14. *Рюэль Д.*, Статистическая механика, строгие результаты. М.: Мир, 1971, 367 с.
15. *Araki H.*, A classification of factors II. Publ. Res. Inst. Math. Sci., Kyoto Univ., 1969, ser. A, *4*, No 3, 585—593 (РЖМат, 1969, 11Б588)
16. —, Asymptotic ratio set and property L_λ'. Publ. Res. Inst. Math. Sci., Kyoto Univ., 1970, ser. A, *6*, No 3, 443—460 (РЖМат, 1971, 10Б597)
17. —, Remark on spectra of modular operator of von Neumann algebras. Commun. Math. Phys., 1972, *28*, No 4, 267—277 (РЖМат, 1972, 5Б784)
18. —, Positive cones, Radon-Nikodym theorems, relative hamiltonian and Gibbs conditions in statistical mechanics. Preprint, Res. Inst. Math. Sci., Kyoto Univ. 1973, No 151, 64 pp.
19. —, *Woods E. J.*, A classification of factors. Publ. Res. Inst. Math. Sci., Kyoto Univ., 1968, ser. A, *3*, No 1, 51—130 (РЖМат, 1969, 9Б478)
20. *Connes A.*, Une classification des facteurs de type III. Ann. Sci., École Norm. Super., 4e série, 1973, *6*, No 2, 133—252 (РЖМат, 1974, 3Б768)
21. —, Classification of injective factors (cases III_λ, $\lambda\neq 1$). Ann. Math., 1976, *104*, No 1, 73—115 (РЖМат, 1977, 2Б903)
22. —, Almost periodic states and factors of type III. J. Funct. Anal., 1974, *16*, No 4, 415—445 (РЖМат, 1975, 2Б688)

23. —, Outer conjugacy classes of automorphisms of factors. Ann. Sci. Éc. Norm. Sup., 1975, *8*, No 3, 383—420 (РЖМат, 1976, 7Б842)
24. —, On the classification of von Neumann algebras and their automorphisms. Symposia Math., 1976, *20*, 435—478 (РЖМат, 1978, 3Б749)
25. —, *Størmer E.*, Homogenety of the state space of factors of type III_1. J. Funct. Anal., 1978, *28*, No 2, 187—420 (РЖМат, 1978, 12Б1284)
26. —, *Woods E. J.*, Existence de facteurs infinis asymptotiquement abéliens. C. R. Acad. Sci., 1974, *A279*, No 6, 189—191 (РЖМат, 1975, 2Б684)
27. *Dixmier J.*, Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien. 2^e—ed, Gauthier—Villars, Paris, 1969, 367 p. (РЖМат, 1969, 8Б644)
28. —, *Lance E. C.*, Deux noweaux de facteurs type II_1. Invent. math., 1967, *7*, No 3, 226—234 (РЖМат, 1969, 12Б682)
29. *Doplicher S.*, *Kastler D.*, *Størmer E.*, Invariant states and asymptotic abelianness. J. Funct. Anal., 1969, 3, No 3, 419—434 (РЖМат, 1970, 2Б763)
30. *Glaser M. S.*, Asymptotic abelianness of infinite factors. Trans. Amer. Math. Soc., 1973, *178*, Apr., 41—56 (РЖМат, 1974, 2Б890)
31. *Haag R.*, *Hugenholtz N. M.*, *Winnink M.*, On the equilibrium states in quantum statistical mechanics. Commun. Math. Phys., 1967, *5*, No 3, 215—236 (РЖМат, 1968, 5Б742)
32. *Haagerup U.*, The standard form of von Neumann algebras, Math. Scand., 1976, *37*, No 2, 271—283 (РЖМат, 1976, 10Б704)
33. *Hermann R.*, *Takesaki M.*, States and automorphism group of operator algebra. Commun. Math. Phys., 1970, *19*, No 2, 142—160 (РЖМат, 1971, 3Б472)
34. *Jones V. F. R.*, Actions of finite groups on the hyperfinite type II_1 factors. Mem. Amer. Math. Soc., 1980, *28*, No 337, 70 p. (РЖМат, 1981, 4Б872)
35. —, *Takesaki M.*, Actions of compact abelian groups on semifinite injective factors. Univ. of California, Los Angeles, preprint, 1982, 50 p.
36. *Mcduff D.*, Central sequences and hyperfinite factors. Proc. London Math. Soc., 1970, *21*, No 3, 361—443 (РЖМат, 1971, 9Б601)
37. *Murray F. J.*, *von Neumann J.*, On rings of operators IV. Ann. Math., 1943, *44*, No 3, 716—808
38. *Ocneanu A.*, Actions of discrete amenable groups on factors, Univ. of Pennsylvania, preprint, 1981, 189 p.
39. *Powers R. T.*, Representations of uniformly hyperfinite algebras and their associated von Nenmann rings. Ann. Math., 1967, *86*, No 1, 138—171 (РЖМат, 1969, 1Б649)
40. *Pukanszky L.*, Some examples factors. Publ. Math. Debrecen, 1956, *4*, No 1, 135—156
41. *Sakai S.*, C^*-algebras and W^*-algebras. Ergeb. Math., Berlin, Springer 1971, 256 p. (РЖМат, 1971, 11Б876)
42. —, Asymptotically abelian II_1 factors. Publ. Res. Inst. Math. Sci., Kyoto Univ., 1968/69, ser. A, *4*, No 2, 299—307 (РЖМат, 1969, 12Б680)
43. *Størmer E.*, Spectra of states and asymptotically abelian C^*-algebras. Commun. Math. Phys., 1972, *28*, No 4, 279—294 (РЖМат, 1973, 5Б778)
44. —, Hyperfinite product factors III. Amer. J. Math., 1975, *97*, No 3, 589—595 (РЖМат, 1976, 7Б841)
45. *Stratila S.*, Modular theory in operator algebras. Bucuresti, Abacus Press, 1981, 492 p. (РЖМат, 1982, 6Б903К)
46. *Takesaki M.*, Tomita's theory of modular Hilbert algebras and its application. Lect. Notes Math., Berlin—Heidelberg—New York, 1970, *128*, 123 p. (РЖМат, 1970, 11Б653)
47. —, Conditional expectation in von Neumann algebras. J. Funct. Anal., 1972, *9*, No 3, 306—321 (РЖМат, 1972, 7Б701)
48. —, On the conjugate space of operator algebra. Tohoku Math. J., 1958, *10*, No 2, 194—203 (РЖМат, 1960, 4Б262)
49. *Testard D.*, Asymptotic ratio set of von Neumann algebras generated by temperature states in statistical mechanics. Report. Math. Phys., 1977, *12*, No 1, 115—118